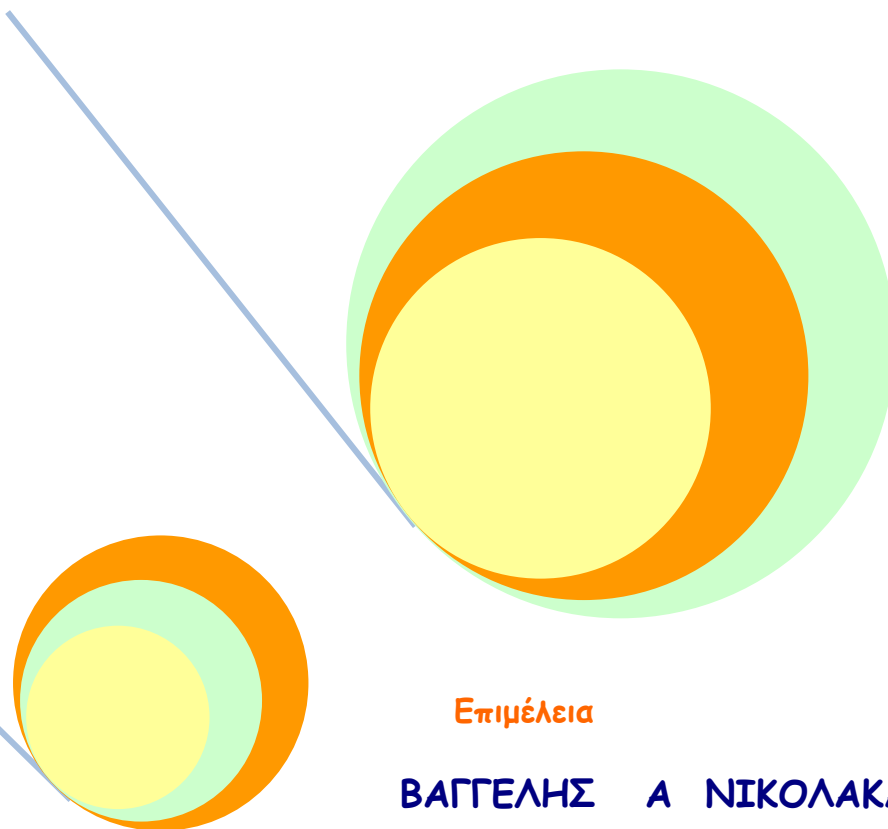
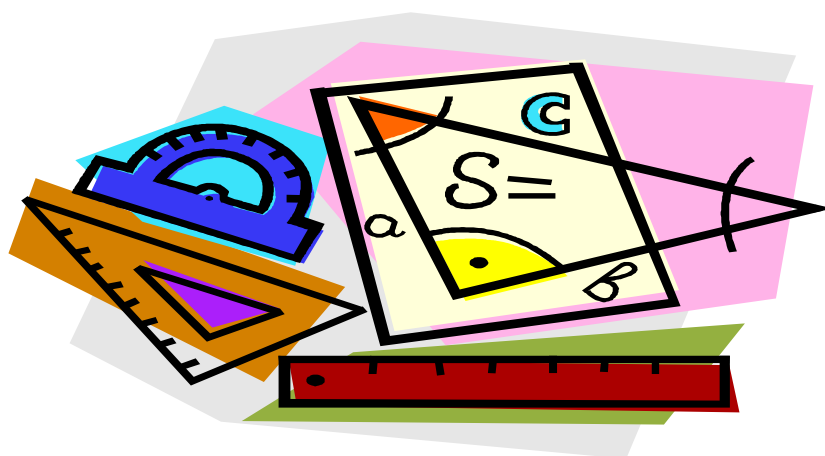




Επιμέλεια

ΒΑΓΓΕΛΗΣ Α ΝΙΚΟΛΑΚΑΚΗΣ



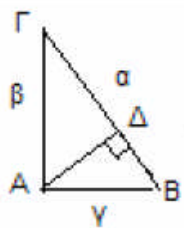
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β

ΛΥΚΕΙΟΥ

Εξετασεις - 2012

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ



ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ:

- i) $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ (Πυθαγόρειο...)
 ii) $\gamma^2 = \alpha \cdot \beta$
 iii) $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$
 iv) $\alpha \Delta^2 = \beta \Delta \cdot \Delta \Gamma$

$$\Rightarrow \frac{\beta \Delta}{\Gamma \Delta} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

v) $\alpha \cdot \nu_\alpha = \beta \cdot \gamma$

vi) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\nu_\alpha^2}$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΑ:

- $\hat{A} < 1^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \chi$ (χ η προβολή της γ στη β)
 $\hat{A} > 1^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \gamma \cdot \psi$ (ψ η προβολή της β στη γ)
 $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sin A$ (Νόμος συνημιτόνων)

ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ:

- $\hat{A} < 1^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$
 $\hat{A} > 1^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
 $\hat{A} = 1^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΥΨΩΝ:

$$\nu_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

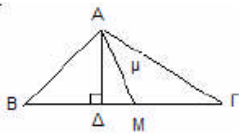
Ε Μ Β Α Δ Α

Τετράγωνο: $E = \alpha^2$

Ορθογώνιο: $E = \alpha \cdot \beta$

Παράλληλο: $E = \alpha \cdot \nu_\alpha = \beta \cdot \nu_\beta$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ



1ο Θ.Δ: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$
 2ο Θ.Δ: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \mu_\Delta$
 $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$

Ρόμβος (και τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες): $E = \frac{1}{2} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$

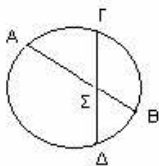
Τρίγωνο: $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot \nu_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot \nu_\gamma$

Τρίγωνο: $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$

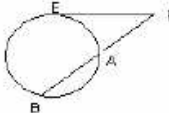
Τρίγωνο: $E = \tau \cdot \rho$ ρ = ακτίνα εγγεγραμ.	$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$ R = ακτίνα περιγεγραμ.	Τραπεζίο: $E = \frac{1}{2} (B + \beta) \cdot \nu$
--	--	--

Τρίγωνο: $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta \mu A = \frac{1}{2} \gamma \cdot \alpha \cdot \eta \mu B = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta \mu \Gamma$

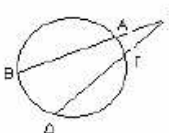
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ:



$\Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma \Gamma \cdot \Sigma \Delta$ (AB, ΓΔ τεμνόμενες χορδές)



$PE^2 = PA \cdot PB$ (PE εφαπτόμενη)

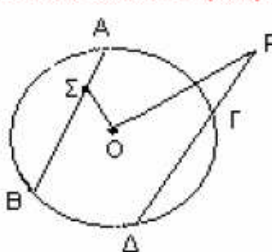


$PA \cdot PB = PC \cdot PA$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'} & , \text{ αν } \nu_\alpha = \nu_{\alpha'} \\ \frac{\nu_\alpha}{\nu_{\alpha'}} & , \text{ αν } \alpha = \alpha' \\ \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'} & , \text{ αν } A = A' \text{ ή } A + A' = 180 \\ \lambda^2 & , \text{ αν } \text{τρ} AB\Gamma \approx \text{τρ} A'B'\Gamma' \end{cases}$$

ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ Σ ή Ρ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ (Ο, R):



$\Sigma A \cdot \Sigma B = R^2 - \delta^2$ ($\delta = \Sigma O$)
 $\Sigma \Gamma \cdot \Sigma \Delta = \delta^2 - R^2$ ($\delta = \Sigma O$)

Η σταθερή ποσότητα

$$\Delta_{(O,R)}^M = \delta^2 - R^2$$

λέγεται δύναμη του Μ ως προς τον κύκλο (Ο, R) (δ = απόσταση του Μ από Ο)

$$\Delta_{(O,R)}^M > 0 \Leftrightarrow \text{Μ εκτός} \dots$$

$$\Delta_{(O,R)}^M < 0 \Leftrightarrow \text{Μ εντός} \dots$$

$$\Delta_{(O,R)}^M = 0 \Leftrightarrow \text{Μ επί} \dots$$

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ:

$$\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

i) $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$, ii) $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$, iii) $P_n = n \cdot \lambda_n$, iv) $E_n = \frac{1}{2} P_n \cdot \alpha_n$

Για 2 κανονικά ν-γωνα ισχύει: $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_n}{\alpha'_n}$

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

$\lambda_6 = R$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ:

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$, μήκος τόξου: $l = \pi R \mu / 180 = \alpha R$

Εμβαδόν κύκλου: $E = \pi R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $(O, \widehat{AB}) = \pi R^2 \mu / 360 = 1/2 \cdot \alpha R^2$

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου με μικρή και μεγάλη βάση β , B αντίστοιχα και ύψος $υ$ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot υ$. Μονάδες 15
- B.** Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD ύψος ισχύει $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$.
- β.** Η δύναμη ως προς κύκλο (O, R) ενός εξωτερικού σημείου M είναι $\Delta_{(O,R)}^M \delta^2 - R^2$.
- γ.** Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές α , β και αντίστοιχα ύψη $υ_\alpha$, $υ_\beta$ δίνεται από τον τύπο $E = \alpha \cdot υ_\beta$.
- δ.** Η γωνία φ_n και η κεντρική γωνία ω_n ενός κανονικού $n - γώνου$ είναι συμπληρωματικές.
- ε.** Το μήκος τόξου μ° σε κύκλο ακτίνας R , είναι $l = \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι: « Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας ». Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):
- α.** Δύναμη ενός σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) όπου $\delta = OP$, λέγεται η διαφορά: $\delta^2 - R^2$.
- β.** Το εμβαδόν E τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α , β , γ είναι $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{2R}$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- γ.** Αν AD ύψος ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τότε $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$.
- δ.** Αν δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμα, τότε είναι ίσα.
- ε.** Η γωνία ενός κανονικού $n - γώνου$ και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Σε κύκλο (O, R) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του συναρτήσει της ακτίνας R . Μονάδες 15
- B.** Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το γράμμα Σ, αν είναι σωστές ή το γράμμα Λ, αν είναι λανθασμένες:
- α.** Το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \mu_B$
- β.** Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.
- γ.** Το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 7$, $\beta = 5$ και $\gamma = 4$ είναι οξυγώνιο.

ΘΕΜΑ 4^ο

- A.** Να υπολογίσετε την πλευρά λ_4 και το απόστημα a_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) , συναρτήσει της ακτίνας R . Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις:
- α.** Ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διάμεσό του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
- β.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με AM διάμεσο, ισχύει: $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$
- γ.** Αν είναι $\hat{A} > 90^\circ$ τότε $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$
- δ.** Δύο ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα.
- ε.** Σε κύκλο (O, R) για δύο σημεία B, Γ αυτού ισχύει: $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow B\Gamma = R\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 5^ο

- A.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Μονάδες 10
- B.** Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη:
- α.** Το απόστημα a_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο: $a_4 = R\sqrt{5}$.
- β.** Η πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο: $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.
- γ.** Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ τότε $\hat{B} = 90^\circ$.
- δ.** Αν P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) , τότε $\Delta_{(O, R)}^P > 0$.
- ε.** Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημισυμφορματισμού των βάσεων του επί το ύψος του. Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 6^ο

- A.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Μονάδες 13
- B.** Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 6$.
Να βρεθεί η προβολή της διαμέσου μ_a στην πλευρά α . Μονάδες 4
- Γ.** Σε κύκλο $(O, R = 4)$ δίνεται επίκεντρη γωνία $\mu = 80^\circ$.

Να βρεθούν το μήκος του αντίστοιχου τόξου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα.

Μονάδες 4

- Δ. Ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10cm.

Να βρεθεί το εμβαδόν του.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 7^ο

- Α. Να αποδείξετε στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ότι $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$ όπου AD το ύψος του.

Μονάδες 15

- Β. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

με AD το ύψος του, ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

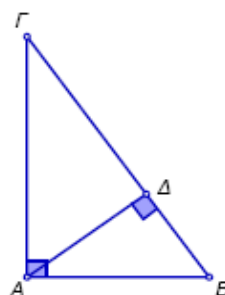
α. $AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2$

β. $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

γ. $AB^2 = \Gamma\Delta \cdot \Delta B$

δ. $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

ε. $BD \cdot \Delta\Gamma = AD^2$



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 8^ο

- Α. Να αποδείξετε ότι: «Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς».

Μονάδες 10

- Β. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ώστε να είναι αληθείς:

- α. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί

- β. Η δύναμη ενός σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) συμβολίζεται με και ισούται με

- γ. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow$

- δ. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το του ομοιότητας.

- ε. Ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι: $E =$

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5cm, ΑΓ = 7cm και ΒΓ = 6cm. Αν το ΑΔ είναι ύψος και ΑΜ διάμεσος, να δείξετε ότι:

- Α. το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του είναι οξυγώνιο Μονάδες 9
- Β. το μήκος της προβολής της ΑΒ στη ΒΓ είναι 1 Μονάδες 8
- Γ. το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ πάνω στη ΒΓ είναι 2. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12cm, ΑΓ = 28cm και ΒΓ = 20cm.

- Α. Ναδειχθεί ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι αμβλεία.
- Β. Να βρεθεί η προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.
- Γ. Να βρεθεί η γωνία $\hat{B}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι: ΑΒ = 5 και $B\Delta = \frac{25}{13}$ (ΑΔ το ύψος του τριγώνου). Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΓ, ΑΓ και ΑΔ. Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 5$. Να βρείτε:

- Α. Το είδος του τριγώνου
- Β. Τις προβολές της πλευράς γ , στις πλευρές β και α .

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = \sqrt{14}$.

- Α. Να δείξετε ότι η πλευρά α είναι ίση με 12.
- Β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
- Γ. Να υπολογίσετε την προβολή ΑΚ της πλευράς γ πάνω στη β .
- Δ. Να υπολογίσετε την προβολή ΔΜ της διαμέσου μ_α πάνω στην πλευρά α .

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μήκη των πλευρών του συνδέονται με τη σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

- Α. Να αποδείξετε ότι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$, όπου μ_α , μ_β , μ_γ οι αντίστοιχες διάμεσοι.

Μονάδες 15

- Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \mu_\beta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}, \mu_\gamma = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνεται ο κύκλος (O, R) με $R = 6\text{cm}$ και το σημείο A ώστε $AK = 14\text{cm}$. Από το σημείο A φέρνουμε τέμνουσα $AB\Gamma$ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή $B\Gamma = 6\text{cm}$.

Να υπολογίσετε το μήκος του AB .

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 8$.

A. Να δείξετε ότι $\hat{A} > 90^\circ$

Μονάδες 7

B. Να υπολογίσετε το ύψος AD καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 10

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου BM .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = 5$, $\gamma = 3$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

A. Να υπολογίσετε την πλευρά a .

B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο m_a .

ΘΕΜΑ 10^ο

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $a = 12$. Να υπολογίσετε:

A. την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 5

B. το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 7

Γ. το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R)

Μονάδες 5

Δ. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος μεταξύ της πλευράς $B\Gamma$ και του τόξου $B\Gamma$

ΘΕΜΑ 11^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε ευθεία παράλληλη της $B\Gamma$, η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot \Delta E$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 12^ο

Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $AB = 60^\circ$, $B\Gamma = 90^\circ$ και $\Gamma\Delta = 120^\circ$.

Να υπολογιστούν σαν συνάρτηση του R :

A. οι πλευρές του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 15

B. το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 13^ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 4\text{cm}$. Θεωρούμε μια διάμετρο $B\Gamma$ του κύκλου και μία χορδή του AB ίση με λ_6 .

a. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \lambda_3$.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(AOB)}{(AB\Gamma)}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να δείξετε ότι:

A. το μήκος της πλευράς ΒΓ = $\sqrt{7}$ και η διάμεσος ΓΜ = $\sqrt{7}$ Μονάδες 10

B. το εμβαδόν (ΑΒΓ) = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ τ. μ. και το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του
 τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = \frac{7\pi}{3}$ τ. μ. Μονάδες 10

Γ. αν προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΑΓ να δείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ΑΓΜ)}{(ΑΔΒ)} = \frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε κύκλο (Κ, R) δίνονται τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ να είναι: 60°, 90° και 120° αντίστοιχα.

A. Ναδειχθεί ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 7

B. Να βρεθούν ως συνάρτηση του R:

α. η απόσταση των χορδών ΑΒ, ΓΔ. Μονάδες 8

β. η περίμετρος και το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε, ώστε: ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9} ΒΓ^2 \quad \text{Μονάδες 25}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή Α με τα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\text{A. } (ΑΔΚ) = \frac{1}{4} (ΑΒΓΔ) \quad \text{Μονάδες 10}$$

$$\text{B. } (ΑΚΓΛ) = \frac{1}{2} (ΑΒΓΔ) \quad \text{Μονάδες 15}$$

ΘΕΜΑ 5^ο

Σε κύκλο (Ο, R) και εκατέρωθεν του κέντρου του θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ = R και ΓΔ = $R\sqrt{2}$. Να υπολογιστούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραpezίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του R.

ΘΕΜΑ 6^ο

Σε κύκλο (O, R) και εκατέρωθεν του κέντρου του θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του $AB = R$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογιστούν σαν συνάρτηση του R :

- A. οι μη παράλληλες πλευρές $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του τραπεζίου $ΑΒΔΓ$ Μονάδες 10
- B. το ύψος του Μονάδες 10
- Γ. το εμβαδόν του. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 7^ο

Σε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ συνδέουμε την κορυφή A , με τα μέσα K, Λ των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$(AK\Gamma\Lambda) = (AK\Delta) + (AB\Lambda) \quad \text{Μονάδες 25}$$

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R . Αν AK είναι το ύψος του τριγώνου, $\hat{B} = 60^\circ$ και $AB = \lambda_4$ (όπου λ_4 το μήκος της πλευράς τετραγώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο) τότε:

- A. Να υπολογιστεί η $ΑΓ$, συναρτήσει του R . Μονάδες 10
- B. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του $ΑΒΓ$ συναρτήσει του R . Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 9^ο

Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών $ΒΓ$ και $\Gamma\Delta$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$:

- A. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Gamma MN)}{(\Gamma B\Delta)} = \frac{1}{4}$ Μονάδες 8
- B. Να αποδείξετε ότι $(A\Delta N) = (ABM) = \frac{1}{4}(ΑΒΓΔ)$ Μονάδες 9
- Γ. Να αποδείξετε ότι: $(ANM) = \frac{3}{8}(ΑΒΓΔ)$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $AB = ΑΓ$ προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΓ$ κατά ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2 \quad \text{Μονάδες 25}$$

ΘΕΜΑ 11^ο

Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $AB = 60^\circ$, $ΒΓ = 90^\circ$ και $\Gamma\Delta = 120^\circ$. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

ΘΕΜΑ 12⁰

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) $AB < \Gamma\Delta$ είναι $AB = 4$, $A\Delta = 3$, $B\Gamma = 5$. ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$)

- A.** Να βρείτε την προβολή $E\Gamma$ της $B\Gamma$ πάνω στη $\Gamma\Delta$. Μονάδες 8
- B.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. Μονάδες 8
- Γ.** Να αποδείξετε ότι: $(AB\Gamma\Delta) = 3(B\Gamma E)$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 13⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12\text{cm}$, $B\Gamma = 16\text{cm}$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

- A.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 8
- B.** Αν Δ σημείο της πλευράς AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και E σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BE = \frac{1}{4}B\Gamma$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta E$.

ΘΕΜΑ 14⁰

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$ και M το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$.

Αν ο κύκλος διαμέτρου BM τέμνει το ύψος $A\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

- A.** $AB^2 = 2BE^2$ Μονάδες 12
- B.** $\frac{A\Delta^2}{E\Delta^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta M}$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 15⁰

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A ώστε $OA = 5R$. Αν $AB = 3B\Gamma$, τότε:

- A.** Να δείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{2}$.
- B.** Να βρείτε το λόγο των εμβαδών $\frac{(OAB)}{(OAG)}$.
- Γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν (OAB) .

ΘΕΜΑ 16⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και μια ευθεία ε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- A.** $\frac{(ABE)}{(ADE)} = \frac{AB}{A\Delta}$ και $\frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE}$ Μονάδες 16
- B.** $(ABE)^2 = (ADE) \cdot (AB\Gamma)$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 17⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 3$, $B\Gamma = 7$, $A\Gamma = 5$

- A. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του
- B. Να υπολογιστεί η διάμεσος μ_β
- Γ. Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου μ_β πάνω στην $A\Gamma$
- Δ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

ΘΕΜΑ 18⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών α , β , γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$.

Αν στο τρίγωνο ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$:

- A. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ Μονάδες 15
- B. Αν γνωρίζουμε από το νόμο των συνημιτόνων ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin \hat{A}$, να υπολογίσετε τη γωνία A . Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 19⁰

- A. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ τότε να βρείτε τη διάμεσο μ_α συναρτήσει της πλευράς α . Μονάδες 5
- B. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 20$ και $B\Gamma = 25$. Αν AD είναι το ύψος από την κορυφή A προς την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου, να υπολογίσετε τα τμήματα: $\Delta\Gamma$, ΔB , AB και AD . Μονάδες 20

ΘΕΜΑ 20⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = \alpha\sqrt{3}$ και διάμεσο $AM = \frac{3\alpha}{2}$.

- A. Να αποδείξετε ότι:
 - α. $\gamma = \alpha\sqrt{2}$
 - β. $B = 90^\circ$
- B. Αν BD είναι το ύψος του τριγώνου τότε:
 - α. να αποδείξετε ότι $AD = \frac{2\beta}{3}$
 - β. να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ADM)}{(AB\Gamma)}$

ΘΕΜΑ 21⁰

Δίνεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά σημεία του A, B, Γ ώστε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$.

- A. Να δείξετε ότι η $A\Gamma$ είναι διάμετρος Μονάδες 2
- B. Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του R Μονάδες 3
- Γ. Αν M μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι:

$$(AM\Gamma) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{Μονάδες 10}$$

- Δ. Αν η προέκταση της AM τέμνει τον κύκλο στο Δ να δείξετε ότι:

$$M\Delta = \frac{3R\sqrt{7}}{14} \quad \text{Μονάδες 5}$$

- E. Να βρείτε το εμβαδόν $(BM\Delta)$ συναρτήσει του R . Μονάδες 5

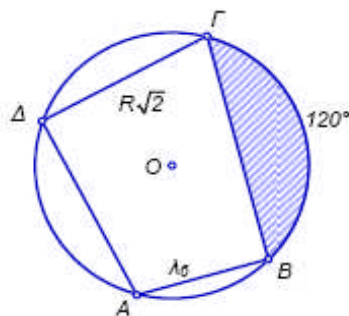
ΘΕΜΑ 22⁰

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε σημείο Σ εκτός αυτού για το οποίο ισχύει $O\Sigma = 2R$.

- Να εκφράσετε τη δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (O, R) ως συνάρτηση του R
Μονάδες 5
- Αν η δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (O, R) είναι ίση με 12 τότε να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου
Μονάδες 8
- Για $R=2\text{cm}$ θεωρούμε την ευθεία ΣAB η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B , έτσι ώστε $\Sigma A = 2AB$. Να βρεθεί το μήκος της χορδής AB .
Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 23⁰

Έστω κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά σημεία του A, B, Γ και Δ τέτοια ώστε να ισχύουν $AB = \lambda_6$, $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{2}$.



- Να δείξετε ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$

ΘΕΜΑ 24⁰

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 2\gamma$ και $\beta = \sqrt{7}\gamma$

- Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας B
- Δείξτε ότι $\mu_a = \sqrt{3}\gamma$
- Αν AE το ύψος του $AB\Gamma$ από την κορυφή A , δείξτε ότι $BE = \frac{1}{2}\gamma$

ΘΕΜΑ 25⁰

Στο σχήμα είναι $\Delta\Gamma = OA = R$, $OM = 7$ και $\Delta^M_{(O, R)} = 40$

- Να αποδείξετε ότι $R = 3$
- Να υπολογιστεί το $M\Gamma = x$
- Να υπολογίσετε τα εμβαδά $(OM\Gamma)$ και $(AM\Gamma)$

ΘΕΜΑ 26⁰

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Αν E είναι το μέσο της $A\Delta$ και η BE προεκτενόμενη τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z να δείξετε ότι:

- $BE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ Μονάδες 13
- $BE = 5EZ$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 1^ο

Σε κύκλο (Ο, 2) ορίζουμε διαδοχικά τόξα $AB = 60^\circ$ και $B\Gamma = 120^\circ$. Να δείξετε ότι:

A. $AB = R$, $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο Μονάδες 10

B. αν $A\Delta$ είναι η προβολή της καθέτου AB στην υποτείνουσα $A\Gamma$ τότε $A\Delta = 1$ Μονάδες 5

Γ. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(\widehat{OB\Gamma}) = \frac{4\pi}{3}$ τ. μ. και το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή $B\Gamma$, το τόξο $B\Gamma$ και δεν έχει κοινά σημεία με το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\varepsilon = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ τ. μ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν η διάμεσος AM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο Δ , να αποδείξετε ότι:

A. $AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ Μονάδες 7

B. $A\Delta = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$ Μονάδες 8

Γ. $(AB\Gamma) = 6(MB\Delta)$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 4$. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε κύκλο που τέμνει τη ΒΓ στο Μ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΜ γράφουμε κύκλο που τέμνει την ΑΓ στο Ν. Να βρείτε:

A. Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ. Μονάδες 15

B. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε κύκλο (Ο, R) με $R = 5\text{cm}$ φέρουμε διάμετρο ΒΓ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΓΕ = R = 5\text{cm}$. Από το Ε φέρουμε την εφαπτομένη ΕΗ. Να υπολογίσετε:

A. Την εφαπτομένη ΕΗ Μονάδες 5

B. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (ΟΓΗ) Μονάδες 10

Γ. Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΕΗ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται κανονικό εξάγωνο πλευράς 5m. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ίση με την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου φέρνω τόξο που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΖΑ στα Η και Θ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

- Α. Την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου Μονάδες 5
Β. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του μικτόγραμμου ΗΒΓΔΕΖΘ Μονάδες 10
Γ. Την περίμετρο του μικτόγραμμου σχήματος ΗΒΓΔΕΖΘ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4cm. Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

- Α. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΚΛ, όπου Κ το μέσο της ΒΓ και Λ μέσο της ΑΔ. Μονάδες 5
Β. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (ΚΜΒ) Μονάδες 10
Γ. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Από σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ = ΟΔ και φέρνουμε τη ΜΓ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- Α. $ΜΔ^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$ Μονάδες 8
Β. $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 2R^2 + 2ΟΔ^2$ Μονάδες 8
Γ. $ΜΓ \cdot ΓΕ = ΜΔ \cdot ΔΖ$ Μονάδες 9

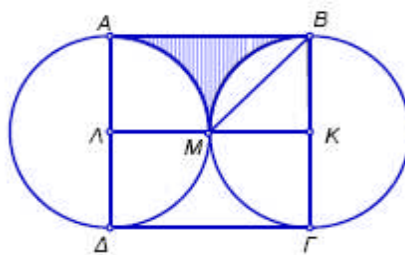
ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε $Δ_{(Ο, R)}^Γ = 3R^2$. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

- Α. Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = R$ και $ΓΕ = R\sqrt{3}$ Μονάδες 8
Β. Να αποδείξετε ότι $ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$ και να υπολογίσετε το τμήμα ΔΕ συναρτήσει του R Μονάδες 8
Γ. Αφού δείξετε ότι η γωνία ΑΓΔ = 30°, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΒΓΕ συναρτήσει του R. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 4cm με διαμέτρους AD , $B\Gamma$ γράφουμε τους κύκλους που εφάπτονται στο σημείο M , όπως φαίνεται στο σχήμα:



- A. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MKB Μονάδες 7
 B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $ABK\Lambda$ Μονάδες 6
 Γ. Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου AMB .

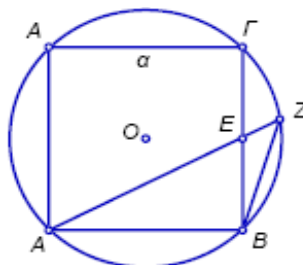
ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και τόξο $AB = 60^\circ$. Αν (K, ρ) είναι ο εγγεγραμμένος στον κυκλικό τομέα $\widehat{OAB}$ τότε:

- A. Να δείξετε ότι: $\rho = \frac{R}{3}$ Μονάδες 8
 B. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAB . Μονάδες 7
 Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ κυκλικού τομέα και κύκλου (K, ρ) .

ΘΕΜΑ 11^ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Αν E είναι το μέσον της $B\Gamma$ και η AE προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Z τότε:



- A. Να αποδείξετε ότι $AE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AEB σε συνάρτηση με την πλευρά a του τετραγώνου.
 B. Να αποδείξετε ότι $EZ = \frac{a\sqrt{5}}{10}$.
 Γ. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(EBZ)}{(EAB)}$ και να αποδείξετε ότι $(ABZ) = \frac{3a^2}{10}$

ΘΕΜΑ 12^ο

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$.

Να αποδείξετε ότι $a \cdot \beta' = a' \cdot \beta$.

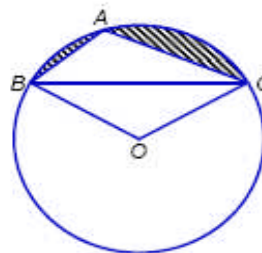
ΘΕΜΑ 13^ο

Σε κύκλο (O, R) το $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο με πλευρές $\alpha = 7, \beta = 5, \gamma = 3$.

- A. Να υπολογιστούν η γωνία A και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
B. Να αποδειχτεί ότι η ακτίνα του κύκλου είναι:

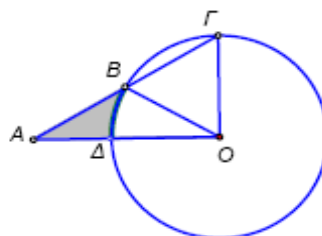
$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

- Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων τμημάτων $\tau_1 + \tau_2$



ΘΕΜΑ 14^ο

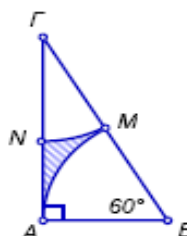
Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού ώστε $OA = R\sqrt{3}$. Φέρνουμε την τέμνουσα $AB\Gamma$ ώστε $AB = B\Gamma$



- A. Ναδειχθεί ότι $A\Gamma = 2R$
B. Ναδειχθεί ότι το τρίγωνο OAG είναι ορθογώνιο.
Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta B$,

ΘΕΜΑ 15^ο

Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $B = 60^\circ$ και $B\Gamma = a$. Με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο που τέμνει τη $B\Gamma$ στο M και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓM γράφουμε τόξο που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N.



- A. Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου AMN
B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AMN .

ΘΕΜΑ 16^ο

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AG . Η μεσοκάθετος της ακτίνας OA τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Δ.

- A. Να δείξετε ότι: $B\Delta = R\sqrt{3}$ Μονάδες 8
B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 8

- Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος συναρτήσει της R.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 17⁰

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Πάνω στην προέκταση της πλευράς BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Σ .

Αν η $\Sigma\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ να δείξετε:

A. $\frac{(\Sigma A\Gamma)}{(\Delta A\Gamma)} = \frac{\Sigma A}{AB}$ Μονάδες 10

B. $\frac{(\Sigma B\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{B\Sigma}{AB}$ Μονάδες 10

Γ. $\Sigma\Delta \cdot \Sigma\Gamma = \frac{9}{4}AB^2$. Να δείξετε ότι: $(AB\Gamma)^2 = \frac{4}{9}(A\Sigma\Gamma) \cdot (\Sigma B\Gamma)$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 18⁰

Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρος του AB . Δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ έχουν κοινό σημείο το E . Αν $R = 2\text{cm}$ και $\widehat{\Gamma AB} = 30^\circ$ και $\widehat{\Delta BA} = 45^\circ$, να αποδείξετε ότι:

A. Τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων είναι:
 $(\tau_1) = \pi - 2\text{cm}^2$ Μονάδες 7

$(\tau_2) = \frac{1}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})\text{cm}^2$ Μονάδες 8

B. Το εμβαδόν του τριγώνου AEB είναι:
 $(AEB) = 4(\sqrt{3} - 1)\text{cm}^2$ Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου $\Delta E\Gamma$ το (τ_3) Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 19⁰

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A > 90^\circ$, μήκη πλευρών $AB=5, A\Gamma=3$ και εμβαδόν

$$(AB\Gamma) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

α. Να υπολογίσετε τη γωνία A Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε τη πλευρά $B\Gamma$ Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο AM Μονάδες 7

δ. Να υπολογίσετε τις ακτίνες R και ρ του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αντίστοιχα Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 20⁰

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\gamma = 2, \beta = 1 + \sqrt{2}$ και εμβαδόν $(AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$

A. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha = \sqrt{3}$ Μονάδες 9

B. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 8

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς AB πάνω στη πλευρά $B\Gamma$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 21⁰

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 7$, $\beta = 6$ και $\gamma = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι $E = 6\sqrt{6}$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το ύψος του ν_β .

Μονάδες 5

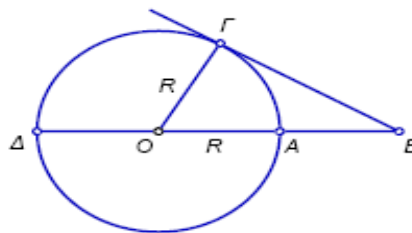
γ. Να βρείτε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 22⁰

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας $R = OA$. Στην προέκταση της ΟΑ προς το μέρος του Α παίρνουμε σημείο Β, τέτοιο ώστε $OA = AB$. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο



Α. Να δείξετε ότι $BG = R\sqrt{3}$.

Β. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση της ακτίνας R:

α. Την περίμετρο του μικτόγραμου τριγώνου ΑΒΓ.

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμου τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 23⁰

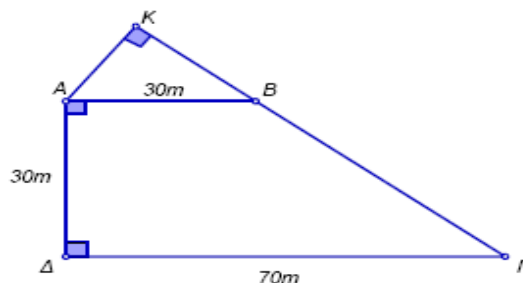
Οικόπεδο σχήματος τραπεζίου έχει

$AB = AD = 30m$, $\Delta\Gamma = 70m$, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

α. Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ

β. Αν το κόστος για την περίφραξή του είναι 10 € το μέτρο, πόσο στοιχίζει η περίφραξη του ΑΒΓΔ.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΚ του Α από τη ΒΓ.



ΘΕΜΑ 23⁰

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η πλευρά του ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, $AB = R$ και η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ζ, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = R\sqrt{3}$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $BM = \frac{R \cdot \sqrt{7}}{2}$

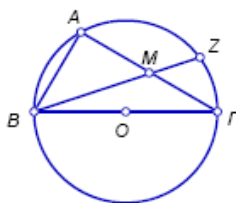
Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι $7MZ = 3MB$

Μονάδες 8

δ. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(AMB)}{(ZMG)}$

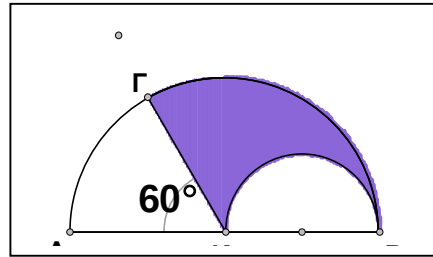
Μονάδες 6



ΘΕΜΑΤΑ... ..ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας του διπλανού σχήματος

αν $(AB) = 4 \text{ cm}$.



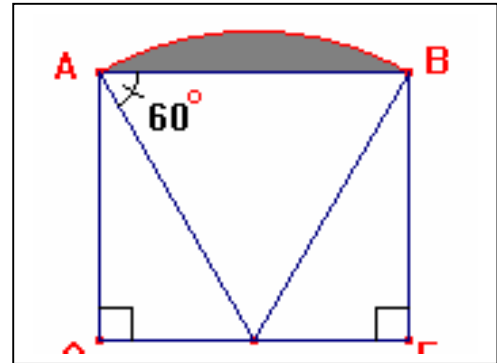
2. Στο διπλανό σχήμα το $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο με πλευρά

$AD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Το σημείο E είναι το μέσο της $ΔΓ$.

Με κέντρο το E και ακτίνα AE γράφουμε τόξο

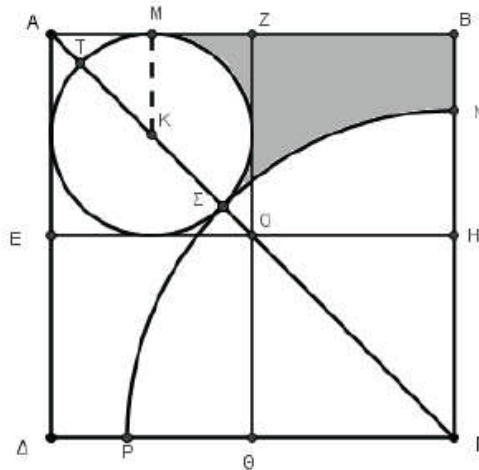
AB όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η γωνία $E\hat{A}B = 60^\circ$

να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου



3.

Στο τετράγωνο $ABΓΔ$ με πλευρά $4a$, τα σημεία E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των πλευρών AD , AB , $BΓ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Φέρουμε τη διαγώνιο $ΑΓ$ και τα τμήματα $ΕΗ$ και $Ζ\Theta$. Ο κύκλος (K, ρ) είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο $AZOE$ και εφάπτεται της AZ στο M . Ο κύκλος με κέντρο το Γ εφάπτεται του (K, ρ) στο σημείο Σ και τέμνει τις πλευρές $BΓ$ και $ΔΓ$ στα σημεία N και P αντίστοιχα. Να βρείτε τη περίμετρο και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας $MBN\Sigma$ συναρτήσει του a .



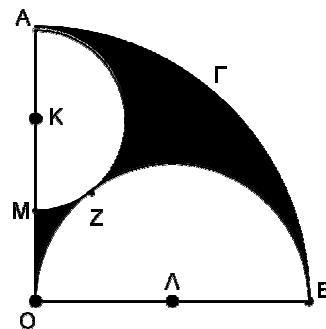
4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται $ΟΑΓΒ$ τεταρτοκύκλιο

με κέντρο O και ακτίνα $2a$ και τα ημικύκλια με

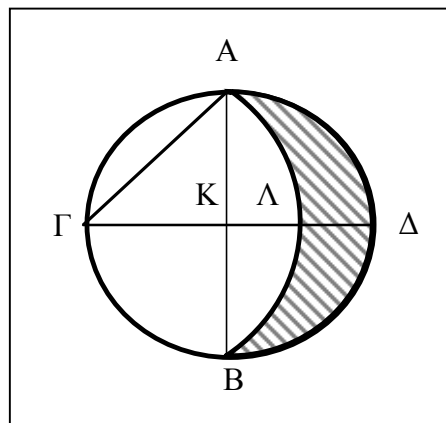
διαμέτρους OB και AM . Αν τα ημικύκλια εφάπτονται

στο Z , να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης

περιοχής συναρτήσει του a .



5. Στον κύκλο (K, R) οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$, είναι μεταξύ τους κάθετες. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα την ΓA , φέραμε τόξο $A\Lambda B$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου $A\Delta B\Lambda$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

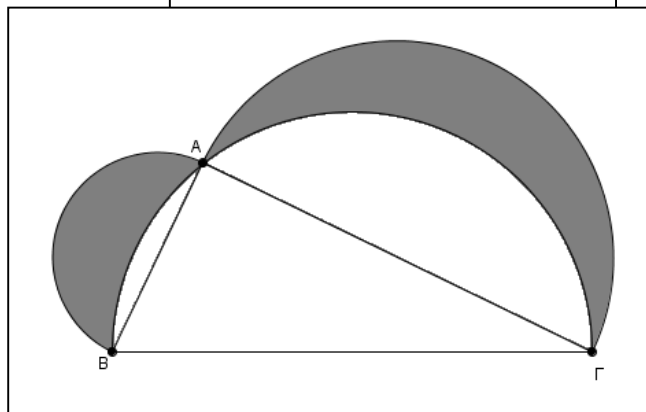


6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο

τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διαμέτρους $B\Gamma, AB$

και $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$.

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

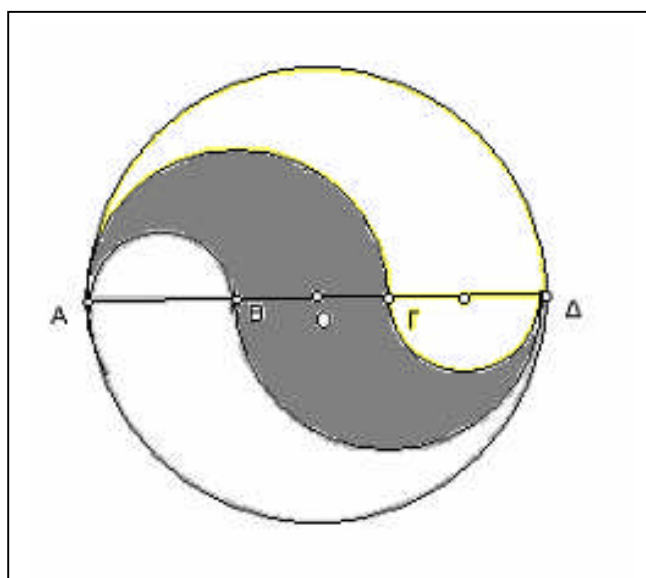


7. Στη διάμετρο $A\Delta$ κύκλου $(O, 6a)$ παίρνουμε $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta$. Γράφοντας τα ημικύκλια με διαμέτρους $AB, \Gamma\Delta$ εκατέρωθεν της διαμέτρου

και τα ημικύκλια με διαμέτρους $B\Delta$ και $A\Gamma$ με όμοιο

τρόπο προκύπτει το πιο κάτω σχήμα. Να δείξετε

ότι $E_1 = E_2 = E_3$



8. Δίνεται AOB τεταρτοκύκλιο ακτίνας $2a$.

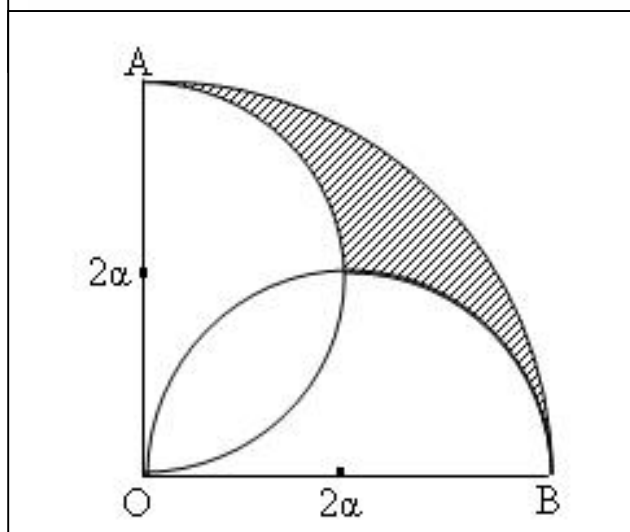
Με διαμέτρους τις OA και OB γράφουμε

ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο

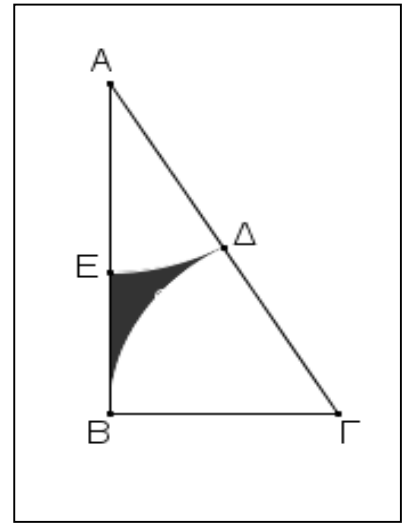
όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το

εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας

συναρτήσει του a .

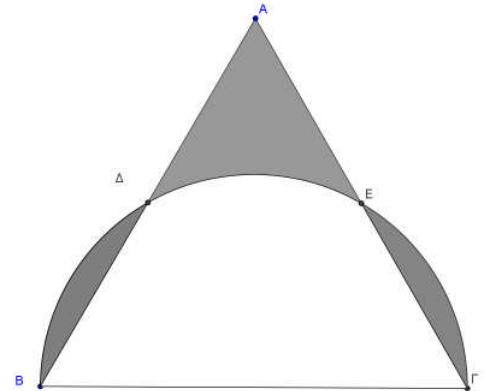


9. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{B} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 4 \text{ cm}$. Με κέντρο το Γ και ακτίνα $B\Gamma$ γράφουμε το τόξο $B\Delta$ και με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε το τόξο ΔE . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $B\Delta E$.

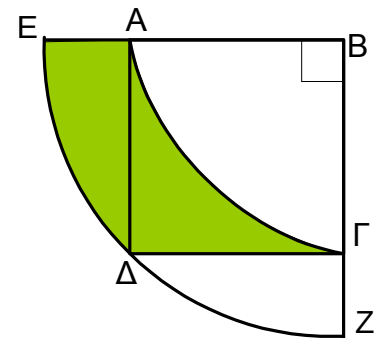


10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a . Με διάμετρο την $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο προς μέρος του A . Να υπολογίσετε

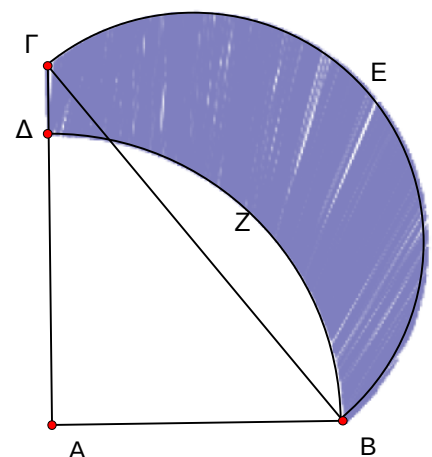
1. το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους
2. την περίμετρο του μη γραμμοσκιασμένου μέρους $B\Delta E\Gamma$.



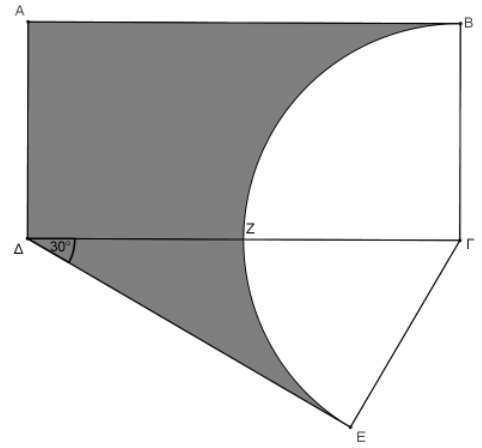
11. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς 3 cm . Με κέντρο την κορυφή B γράφουμε δύο τεταρτοκύκλια. Το ένα με ακτίνα BE και το άλλο με ακτίνα AB . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



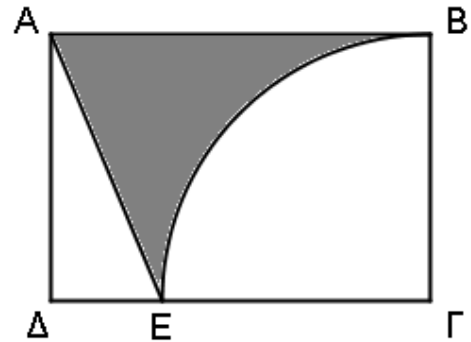
12. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$, $AB = 42 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 56 \text{ cm}$. Με διάμετρο την $B\Gamma$ σχηματίζουμε ημικύκλιο έξω από το τρίγωνο και με κέντρο το A και ακτίνα την AB σχηματίζουμε τεταρτοκύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου σχήματος $\Delta ZBE\Gamma\Delta$.



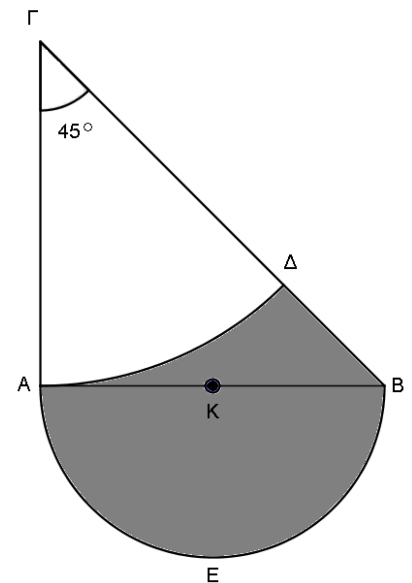
13. Στο διπλανό σχήμα δίνεται $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο, $\Gamma E\Delta$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 30^\circ$ και $\Delta E = 8\sqrt{3} \text{ cm}$. Επίσης, BZE κυκλικός τομέας με κέντρο Γ .
- (α) Να δείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τομέα είναι 8 cm .
- (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



14. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $AB = 17 \text{ cm}$ και $AD = 12 \text{ cm}$. Το τόξο $\widehat{BE}$ γράφεται με κέντρο Γ και ακτίνα την πλευρά $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:
 $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$, $A\Gamma = 4 \text{ cm}$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $\widehat{A\Delta}$ τόξο κύκλου που γράφεται με κέντρο Γ και ακτίνα την πλευρά $A\Gamma$.
 Το τόξο $\widehat{AEB}$ είναι ημικύκλιο με διάμετρο την AB .
 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



16. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 8 \text{ cm}$ και χορδή $B\Delta = \lambda_6$. Αν η ακτίνα $O\Gamma$ είναι διχοτόμος τη γωνίας $\Delta O\Delta$ να δείξετε ότι:

(α) $E_1 - E_2 = E_{\text{κυκλικού τομέα } \Delta O\Gamma}$

(β) $E_{\text{τριγώνου } \Delta B\Delta} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$

