Βιβλιομάθημα 2

• Η έννοια της μεταβλητής
• Η έννοια της εξίσωσης

Τι ονομάζεται μεταβλητή; Γράψτε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής τις εκφράσεις:

α. το πενταπλάσιο ενός αριθμού

β. το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 7.

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σ' ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου, δηλώνουμε το στοιχείο αυτό με ένα γράμμα. Το γράμμα αυτό ονομάζεται **μεταβλητή**.

α. Παριστάνουμε με x τον αριθμό που μας ενδιαφέρει. Τότε το πενταπλάσιο του αριθμού αυτού είναι $5\cdot x$

β. Παριστάνουμε με α το ζητούμενο αριθμό. Τότε η έκφραση μας γράφεται: $2\cdot\alpha+7$

Στην πράξη γράφουμε $5x$, $2\alpha+7$ (χωρίς την τελεία δηλαδή)

Συνήθως οι μεταβλητές παριστάνονται με γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου.

Τι ονομάζεται εξίσωση και τι άγνωστος της εξίσωσης.

Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή.

Η μεταβλητή ονομάζεται **άγνωστος** της εξίσωσης.

• Αν στη θέση της μεταβλητής βάλουμε έναν αριθμό και προκύπτει ισότητα που αληθεύει τότε λέμε ότι ο αριθμός αυτός **επαληθεύει** την εξίσωση.

• Ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται **λύση ή ρίζα** της εξίσωσης.

• Η παράσταση που βρίσκεται αριστερά απο το ίσον (=) λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης ενώ η παράσταση που βρίσκεται δεξιά από το ίσον (=) λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης.

$$\underbrace{x+3}_{1^{o}\ \text{μέλος}}=\underbrace{12}_{2^{o}\ \text{μέλος}}$$

1. Μεταβλητή ονομάζεται το γράμμα που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

2. Εξίσωση είναι μια ισότητα με αριθμούς και μια μεταβλητή που λέγεται άγνωστος της εξίσωσης.

3. Μια εξίσωση που δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του αγνώστου λεγεται **αδύνατη**.

4. Μια εξίσωση που αληθεύει για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ο άγνωστος λεγεται **ταυτότητα**.

1 **Να εκφράσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:**

α. Την περίμετρο ενός ρόμβου.

β. Τη διάμετρο ενός κύκλου σε σχέση με την ακτίνα του.

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου, όπου η βάση είναι 8 εκατοστά.

Λύση

α. Είναι $4\cdot x$, όπου x είναι η πλευρά του ρόμβου, γιατί όπως ξέρουμε για να βρούμε την περίμετρο ενός ρόμβου προσθέτουμε τις πλευρές του, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους ή πολλαπλασιάζουμε την πλευρά του με το 4.

β. Είναι $2\cdot x$, όπου x είναι η ακτίνα του κύκλου, αφού η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας.

γ. Είναι $8\cdot\frac{x}{2}$, όπου x είναι το ύψος του τριγώνου, αφού ξέρουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι $E_{τρ.} = β \cdot \frac{υ}{2}$.

2 **Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω εκφράσεις:**

α. $x + 2 = 7$ **β.** $2 \cdot x = 6$ **γ.** $3 > x + 1$ **δ.** $7 \cdot x + 3 = 24$

Λύση

α. Ένας αριθμός όταν αυξηθεί κατά 2, ισούται με 7.
β. Το διπλάσιο ενός αριθμού ισούται με το 6.
γ. Το 3 είναι μεγαλύτερο ενός αριθμού, αυξημένου κατά μονάδα.
δ. Το εφταπλάσιο ενός αριθμού όταν αυξηθεί κατά 3, ισούται με 24.

3 **Δίνονται οι εξισώσεις: $x + 5 = 8$ και $2x = 6$. Αν η μεταβλητή x μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 3 να βρεθεί ποιά τιμή του x επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.**

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $3+5=8$ και $2 \cdot 3=6$.

Άρα η τιμή $x=3$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

4 **Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της πρώτης στήλης με τους αριθμούς της δεύτερης στήλης, ώστε οι αριθμοί της πρώτης στήλης να είναι λύσεις των εξισώσεων της δεύτερης στήλης.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. 4	**1.** $x+5=6$
β. 1	**2.** $2 \cdot x=4$
γ. 2	**3.** $24 : x=6$
δ. 7	**4.** $29-x=22$

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $1+5=6$, οπότε το β αντιστοιχίζεται στο 1, δηλαδή $β \to 1$

Είναι $2 \cdot 2=4$, οπότε το γ αντιστοιχίζεται στο 2, δηλαδή $γ \to 2$

Είναι $24:4=6$, οπότε το α αντιστοιχίζεται στο 3, δηλαδή $α \to 3$

Είναι $29-7=22$, οπότε το δ αντιστοιχίζεται στο 4, δηλαδή $δ \to 4$

5 **Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

α. Η λύση της εξίσωσης $x : 6 = 2$ είναι: Α. 3, Β. 12, Γ. 4, Δ. 6

β. Η λύση της εξίσωσης $5 \cdot x = 5$ είναι: Α. 5, Β. 0, Γ. 1, Δ. 2

Λύση

α. Επιλέγουμε το Β γιατί $12:6=2$

β. Επιλέγουμε το Γ γιατί $5 \cdot 1=5$

6 **“Είμαι 13 χρονών και ο παππούς μου έχει 6 φορές τα χρόνια μου”. Διατυπώστε με μορφή εξίσωσης την παραπάνω πρόταση και βρείτε την ηλικία του παππού.**

Λύση

Έστω x η ηλικία του παππού. Τότε, έχουμε: $x=6 \cdot 13$ δηλαδή $x=78$ χρονών. Άρα ο παππούς είναι 78 χρονών.

7 **Να γραφεί το παρακάτω πρόβλημα με μορφή εξίσωσης και να βρεθεί η λύση: “Το τετραπλάσιο ενός αριθμού είναι 40”**

Λύση

Έστω x ο αριθμός. Τότε $4 \cdot x=40$. Άρα $x=10$, αφού $4 \cdot 10=40$.

8 **Το εμβαδό ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου είναι 200 τετραγωνικά μέτρα. Να βρεθεί το πλάτος του, αν το μήκος του είναι 20 μέτρα.**

Λύση

Έστω x μέτρα το πλάτος του. Τότε $20 \cdot x=200$. Τότε $x=10$ μέτρα, αφού $20 \cdot 10=200$.

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Η λύση της εξίσωσης $x+3=7$ είναι: **Α.** 1, **Β.** 2, **Γ.** 3, **Δ.** 4

ii. Το 3 είναι λύση της εξίσωσης: **Α.** $x+2=7$, **Β.** $3 \cdot x=9$, **Γ.** $25:x=3$, **Δ.** $x+1=0$

2. Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της πρώτης στήλης με τους αριθμούς της δεύτερης ώστε οι αριθμοί της δεύτερης στήλης να αποτελούν λύσεις των εξισώσεων της πρώτης στήλης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $3 \cdot x = 9$	**1.** 5
β. $25 : x = 5$	**2.** 7
γ. $3 + x = 10$	**3.** 8
δ. $17 - x = 9$	**4.** 3

3. Είναι σωστό ή λάθος ότι:
α. Η λύση της εξίσωσης $5 \cdot x = 0$, είναι το 0.
β. Η λύση της εξίσωσης $5 : x = 1$, είναι το 1.
γ. Η λύση της εξίσωσης $5 - x = 1$, είναι το 0.

4. Να βρεθεί ποιοι από τους αριθμούς 0, 1, 2 είναι λύσεις των εξισώσεων:
α. $x + 1 = 2$ **β.** $3 \cdot x = 0$ **γ.** $6 \cdot x = 14 - 2$ **δ.** $6 : x = 3$

5. “Το τριπλάσιο ενος αριθμού είναι το 45”. Να εκφράσετε με μορφή εξίσωσης την παραπάνω πρόταση και να βρείτε τον αριθμό αυτό.

6. Το $\frac{1}{2}$ ενός αριθμού είναι το 3. Να γράψετε με μορφή εξίσωσης την παραπάνω πρόταση και να βρείτε τον αριθμό αυτό.

7. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 20 εκατοστά. Αν η περίμετρος είναι το τετραπλάσιο της πλευράς, πόσο είναι το μήκος της πλευράς;

8. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 75τ.μ. Αν το πλάτος του είναι 5 μέτρα, να βρεθεί το μήκος του.

9. Η ηλικία ενός ανθρώπου είναι 180 μηνών. Είναι γέρος; Πόσο χρονών είναι;

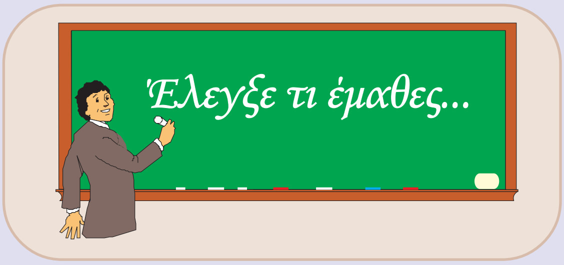
10. Ένα αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα 150χλμ. την ώρα. Σε 3 ώρες πόση απόσταση θα διανύσει; (απόσταση (S) = Ταχύτητα (υ) · Χρόνο (t))

11. Δίνονται οι εξισώσεις: $\alpha - 2 = 5$ και $\alpha + 3 = 4$. Αν η μεταβλητή α μπορεί να πάρει τις τιμές 3, 4 και 7 να βρεθεί ποιά τιμή του α επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις;

12. Για ποιά τιμή του άρτιου φυσικού αριθμού α είναι αληθής η εξίσωση:

$$3 \cdot \alpha + 2 = 14$$

13. Δίνονται οι εξισώσεις $\alpha + 3 = \beta$ και $\alpha + \beta = 5$. Αν η μεταβλητή α μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 2 ενώ η β τις τιμές 3 και 4 ποιο ζεύγος τιμών των α, β επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις;



Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε εξίσωση, τι άγνωστο της εξίσωσης και τι λύση της εξίσωσης;

Ερώτηση 2

Στην παρακάτω εξίσωση $x+3=7$, ποιο είναι το πρώτο μέλος, ποιο το δεύτερο μέλος και ποια η λύση της;

Ερώτηση 3

Πώς λέγεται μια εξίσωση που δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του αγνώστου και πώς λέγεται μια εξίσωση αν επαληθεύεται για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ο άγνωστος;

Άσκηση 1

Να εκφραστεί με μεταβλητές η περίμετρος και το εμβαδόν τετραγώνου.

Άσκηση 2

Να εκφράσετε με λέξεις (περιφραστικά) τις παρακάτω σχέσεις:

α. $x<x+2$ **β.** $2\alpha+1=7$

γ. $3\alpha<2\beta+1$ **δ.** $x<y+\omega$

Βιβλιομάθημα 3

• Πρόσθεση φυσικών και δεκαδικών
• Αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών
• Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών

Τι λέγεται άθροισμα δύο ή περισσότερων αριθμών; Ποιο είναι οι προσθετέοι σ'ενα άθροισμα;

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται **άθροισμα** των αριθμών αυτών. Οι αριθμοί που προστίθενται λέγονται **προσθετέοι** του αθροίσματος.

• Όταν προσθέτουμε φυσικούς φροντίζουμε στην κατακόρυφη τοποθέτηση οι μονάδες να βρίσκονται κάτω από τις μονάδες, οι δεκάδες κάτω από τις δεκάδες κ.ο.κ.

• Όταν προσθέτουμε δεκαδικούς φροντίζουμε στην κατακόρυφη τοποθέτηση οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη.

χιλιάδες
εκατοντάδες
δεκάδες
μονάδες

$$\begin{array}{r} 37 \\ 125 \\ +\ 7698 \\ \hline 7860 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,37 \\ 19,24 \\ \hline 22,61 \end{array}$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης;

Αν α, β, γ οι προσθετέοι σ'ένα άθροισμα τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αντιμεταθετική**.

π.χ. $50+34=84$ ή $34+50=84$.

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **προσεταιριστική**.

π.χ. $15+32+9=(15+32)+9=47+9=56$ ή

$15+32+9=15+(32+9)=15+41=56$

$$\alpha+0=\alpha$$

Αν σε οποιοδήποτε αριθμό προσθέσουμε το μηδέν τότε αυτός δεν αλλάζει.

π.χ. $17+0=17$

Τι είναι αφαίρεση;

$$\begin{array}{r} 2003 \\ -\ 1960 \\ \hline 43 \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathrm{M} \\ \mathrm{A} \\ \hline \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ +\ 43 \\ \hline 2003 \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \Delta \\ \hline \mathrm{M} \end{array}$$

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί Μ (μειωτέος), Α (αφαιρετέος), βρίσκουμε ένα αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στον αφαιρετέο δίνει άθροισμα το μειωτέο. Έτσι σε κάθε αφαίρεση έχουμε:

$$\boxed{\mathrm{M}-\mathrm{A}=\Delta \quad \text{γιατί} \quad \mathrm{A}+\Delta=\mathrm{M}}$$

• Για να είναι δυνατή μια αφαίρεση, πρέπει ο μειωτέος να είναι μεγαλύτερος ή τουλάχιστον ίσος με τον αφαιρετέο.

Παράδειγμα: $125-39=86$
$\mathrm{M}=125>\mathrm{A}=39$

• Όπως και στην πρόσθεση έτσι και στην αφαίρεση δεκαδικών πρέπει να προσέχουμε οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη.

Παράδειγμα $\begin{array}{r} 13,90 \\ -\ 2,36 \\ \hline 11,54 \end{array}$

Πολλαπλασιασμός

Τι ονομάζεται πολλαπλασιασμός και τι γινόμενο δύο αριθμών; Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 10 ή 100 ή 1000 κλπ; Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 0,1 ή 0,01 ή 0,001 κλπ.;

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία όταν δίνονται δύο αριθμοί α και β βρίσκουμε έναν αριθμό που είναι το άθροισμα α προσθετέων ίσων με το β δηλαδή:

$$\alpha\cdot\beta=\underbrace{\beta+\beta+\beta+\ldots+\beta}_{\alpha\ \text{προσθετέοι}}$$

Παράδειγμα

π.χ. $352 \cdot 100 = 35200$

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των α και β λέγεται **γινόμενο** των α, β και οι α, β λέγονται **όροι** του γινομένου.

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό α με 10, 100, 1000 κ.λ.π., αρκεί να γράψουμε δεξιά του α ένα, δύο, τρία κ.λ.π. μηδενικά αντιστοίχως.

Παράδειγμα

π.χ. $48,25 \cdot 10 = 482,5$

$2,39 \cdot 1000 = 2390$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό αριθμό με το 10, 100, 1000 κ.λ.π., αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή του προς τα δεξιά μία ή δύο ή τρεις κλπ. θέσεις αντιστοίχως. Όταν η υποδιαστολή φτάσει στο τέλος του δεκαδικού και χρειάζεται να μεταφερθεί ακόμη, τις υπόλοιπες αυτές θέσεις τις συμπληρώνουμε με μηδενικά.

• Ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και ο πολλαπλασιασμός των φυσικών αριθμών, μόνο που στο αποτέλεσμα χωρίζουμε με υποδιαστολή από τα δεξιά προς τα αριστερά τόσα ψηφία, όσα δεκαδικά ψηφία έχουν και οι δύο παράγοντες.

• Στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο δύο μεταβλητών ή γινόμενο αριθμού με μεταβλητή, συνήθως παραλείπεται το σύμβολο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή η τελεία.

π.χ. $5α$ αντί $5 \cdot α$

Όταν όμως έχουμε γινόμενο αριθμών, η τελεία δεν θα παραλείπεται γιατί υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

π.χ. $5 \cdot 7$ και όχι 57

• Σε αριθμητικές παραστάσεις που εμφανίζονται πολλαπλασιασμοί με προσθέσεις ή αφαιρέσεις, κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με τη σειρά που είναι σημειωμένες.

Παράδειγμα

π.χ. $27 \cdot 0,01 = 0,27$

$32,04 \cdot 0,1 = 3,204$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό ή δεκαδικό αριθμό με 0,1 ή 0,01 ή 0,001 κλπ αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή του προς τα αριστερά μία ή δύο ή τρεις κλπ θέσεις αντιστοίχως. Για τους πολλαπλασιασμούς αυτούς μπορούμε να θεωρούμε τους φυσικούς ως δεκαδικούς με μηδενικό δεκαδικό μέρος.

Ιδιότητες Πολ/σμου

Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

Αν α, β, γ οι όροι σ'ένα γινόμενο τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\boldsymbol{\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha}$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αντιμεταθετική**.

π.χ. $4\cdot 15=60$

$15\cdot 4=60$

$$\boldsymbol{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **προσεταιριστική**.

π.χ. $3\cdot 7\cdot 10=(3\cdot 7)\cdot 10=21\cdot 10=210$ ή

$3\cdot 7\cdot 10=3\cdot(7\cdot 10)=3\cdot 70=210$

$$\boldsymbol{\alpha\cdot 1=\alpha}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε οποιονδήποτε αριθμό με το 1 αυτός δεν αλλάζει.

$$\boldsymbol{\alpha\cdot 0=0}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε οποιονδήποτε αριθμό με το 0, τότε το γινόμενο αυτό είναι ίσο με το μηδέν.

1. Άθροισμα λέγεται το αποτέλεσμα της πρόσθεσης.

2. Στην αφαίρεση ισχύει:

Μειωτέος – Αφαιρετέος = Διαφορά

γιατί

Διαφορά + Αφαιρετέος = Μειωτέος

3. Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε προσέχουμε την κατακόρυφη τοποθέτηση των αριθμών.

4. Γινόμενο λέγεται το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.

5. Στον πολλαπλασιασμό δεκαδικών δεν μας ενδιαφέρει η κατακόρυφη τοποθέτηση τους αρκεί στο αποτέλεσμα να χωρίσουμε από τα δεξιά τόσα δεκαδικά ψηφία όσα έχουν οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε.

6. Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού, η τελεία, παραλείπεται όταν έχουμε γινόμενο μεταβλητών ή γινόμενο αριθμού με μεταβλητή. π.χ. $3\cdot x=3x$, $\alpha\beta=\alpha\cdot\beta$

7. Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού είναι απαραίτητο όταν πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς. π.χ. $3\cdot 5$ και όχι 35

1 **Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:**

α. $\mathbf{92+39}$ **β.** $\mathbf{673+89}$ **γ.** $\mathbf{6,32+29,2}$

δ. $\mathbf{1325,6+7,2}$ **ε.** $\mathbf{0,062+6,32}$ **στ.** $\mathbf{9,72+2,3}$

Λύση

α. $92+39=131$ **β.** $673+89=762$ **γ.** $6,32+29,2=35,52$

δ. $1325,6+7,2=1332,8$ **ε.** $0,062+6,32=6,382$ **στ.** $9,72+2,3=12,02$

2 **Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:**

α. $\mathbf{632+6,32+0,632+63,2}$ **β.** $\mathbf{723+0,72+723,9+7,23}$

γ. $\mathbf{0,937+65+8,9+72,25}$

Λύση

α. $\begin{array}{r} 632,0 \\ 6,32 \\ 0,632 \\ +63,2 \\ \hline 702,152 \end{array}$ **β.** $\begin{array}{r} 723 \\ 0,72 \\ 723,9 \\ +\ 7,23 \\ \hline 1454,85 \end{array}$ **γ.** $\begin{array}{r} 0,937 \\ 65 \\ 8,9 \\ +72,25 \\ \hline 147,087 \end{array}$

3 **Να υπολογίσετε με τον πιο εύκολο τρόπο τα παρακάτω αθροίσματα:**

α. $\mathbf{159.500+997.000+3.000}$ **β.** $\mathbf{4.400.000+630.000+5.600.000}$

Λύση

α. Ο πιο απλός τρόπος για να υπολογίσουμε το άθροισμα είναι να βρούμε πρώτα το άθροισμα $997.000+3.000=1.000.000$ και μετά το άθροισμα:

$$1.000.000+159.500=1.159.500.$$

Σημειώνουμε τις πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned} 1.159.500+997.000+3.000 &= 159.500+(997.000+3.000) \\ &= 159.500+1.000.000 \\ &= 1.159.500 \end{aligned}$$

β. $4.400.000 + 630.000 + 5.600.000 =$

$(4.400.000 + 5.600.000) + 630.000 =$

$10.000.000 + 630.000 = 10.630.000$

4 **Να αντικατασταθούν τα κουτάκια με τα κατάλληλα ψηφία ώστε να είναι σωστές οι σημειωμένες πράξεις.**

α.
```
   732□5
+ 43□967
  5□125□
```

β.
```
    84470
+ □□□□□□□
 10077037
```

γ.
```
  3,2□8
+ □,□97
  12,67
```

δ.
```
  9□,632
+   5,7□8
 □□3,□3□
```

Λύση

α.
$$\begin{array}{r} 732\mathbf{8}5 \\ +\ 43\mathbf{7}967 \\ \hline 5\mathbf{1}125\mathbf{2} \end{array}$$

β.
$$\begin{array}{r} 84470 \\ \mathbf{9992567} \\ \hline 10077037 \end{array}$$

γ.
$$\begin{array}{r} 3,2\mathbf{7}8 \\ +\ \mathbf{9},\mathbf{3}97 \\ \hline 12,67\mathbf{5} \end{array}$$

δ.
$$\begin{array}{r} 9\mathbf{7},632 \\ +\ 5,7\mathbf{9}8 \\ \hline \mathbf{10}3,\mathbf{4}3\mathbf{0} \end{array}$$

5 **Τα παρακάτω τετράγωνα είναι μαγικά. Δηλαδή στα τετράγωνα αυτά τα αθροίσματα των αριθμών κάθε γραμμής, κάθε στήλης άλλα και κάθε διαγωνίου είναι ίσα μεταξύ τους. Συμπληρώστε τα κενά, ώστε να ισχύει το παραπάνω.**

α.

6		
	7	
9		8

β.

10		
5	9	
12		

α.

6	**10**	**5**
6	7	**8**
9	**4**	8

β.

10	**11**	**6**
5	9	**13**
12	**7**	**8**

Λύση

6 **Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:**

α. $63 - 12$ **β.** $6,9 - 3,2$ **γ.** $6,72 - 2,39$

δ. $5.232,5 - 2.351,6$ **ε.** $739,2 - 67,9$ **στ.** $620 - 5,39$

Λύση

α. $\begin{array}{r} 63 \\ -12 \\ \hline 51 \end{array}$ **β.** $\begin{array}{r} 6,9 \\ -3,2 \\ \hline 3,7 \end{array}$ **γ.** $\begin{array}{r} 6,72 \\ -2,39 \\ \hline 4,33 \end{array}$ **δ.** $\begin{array}{r} 5.232,5 \\ -2.351,6 \\ \hline 2880,9 \end{array}$ **ε.** $\begin{array}{r} 739,2 \\ -\ 67,9 \\ \hline 671,3 \end{array}$ **στ.** $\begin{array}{r} 620,00 \\ -\ 5,39 \\ \hline 614,61 \end{array}$

7 **Να βρείτε τον αριθμό που επαληθεύει καθεμία από τις εξισώσεις:**

α. $7,32 + x = 9,76$ **β.** $x + 9,2 = 13,25$

γ. $218,3 + x = 927,5$ **δ.** $x + 6,35 = 9,63$

Λύση

α. $x = 9,76 - 7,32 = 2,44$ **β.** $x = 13,25 - 9,2 = 4,05$

γ. $x = 927,5 - 218,3 = 709,2$ **δ.** $x = 9,63 - 6,35 = 3,28$

8 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.**

μειωτέος	63,25		93,25
αφαιρετέος	28,3	26,2	
υπόλοιπο διαφορά		47,08	86,2

Λύση

μειωτέος	63,25	**73,28**	93,25
αφαιρετέος	28,3	26,2	**7,05**
υπόλοιπο διαφορά	**34,95**	47,08	86,2

Τα παραπάνω προκύπτουν από τις εξής πράξεις:

$\begin{array}{r} 63,25 \\ -\ 28,3 \\ \hline 34,95 \end{array}$ $\begin{array}{r} 47,08 \\ +\ 26,20 \\ \hline 73,28 \end{array}$ $\begin{array}{r} 93,25 \\ -\ 7,05 \\ \hline 86,20 \end{array}$

⑨ Να αντικατασταθούν τα παρακάτω κουτάκια με τα κατάλληλα ψηφία:

α. $\begin{array}{r} 69,\square 28 \\ -\ 2,6\square 9 \\ \hline 6\square,08\square \end{array}$ **β.** $\begin{array}{r} 8\square,6\square 2 \\ -\ 7,78\square \\ \hline 74,\square 43 \end{array}$

γ. $\begin{array}{r} 163,50 \\ -\ \square 8,\square 2 \\ \hline 13\square,7\square \end{array}$ **δ.** $\begin{array}{r} 27\square,86 \\ -\ \square 9,6\square \\ \hline 172,\square 3 \end{array}$

Λύση

α. $\begin{array}{r} 69,\mathbf{7}28 \\ -\ 2,63\mathbf{9} \\ \hline 67,08\mathbf{9} \end{array}$ **β.** $\begin{array}{r} 82,6\mathbf{3}2 \\ -\ 7,78\mathbf{9} \\ \hline 74,843 \end{array}$

γ. $\begin{array}{r} 163,50 \\ -\ 28,72 \\ \hline 13\mathbf{4},7\mathbf{8} \end{array}$ **δ.** $\begin{array}{r} 27\mathbf{1},86 \\ -\ \mathbf{9}9,6\mathbf{3} \\ \hline 172,\mathbf{2}3 \end{array}$

⑩ Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α. $6,32\cdot 8,2$ **β.** $1801\cdot 5,2$ **γ.** $697,2\cdot 0,3$

δ. $1,05\cdot 62$ **ε.** $82\cdot 67,3$ **στ.** $0,01\cdot 7,63$

Λύση

α. $\begin{array}{r} 6,32 \\ \times\ 8,2 \\ \hline 1264 \\ +5056 \\ \hline 51,824 \end{array}$ **β.** $\begin{array}{r} 1801 \\ \times\ 5,2 \\ \hline 3602 \\ 9005 \\ \hline 9365,2 \end{array}$ **γ.** $\begin{array}{r} 697,2 \\ \times\ 0,3 \\ \hline 20916 \\ 00000 \\ \hline 209,16 \end{array}$ **δ.** $\begin{array}{r} 1,05 \\ \times\ 62 \\ \hline 210 \\ +630 \\ \hline 65,10 \end{array}$ **ε.** $\begin{array}{r} 67,3 \\ \times\ 82 \\ \hline 1346 \\ +5384 \\ \hline 5518,6 \end{array}$

στ. $0,01\cdot 7,63 = 0,0763$ γιατί όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με 0,1 ή 0,01 ή 0,001 κλπ μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά μια ή δύο ή τρεις κτλ. θέσεις αντιστοίχως. Στην περίπτωση αυτή μεταφέρουμε την υποδιαστολή δύο θέσεις αριστερά.

⑪ Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α. $62\cdot 9 - 12 + 5\cdot 2$ **β.** $8\cdot 7 + 9\cdot(32 - 8)$

γ. $63 - 9\cdot 3 + 8\cdot 7$ **δ.** $6\cdot 2,37\cdot 3\cdot 5$

Λύση

Κάνουμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις, μετά τους πολλαπλασιασμούς και στο τέλος τις προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη σειρά που είναι σημειωμένες.

α. $62 \cdot 9 - 12 + 5 \cdot 2 = 558 - 12 + 10 = 546 + 10 = 556$

β. $8 \cdot 7 + 9 \cdot (32 - 8) = 8 \cdot 7 + 9 \cdot 24 = 56 + 216 = 272$

γ. $63 - 9 \cdot 3 + 8 \cdot 7 = 63 - 27 + 56 = 36 + 56 = 92$

δ. $6 \cdot 2,37 \cdot 3 \cdot 5 = (6 \cdot 2,37) \cdot (3 \cdot 5) = 14,22 \cdot 15 = 213,3$

⑫ Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων, εφαρμόζοντας τους κανόνες πολλαπλασιασμού με 10, 100, 1000 ... η 0,1, 0,01, 0,001 κτλ.

α. $\mathbf{83000 \cdot x = 83}$ **β.** $\mathbf{63,821 \cdot x = 638,21}$ **γ.** $\mathbf{100 \cdot x = 82,5}$

δ. $\mathbf{x \cdot 0,01 = 72,25}$ **ε.** $\mathbf{52 \cdot x = 5,2}$ **στ.** $\mathbf{x \cdot 0,1 = 65}$

Λύση

α. $83.000 \cdot 0,001 = 83$, δηλαδή $x = 0,001$

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με 0,001 μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά 3 θέσεις. Επειδή στο 83.000 δεν υπάρχει υποδιαστολή, μπορούμε να τη βάλουμε στο τέλος και να γίνει 83.000,0. Άρα μεταφέροντας την υποδιαστολή 3 θέσεις αριστερά το 83.000,0 γίνεται 83 οπότε:

β. $63,821 \cdot 10 = 638,21$ οπότε $x = 10$

γ. $100 \cdot 0,825 = 82,5$ οπότε $x = 0,825$

δ. $7225 \cdot 0,01 = 72,25$ οπότε $x = 7225$

ε. $52 \cdot 0,1 = 5,2$ οπότε $x = 0,1$

στ. $650 \cdot 0,1 = 65$ οπότε $x = 650$

1. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

α. $63,28+2,932$ **β.** $1.085,9-283$ **γ.** $0,065+93,5$

δ. $835+9,28$ **ε.** $863,7-99,632$ **στ.** $63,5-6,35$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α. $8,2\cdot 0,1$ **β.** $63\cdot 82,5$ **γ.** $8\cdot 0,01$

δ. $5,32\cdot 9$ **ε.** $6,34\cdot 100$ **στ.** $7,2\cdot 0,1$

3. Να αντικατασταθούν τα παρακάτω κουτάκια με τα κατάλληλα ψηφία ώστε είναι σωστές οι σημειούμενες πράξεις.

α. $$\begin{array}{r} 64,57 \\ +\ 32,\square\square \\ \hline \square\square,96 \end{array}$$

β. $$\begin{array}{r} \square\square,325 \\ +\ 25,\square 35 \\ \hline 114,9\square\square \end{array}$$

γ. $$\begin{array}{r} 6\square,37 \\ -\ 17,\square\square \\ \hline 45,09 \end{array}$$

δ. $$\begin{array}{r} 53\square,28 \\ -\ \square 9,\square 7 \\ \hline 514,7\square \end{array}$$

ε. $$\begin{array}{r} 3\square 78 \\ \text{x}\quad 6 \\ \hline 96\square 8 \end{array}$$

στ. $$\begin{array}{r} 93 \\ \text{x}\quad \square\square \\ \hline \square\square 5 \\ +\ \square\square 6 \\ \hline \square\square 2\square \end{array}$$

4. Να βρείτε με τον πιο εύκολο τρόπο τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $1,5+1,25+3,75+2,5$ **β.** $30,75+50+10,25$

γ. $8,3+2,8+7,7+1,2$ **δ.** $4,6+3,5+1,4+6,5$

5. Να βρείτε τον αριθμό που επαληθεύει καθεμιά από τις εξισώσεις:

α. $30+x=45$ **β.** $10+x=12,5$ **γ.** $180+x=360$ **δ.** $x+15,3=16,7$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $40-(13-11)=$ **β.** $(60-15)+7=$

γ. $(12+13)-5=$ **δ.** $(5+7)-3=$

7. Αν $\alpha = 13{,}5$, $\beta = 12$, $\gamma = 7{,}5$, $\delta = 3$ να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με την σειρά που σημειώνονται.

α. $\alpha + \gamma - \beta - \delta$ **β.** $\alpha + \beta + \gamma - \delta$

8. Αν $x + y = 2$, $x + \omega = 5$, $y + \omega = 3$. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $x + 1 + y + 3 + x + 7 + \omega$ **β.** $x + 3 + \omega - 2 + y + 9 + \omega - 3$

γ. $y + \omega - 3 + x + y - 2$ **δ.** $x + y + \omega - 3 + 1 + x$

9. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα ώστε να γίνουν “**μαγικά**”:

α.

9		
	6	
		3

β.

3		
8		
1		

10. Να γραφούν σύντομα τα αθροίσματα:

α. $1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5$ **β.** $x + x + x + x + x$

11. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $2 + (5 \cdot 3)$ **β.** $(4 \cdot 5) - 2$

γ. $(3 + 1) \cdot 2$ **δ.** $(3 + 5 - 2 - 6) \cdot 10$

12. Να γίνουν από μνήμης τα γινόμενα:

α. $68 \cdot 100$ $6{,}8 \cdot 100$ $0{,}68 \cdot 100$

β. $93 \cdot 0{,}1$ $9{,}3 \cdot 0{,}1$ $930 \cdot 0{,}01$

γ. $52000 \cdot 0{,}01$ $5200 \cdot 0{,}1$ $52000 \cdot 0{,}001$

13. Λαμβάνοντας υπόψη τις ισότητες $73 \cdot 25 = 1825$ και $13 \cdot 48 = 624$ να υπολογίσετε από μνήμης τα γινόμενα:

α. $0{,}73 \cdot 25$ **β.** $7{,}3 \cdot 2{,}5$ **γ.** $7{,}3 \cdot 0{,}025$

δ. $130 \cdot 4{,}8$ **ε.** $1{,}3 \cdot 4{,}8$ **στ.** $13 \cdot 480$

14. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $5 \cdot (3 - 2)$ **β.** $(5 + 3) \cdot 2$ **γ.** $(5 \cdot 3) + (3 \cdot 2)$ δ. $(6 + 5) - 2 \cdot 2 + (3 - 2)$

15. Να υπολογίσετε τα παραγάτω γινόμενα:

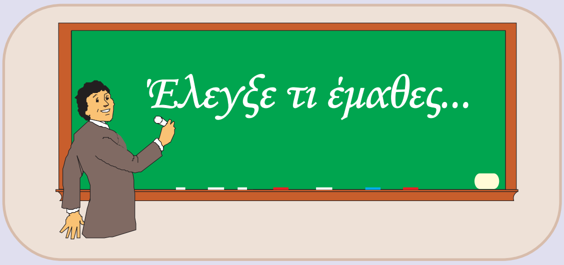
α. $4,3 \cdot 2,5 \cdot 100$ **β.** $6,3 \cdot 1,5 \cdot 10 \cdot 2$ **γ.** $63.000 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 0,01$ **δ.** $200 \cdot 30 \cdot 0,001$

16. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 17,2 μέτρα και πλάτος 10 μέτρα.

α. Να βρεθεί το εμβαδόν του οικοπέδου

β. Αν θέλουμε να το περιφράξουμε, πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστούμε;

17. Ένας έμπορος πούλησε 13,7 μέτρα ύφασμα α΄ ποιότητας, προς 30€ το μέτρο, και 14,5 μέτρα ύφασμα β΄ ποιότητας, προς 20€ το μέτρο. Πόσα € εισέπραξε;



Ερώτηση 1

Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης;

Ερώτηση 2

Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 10, 100, 1000...;

Ερώτηση 3

Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα αποτελέσματα των παρακάτω πολλαπλασιασμών.

$$32 \cdot 10 = 320$$

$$3,2 \cdot 0,1 = 32$$

$$0,32 \cdot 10 = 3,2$$

$$0,032 \cdot 100 = 0,32$$

$$32 \cdot 0,10 = 3,20$$

Άσκηση 2

Διαθέτουμε 200 πλακάκια, που το καθένα έχει μήκος 0,20 μέτρα και πλάτος 0,10 μέτρα. Θέλουμε να καλύψουμε το δάπεδο ενός δωματίου σχήματος ορθογωνίου που έχει μήκος 4 μέτρα και πλάτος 3 μέτρα. Φτάνουν τα πλακάκια για να καλύψουν όλη την επιφάνεια;

Βιβλιομάθημα 4

- Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού
- Δυναμεις αριθμών
- Επιμεριστική ιδιότητα

Πολλαπλάσια

? Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού α λέγονται οι αρθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με το 0, 1, 2, 3, ... δηλαδή οι αριθμοί:

$$0{\cdot}\alpha = 0,\quad 1{\cdot}\alpha = \alpha,\quad 2{\cdot}\alpha = 2\alpha,\quad 3{\cdot}\alpha = 3\alpha\ , \ldots$$

? Τι είναι τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών; Βρείτε τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8;

Αν βρούμε τα πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών, πιθανόν να υπάρχουν πολλαπλάσια του ενός, τα οποία είναι πολλαπλάσια και των υπολοίπων φυσικών τους οποίους εξετάζουμε. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **κοινά πολλαπλάσια** των αριθμών αυτών.

Τα πολλαπλάσια του 6 είναι:

0, 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, ...

Τα πολλαπλάσια του 8 είναι:

0, 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, ...

Τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8 είναι:

0, 24, 48,...

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο Ε.Κ.Π.

? Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών; Πώς συμβολίζεται αυτό; Βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 3, 5 και 6.

Από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσοτέρων φυσικών το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο ονομάζεται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των αριθμών αυτών και συμβολίζεται: Ε.Κ.Π.

Τα πολλαπλάσια του 3 είναι:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, **30**, 33,...

Τα πολλαπλάσια του 5 είναι:

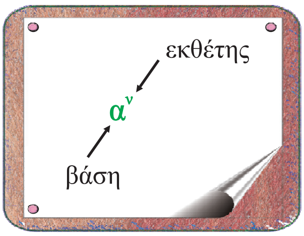
0, 5, 10, 15, 20, 25, **30**, 35, 40,...

Τα πολλαπλάσια του 6 είναι:

0, 6, 12, 18, 24, **30**, 36, 42,...

οπότε το Ε.Κ.Π. $(3, 5, 6) = 30$

Νιοστή Δύναμη



Τι ονομάζουμε νιοστή δύναμη του α και πως συμβολίζεται;

Αν α είναι ένας αριθμός το γινόμενο $\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\cdot\alpha}_{\nu-\text{παράγοντες}}$, που έχει ν παράγοντες ίσους με τα α, λέγεται **νιοστή δύναμη του α** ή δύναμη με βάση α και εκθέτη ν. Η δύναμη αυτή συμβολίζεται α^{ν} και διαβάζεται αλφα στην νιοστή.

• Η δύναμη α^2, που παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α, διαβάζεται και “άλφα στο τετράγωνο”

• Η δύναμη α^3 που παριστάνει τον όγκο ενός κύβου πλευράς α διαβάζεται και “α στον κύβο”

• Συμφωνούμε ότι: $\alpha^0 = 1 \quad (\alpha \neq 0)$

$\alpha^1 = \alpha$

Πώς υπολογίζεται η νιοστή δύναμη του 10;

Η νιοστή δύναμή του 10 είναι ίση με τον αριθμό που προκύπτει, όταν δεξιά του 1 γράψουμε ν μηδενικά.

Για παράδειγμα: $10^2 = 100$

$10^5 = 100000$

Επιμεριστική ιδιότητα

Πως πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με ένα άθροισμα; Πώς ονομάζεται η ιδιότητα που χρησιμοποιούμε;

Υπολογίστε το γινόμενο $3(x+7)$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό με ένα άθροισμα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό αυτό με κάθε όρο του αθροίσματος και προσθέτουμε τα γινόμενα δηλαδή:

$$\boxed{\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \text{ ή } \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta+\gamma)}$$

Η ιδιότητα αυτή λέγεται **επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Έχουμε:

$$3\cdot(x+7)=3\cdot x+3\cdot 7$$

? **Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση;**

Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει και στην περίπτωση που αντί για πρόσθεση έχουμε αφαίρεση δηλαδή ισχύει:

$$\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$$

ή

$$\text{ή } \alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta-\gamma)$$

1. Ένας φυσικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού α, όταν γράφεται ως γινόμενο κάποιου φυσικού αριθμού επι τον αριθμό α.

2. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών (που ο καθένας τους δεν είναι μηδέν) λέγεται το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια αυτών των αριθμών (εκτός από το μηδέν).

3. Τα κοινά πολλαπλάσια δύο η περισσότερων φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσια του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου (Ε.Κ.Π.) τους.

4. Νιοστή δύναμη ενός φυσικού α ονομάζεται το γινόμενο ν παραγόντων $(\nu>1)$ ίσων με α δηλαδή $\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}=\alpha^{\nu}$, αν ν φυσικός αριθμός, με $\nu>1$.

5. Αν $\nu=1$, τότε ορίζουμε την πρώτη δύναμη του α και συμβολίζουμε: α^1 τον αριθμό α.

6. Για να πολλαπλασιάσουμε ένα άθροισμα με δύο ή περισσότερους προσθετέους επί κάποιο φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο του αθροίσματος επί τον φυσικό αριθμό και προσθέτουμε τα γινόμενα. $8\cdot(3+5)=8\cdot 3+8\cdot 5$ επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

1 **Να γράψετε κατά αύξουσα τάξη τα γινόμενα των φυσικών αριθμών: 0, 1, 2, 3, ... επί τον 6.**
α. Είναι δυνατό να τα γράψετε όλα;
β. Πως λέγεται καθένα από αυτά τα γινόμενα (σε σχέση με τον 6);
γ. Τα πολλαπλάσια $0 \cdot 6$ και $1 \cdot 6$ είναι μεγαλύτερα από τον αριθμό 6; (Συζήτηση)

Λύση

0, 6, 12, 18, 24, ...
α. Όχι, **β.** πολλαπλάσιο, **γ.** όχι

2 **α. Να γράψετε κατά αύξουσα τάξη τα πολλαπλάσια του 4.**
β. Υπάρχει κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4 και 6 που να είναι μικρότερο ή ίσο του 12;
γ. Υπάρχουν κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 4 και 6 που να είναι μεγαλύτερα του 12; Πολλά;

Λύση

α. 4, 8, 12, 16, 20, ... **β.** Το 12 **γ.** Ναι, άπειρα

3 **α. Ποιων φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο ο αριθμός μηδέν;**
β. Ο αριθμός μηδέν έχει πολλαπλάσια; Αν ναι, ποια;
γ. Να απαντήσετε στις δύο παραπάνω ερωτήσεις, αν αντί του αριθμού 0 θεωρήσετε τον αριθμό 1.

Λύση

α. οποιουδήποτε φυσικού, **β.** Ναι, 0, 0, ...
γ. του φυσικού 1. Ο αριθμός 1 γράφεται $1 \cdot 1 = 1$

4 **α. Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών, διάφορων από το μηδέν;**
β. Ποια είναι τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών, αν ο ένας από αυτούς μόνο είναι το μηδέν;

Λύση

α. Το Ε.Κ.Π. δύο μη μηδενικών φυσικών αριθμών ονομάζουμε το μικρότερο (μη μηδενικό) από το κοινά πολλαπλάσια των αριθμών.

β. Είναι τα πολλαπλάσια του μη μηδενικού αριθμού.

5 **ΕΚΠ (8, 12) = ;**
Να γράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 8 και 12 και μετά τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (8, 12). Τι παρατηρείτε;

Λύση

ΕΚΠ (8, 12) =24
Πολλαπλάσια του 8: 24, 48, 72, ...
Πολλαπλάσια του 12: 24, 48, 72
Πολλαπλάσια του 24: 24, 48, 72, 96, 120, ...
Παρατηρούμε ότι είναι όλα πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π.

6 **Να γράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των 5, 6, 10 και τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (5, 6, 10). Τι παρατηρείτε για τα κοινά πολλαπλάσια των 5, 6, 10 και για τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (5,6,10);**

Λύση

Πολλαπλάσια του 5: 30, 60, 90, ...
Πολλαπλάσια του 6: 30, 60, 90, ...
Πολλαπλάσια του 10: 30, 60, 90, ...
Πολλαπλάσια του 30: 30, 60, 90, ...
Είναι όλα πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π. .
5, 10, 15, 20, 25, **30**, 35, 40, 45, 50, 55, **60**, ...
6, 12,18, 24, **30**, 36, 42, 48, 54, **60**, 66,...
30, **60**, 90, 120
Είναι τα ίδια

Το γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, που έχει 6 παράγοντες και καθένας είναι ο αριθμός 2, το συμβολίζουμε 2^6. Το σύμβολο 2^6 το ονομάζουμε έκτη δύναμη του αριθμού 2 και το διαβάζουμε δύο στην έκτη. Τον αριθμό 2 ονομάζουμε βάση της δύναμης και τον αριθμό 6 εκθέτη της.

7 **α. Είναι ο 135 ένα από τα πολλαπλάσια του 11;**
β. Αν διαπιστώσετε πως όχι, τότε να ελέγξετε αν υπάρχουν δύο διαδοχικά πολλαπλάσια του 11 που το ένα να είναι μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο από τον 135.

Λύση

α. Όχι, **β.** $121 < 135 < 132$

8 **α. Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο το άθροισμα 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2; Πόσους και ποιους προσθετέους έχει αυτό το άθροισμα; Πώς μπορεί να γραφεί συντομότερα;**

β. Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο το γινόμενο: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; Πόσους παράγοντες έχει αυτό το γινόμενο; Ποιοι είναι οι παράγοντές του;

Λύση

α. $6 \cdot 2 = 12$, 6 προσθετέοι

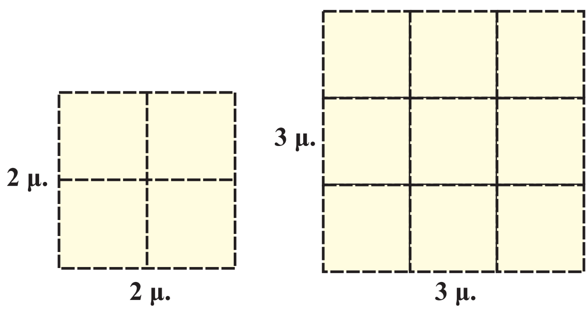
β. $2^6 = 64$, 6 παράγοντες

9 **α. Τι συμβολίζει το γινόμενο $5 \cdot 3$; Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο;**
β. Τι συμβολίζει η δύναμη 3^5; Ποια είναι η βάση και ποιος ο εκθέτης της; Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίση;
γ. Τι συμβολίζει η δύναμη 5^3; Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίση;

Λύση

α. $5 \cdot 3 = 15$
β. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, βάση το 3, εκθέτης το 5 και ισούται με τον αριθμό 243
γ. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, βάση το 5, εκθέτης το 3 και ισούται με τον αριθμό 125.

10 **Τις δυνάμεις 2^2 και 3^2 συνήθως τις διαβάζουμε δύο στο τετράγωνο και τρία στο τετράγωνο, γιατί παριστάνουν τα εμβαδά τετραγώνων με μήκη 2 και 3 μονάδες μήκους αντίστοιχα.**
Για τον ίδιο λόγο, τη δύναμη α^2 τη διαβάζουμε α στο τετράγωνο για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό α.
Με ανάλογες σκέψεις να δικαιολογήσετε γιατί τη δύναμη α^3 τη διαβάζουμε α στον κύβο.



Λύση

Γιατί παριστάνει όγκο κύβου με ακμή το α.

11 **α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.**
β. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις 1^{10} και 10^{10}.
γ. Να διατυπώσετε γενικό κανόνα με τον οποίο υπολογίζουμε τις δυνάμεις του 1 και του 10.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
10					

Λύση

α. 1, 1, 1, 1, 1

β. $1^{10} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{10\ \text{παράγοντες}} = 1$, $10^{10} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{10\ \text{παράγοντες}} = 10.000.000.000$

γ. $1^{\nu} = 1$, όπου ν φυσικός, $10^{\nu} = 100...0$, με ν μηδενικά

Η παράσταση
$4\cdot10^5+6\cdot10^4+0\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^2+2\cdot10^0$
του αριθμού 460302 ονομάζεται αναπτυγμένη μορφή του αριθμού 460302 με βάση τον 10.

12 **Ποιος είναι ο φυσικός αριθμός:**

$$4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 2 \;;$$

Λύση

$4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 2 = 460302$

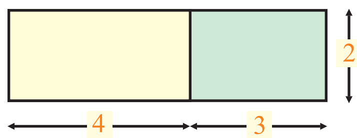
13 **Να γράψετε σε αναπτυγμένη μορφή με βάση τον 10 τους αριθμούς 3275 και 408906.**

Λύση

$3275 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5$ $\qquad$ $408906 = 4 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6$

14 **Να χρησιμοποιήσετε τα εμβαδά των παρακάτω ορθογωνίων για να δικαιολογήσετε ότι:** $(4+3)\cdot 2 = 4\cdot 2 + 3\cdot 2$

Λύση



$(4+3)\cdot 2 =$ Το εμβαδόν και των δύο ορθογωνίων.
$4\cdot 2 + 3\cdot 2 =$ Το άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνίων.

15 **Να τοποθετήσετε κατάλληλα μια παρένθεση στις παρακάτω ισότητες ώστε να είναι αληθείς.**

α. $25\cdot 4 - 8\cdot 9 - 2 + 5\cdot 6 = 60$ $\qquad$ **β.** $3\cdot 15 + 5 - 5\cdot 14 + 5\cdot 8 = 20$

Λύση

α.
$$\begin{aligned} 25\cdot 4 - 8\cdot 9 + 2 + 5\cdot 6 &= 4(25 - 2\cdot 9) + 2 + 5\cdot 6 = \\ &= 4(25-18) + 2 + 30 = \\ &= 4\cdot 7 + 2 + 30 = 60 \end{aligned}$$

β.
$$\begin{aligned} 3\cdot 3\cdot 5 + 5 + 5\cdot 8 - 5\cdot 14 &= 5(3\cdot 3 + 1 + 8 - 14) = \\ &= 5(9+1+8-14) = \\ &= 5(18-14) = \\ &= 5\cdot 4 = 20 \end{aligned}$$

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Φυσικοί αριθμοί	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**	**...**
Πολ/σια του 11, μεγαλύτερα του 30 και μικρότερα του 120							

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Φυσικοί αριθμοί	**0**	**1**	**2**	**...**	**...**
Πολ/σια του 6					
Πολ/σια του 8					

Ποιο είναι το ΕΚΠ(6, 8);

3. Να βρείτε το ΕΚΠ (4, 6, 18).

4. **α.** Να βρείτε τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 6 και 10.
β. Να βρείτε τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (6, 10)

5. Ένα ορεινό χωριό το επισκέπτεται ο γιατρός κάθε 8 ημέρες, ο κτηνίατρος κάθε 10 ημέρες κι ένας έμπορος κάθε 15 ημέρες. Αν σήμερα επισκέφθηκαν και οι τρεις το χωριό, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.

6. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $7 \cdot 7 \cdot 7$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Να δικαιολογήσετε γιατί ο αριθμός $13 + 13 + 13 + 13 + 13$ είναι πολλαπλάσιο τέσσάρων φυσικών αριθμών.

8. Να γράψετε σε μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:

α. $3 \cdot 3$ **β.** $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ **γ.** $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23$
δ. $1 \cdot 1 \cdot 1$ **ε.** $\alpha \cdot \alpha$ **στ.** $\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \gamma$

9. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 2^3 **β.** 3^2 **γ.** 4^3 **δ.** 3^4
ε. 11^2 **στ.** 12^2 **ζ.** 5^2 **η.** 5^3

10. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω φυσικούς αριθμούς μπορεί να γραφούν ως δύναμη και να τους γράψετε έτσι.

α. 36 **β.** 125 **γ.** 49 **δ.** 81 **ε.** 144
στ. 169 **ζ.** 110 **η.** 32 **θ.** 128 **ι.** 196
ια. 10.000 **ιβ.** 200 **ιγ.** 400

11. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο ισότητας ή ανισότητας.

α. 3^2 ..... 2^3 **β.** 5^3 ..... 3^5 **γ.** 4^2 ..... 2^4
δ. 10^2 ..... 2^{10} **ε.** 1^4 ..... 1^7 **στ.** 7^2 ..... 2^7

12. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο ισότητας ή ανισότητας.

α. 2^2+3^2 ..... $(2+3)^2$ **β.** $(7-3)^2$ ..... 7^2-3^2 **γ.** 0^3+4^3 ..... $(0+4)^3$
δ. 3^2 ..... $3+3$ **ε.** $16-3^2$ ..... $(16-3)^2$ **στ.** $1 \cdot 5$ ..... 1^5

13. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο ισότητας ή ανισότητας.

α. 3^2 ..... $3 \cdot 2$ **β.** 2^2 ..... $2 \cdot 2$ **γ.** 5^2 ..... $5 \cdot 2$
δ. $7 \cdot 2$ ..... 7^2 **ε.** 72^2+69^2 ..... 27^2+96^2 **στ.** $1^3+5^3+3^3$ 153

14. Να γράψετε σε αναπτυγμένη μορφή στο δεκαδικό σύστημα καθέναν από τους αριθμούς:

α. 532 **β.** 6329 **γ.** 50314 **δ.** 7 935 028

15. Ποιους φυσικούς αριθμούς αντιπροσωπεύουν οι παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

α. $3\cdot 10^2+4\cdot 10+2$ **β.** $6\cdot 10^4+0\cdot 10^3+2\cdot 10^2+5\cdot 10+1$
γ. $8\cdot 10^7+0\cdot 10^6+0\cdot 10^5+2\cdot 10^4+3\cdot 10^3+7\cdot 10^2+0\cdot 10+3$

16. Να μετατρέψετε σε μορφή μιας δύναμης καθένα από τα παρακάτω γινόμενα, όπως φαίνεται στο γινόμενο α.

α. $8\cdot 16=2^3\cdot 2^4=(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=2^7$

β. $9\cdot 81$ **γ.** $27\cdot 27$ **δ.** $25\cdot 125$ **ε.** $\alpha^3\cdot\alpha$ **στ.** $x^4\cdot x^2\cdot x$

17. Να μετατρέψετε σε μορφή μιας δύναμης με βάση φυσικό αριθμό καθέναν από τους φυσικούς αριθμούς Β, Γ και Δ, όπου $B=(5^3)^2$, $\Gamma=(2^4)^3$, $\Delta=(7^2)^2$, όπως φαίνεται στον αριθμό Α. $\mathbf{A}=(3^2)^3=3^2\cdot 3^2\cdot 3^2=(3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3)=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^6$

18. Να γράψετε σε σύντομη μορφή καθεμία από τις παραστάσεις:

α. $9\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ **β.** $8\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta\cdot 5$ **γ.** $x\cdot x\cdot x\cdot 6\cdot x\cdot x$
δ. $\alpha+\beta\cdot\beta\cdot\beta$ **ε.** $\alpha\cdot\alpha+\beta+\beta$

19. Αν α = 4, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η παράσταση Α, όπου $A=3\alpha^2+(3\alpha)^2-9\alpha$.

20. Αν α = 3 και β = 4, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η παράσταση Α, όπου: $A=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

21. Δίνεται ότι: $352\cdot 84=29568$. Πόσο θα αυξηθεί ο αριθμός 29568, αν ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου αυξηθεί κατά 3;

22. Να υπολογίσετε με δύο τρόπους τα γινόμενα:

α. $4\cdot(8+2)$ **β.** $(3+9)\cdot 12$ **γ.** $5\cdot(12-4)$
δ. $(20-6)\cdot 7$ **ε.** $3\cdot(5+6+7)$

23. Να γράψετε σε μορφή γινομένου τα αθροίσματα:

α. $7\cdot 6+13\cdot 6$ **β.** $8\cdot 9+8\cdot 7$ **γ.** $12\cdot 16+12$
δ. $4\cdot 6+4\cdot 7+4\cdot 8$ **ε.** $9\cdot 7+9\cdot 11+9$

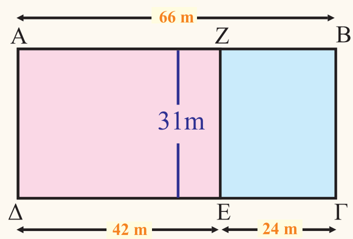
24. Να γράψετε σε μορφή γινομένου τις διαφορές:

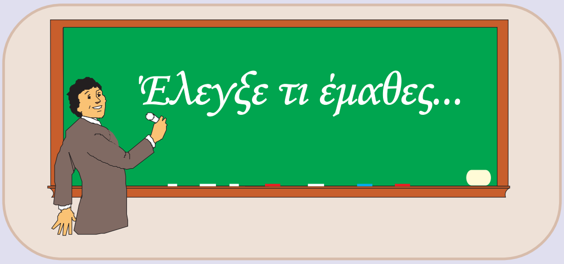
α. $12\cdot 12-12\cdot 5$ **β.** $14\cdot 8-5\cdot 8$ **γ.** $16\cdot 15-15$

25. Να υπολογίσετε με τέσσερις τρόπους το γινόμενο: $(2+7)\cdot(6+5)$

26. **α.** Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το εμβαδόν του οικοπέδου ΑΒΓΔ, το οποίο έχει σχήμα ορθογωνίου.

β. Κάντε το ίδιο για το εμβαδόν του ΕΖΒΓ ορθογωνίου.





Ερώτηση 1

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται φυσικοί;
Πως συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών;
Τι παριστάνει το σύμβολο N^*;

Ερώτηση 2

α. Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο το άθροισμα $2+2+2+2+2+2$; Πόσους και ποιους προσθετέους έχει αυτό το άθροισμα; Πώς μπορεί να γραφτεί συντομότερα;

β. Με ποιο φυσικό αριθμό είναι ίσο το γινόμενο: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; Πόσους παράγοντες έχει αυτό το γινόμενο; Ποιοι είναι οι παράγοντές του;

Άσκηση 1

Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω φυσικούς αριθμούς μπορεί να γραφούν ως δύναμη και να τους γράψετε έτσι.

α. 36	**β.** 125	**γ.** 48	**δ.** 81	**ε.** 144
στ. 169	**ζ.** 110	**η.** 32	**θ.** 128	**ι.** 196
ια. 10.000	**ιβ.** 200	**ιγ.** 400		

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει κάθε παράσταση:

α. $3 \cdot 4^2 + 2(4 \cdot 5 - 2^4 + 3)$

β. $2^4 \cdot (4^2 - 36 : 6) - (3 \cdot 4 - 11)^5 + 2 \cdot 3^2$

γ. $3 \cdot 2^3 + 3 - (6^2 - 1 - 1 \cdot 8)$

δ. $3 \cdot 2^3 - (4^3 : 2 - 31)^9 - 1$

Άσκηση 3

Αν $\alpha + \beta = 3$, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η παράσταση Α, όπου: $A = 5(2+\alpha) + 2\beta + 3\beta - 3^2$

Βιβλιομάθημα 5

- Η τέλεια διαίρεση
- Διαιρέτες φυσικού αριθμού
- Χαρακτήρες διαιρετότητας
- Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- Η ευκλείδια διαίρεση
- Διαίρεση δεκαδικών
- Πηλίκο με προσέγγιση

Διαίρεση

Τι λέγεται τέλεια διαίρεση; Ποιά ισότητα ισχύει στην τέλεια διαίρεση;

Μια διαίρεση στην οποία ο διαιρετέος είναι πολλαπλάσιο του διαιρέτη λέγεται τέλεια διαίρεση.
Αν σε μια τέλεια διαίρεση είναι Δ ο διαιρετέος, δ ο διαιρέτης και π το πηλίκο, θα έχουμε:

$$\Delta : \delta = \pi \text{ γιατί } \Delta = \delta \cdot \pi$$

• Σε μια τέλεια διαίρεση $\Delta : \delta = \pi$ λέμε ότι ο δ διαιρεί το Δ ή ότι ο Δ διαιρείται με το δ.
• Σε μια διαίρεση, ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι μηδέν.
• Επίσης ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \alpha = 1 \\ \alpha : 1 = \alpha \end{array}\right\rangle \text{γιατί } \alpha \cdot 1 = \alpha$$

$$0 : \alpha = 0, \text{ γιατί } \alpha \cdot 0 = 0$$

Πρώτοι, Σύνθετοι αριθμοί

Τι ονομάζουμε διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α; Βρείτε τους διαιρέτες του 24.

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν τον α.
Οι διαιρέτες του 24 είναι:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Ποιο αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοί σύνθετοι; Δώστε παραδείγματα πρώτων και σύνθετων αριθμών.

Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που δεν έχουν άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και το 1.

Σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι.

Για παράδειγμα οι αριθμοί 2, 5, 7, 11, 13 είναι πρώτοι αριθμοί, ενώ οι αριθμοί 4, 6, 12 είναι σύνθετοι.

Κοινοί διαιρέτες

Τι ονομάζουμε κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων φυσικών;

Υπάρχουν αριθμοί οι οποίοι είναι διαιρέτες συγχρόνως δύο ή περισσότερων φυσικών. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **κοινοί διαιρέτες** των αριθμών αυτών.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

Τι ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερων φυσικών; Πώς αυτός γράφεται συμβολικά; Βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των 8 και 36.

Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων φυσικών ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης**.

Συμβολικά γράφουμε: Μ.Κ.Δ.

Οι διαιρέτες του 8 είναι:

1, 2, **4**, 8

Οι διαιρέτες του 36 είναι:

1, 2, 3, **4**, 6, 9, 12, 18, 36

Άρα Μ.Κ.Δ. $(8,36)=4$

• Οι αριθμοί που έχουν για Μ.Κ.Δ. το 1 λέγονται πρώτοι μεταξύ τους.

Διαιρετότητα

Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5 και το 9;

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τε-

λευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6 ή 8.
Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5.
Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

• Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσια του. Για παράδειγμα, το 3 διαιρεί το 9, το 12, το 15 κλπ , τα οποία είναι πολλαπλάσια του.
• Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο, είναι πολλαπλάσιο του. Για παράδειγμα, το 12 που είναι πολλαπλάσιο του 3 διαιρείται απ' αυτό.
• Αν ένας αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσια του. Για παράδειγμα το 4 διαιρεί το 8. Οπότε θα διαιρεί και το 16, 24, 32 κλπ. που είναι πολλαπλάσια του 8.
• Αν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους τότε διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους. Για παράδειγμα το 2 διαιρεί το 4 και το 8 οπότε θα διαιρεί και το $4+8=12$ και το $8-4=4$.

Τι ονομάζεται ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων; Να αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οι αριθμοί:
α. 30 **β. 100**

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων λέγεται η εργασία γραφής ενός σύνθετου φυσικού αριθμού σε γινόμενο που θα έχει παράγοντες μόνο πρώτους αριθμούς.

α

30	2
15	3
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

β.

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός αναλύεται κατά ένα μόνο τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ευκλείδια διαίρεση

Τι λέγεται ευκλείδεια διαίρεση;

Αν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί, ο **Δ (διαιρετέος)** και **δ (διαιρέτης)** βρίσκονται δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί, ο **π (ακέραιο πηλίκο ή πηλίκο)** και ο **υ (υπόλοιπο)** ώστε να είναι:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \quad \text{και} \quad \upsilon < \delta$$

Η διάδικασία αυτή λέγεται **ευκλείδεια διαίρεση**.

Αν $\upsilon = 0$, τότε ισχύει $\Delta = \delta \cdot \pi$ και έχουμε την περίπτωση της **τέλειας** διαίρεσης.

Αν $\upsilon \neq 0$, η ευκλείδια διαίρεση χαρακτηρίζεται και σαν **ατελής** διαίρεση.

Διαίρεση δεκαδικού με δεκαδικό

Πώς βρίσκουμε το πηλίκο της διαίρεσης δεκαδικού με δεκαδικό;

Για να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης δεκαδικού με δεκαδικό, πολλαπλασιάζουμε διαιρετέο και διαιρέτη με κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός, οπότε αναγόμαστε στη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό ή φυσικού με φυσικό.

Διαίρεση φυσικού με φυσικό

Πώς διαιρούμε φυσικό με φυσικό;

Επειδή κάθε φυσικός μπορεί να γραφτεί σαν δεκαδικός με δεκαδικό μέρος μηδέν, η διαίρεση φυσικού με φυσικό μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να βρεθεί πηλίκο δεκαδικός αριθμός (εφόσον αυτό είναι δυνατό).

Διαίρεση δεκαδικού με φυσικό

Πώς μπορούμε να διαιρέσουμε δεκαδικό με φυσικό;

Για να διαιρέσουμε δεκαδικό με φυσικό αριθμό, εργαζόμαστε όπως και στην ευκλείδεια διαίρεση, με τη διαφορά ότι, πριν κατεβάσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, τοποθετούμε την υποδιαστολή στο πηλίκο

Πώς διαιρούμε έναν αριθμό με το 10, το 100, το 1000 κλπ;

Για να διαιρέσουμε έναν αριθμό με 10 ή 100 ή 1000 κ.λ.π., αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή του προς τα αριστερά κατά μία ή δύο ή τρεις κ.λ.π. αντίστοιχα θέσεις.

Παρατηρούμε σε πολλές διαιρέσεις ότι όσο και αν τις συνεχίσουμε δεν βρίσκουμε υπόλοιπο μηδέν. Γι'αυτό σταματάμε τις διαιρέσεις αυτές σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο και τότε λέμε ότι βρίσκουμε το πηλίκο με προσέγγιση.

1. Τέλεια διαίρεση λέγεται η διαίρεση στην οποία ο διαιρετέος είναι πολλαπλάσιο του διαιρέτη.
Ισχύει:

Διαιρετέος: διαιρέτης = πηλίκο
γιατί
πηλίκο · διαιρέτης = Διαιρετέος

2. Σε μια διαίρεση, ο διαιρέτης δεν είναι **ποτέ** μηδέν.

3. Μέγιστος κοινός διαιρέτης λέγεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών.

4. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.

5. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6, 8 ενώ διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.

6. Ευκλείδεια διαίρεση λέγεται η διαίρεση στην οποία ισχύει:

Διαιρετέος = διαιρέτης · πηλίκο + υπόλοιπο

με το υπόλοιπο μικρότερο από το διαιρέτη.

1 **Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.**

α. **91 : 7** **β.** **120 : 5** **γ.** **136 : 17**

δ. **3588 : 23** **ε.** **58117 : 89** **στ.** **34200 : 456**

Λύση

α.
$$\begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 13 \\ 0 & \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 7 \\ \hline 91 \end{array}$$

β.
$$\begin{array}{r|l} 120 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 24 \\ 0 & \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 5 \\ \hline 120 \end{array}$$

γ.
$$\begin{array}{r|l} 136 & 17 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

δ.
$$\begin{array}{r|l} 3588 & 23 \\ \cline{2-2} 128 & 156 \\ 138 & \\ 0 & \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 156 \\ \times\ 23 \\ \hline 468 \\ 312 \\ \hline 3588 \end{array}$$

ε.
$$\begin{array}{r|l} 58117 & 89 \\ \cline{2-2} 471 & 653 \\ 267 & \\ 0 & \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 653 \\ \times\ 89 \\ \hline 5877 \\ 5224 \\ \hline 58117 \end{array}$$

στ.
$$\begin{array}{r|l} 34200 & 456 \\ \cline{2-2} 2280 & 75 \\ 0 & \end{array}$$
Δοκιμή
$$\begin{array}{r} 456 \\ \times\ 75 \\ \hline 2280 \\ 3192 \\ \hline 34200 \end{array}$$

2 **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α. $4 \cdot x = 92$ **β.** $11 \cdot x = 165$ **γ.** $27 : x = 9$

δ. $x : 3 = 11$ **ε.** $23 \cdot x = 115$ **στ.** $192 : x = 32$

Λύση

α. $4 \cdot x = 92$
$x = 92 : 4$
$x = 23$

β. $11 \cdot x = 165$
$x = 165 : 11$
$x = 15$

γ. $27 : x = 9$
$9 \cdot x = 27$
$x = 27 : 9$
$x = 3$

δ. $x:3=11$
$x=3\cdot 11$
$x=33$

ε. $23\cdot x=115$
$x=115:23$
$x=5$

στ. $192:x=32$
$32\cdot x=192$
$x=192:32$
$x=6$

3 **Να υπολογίσετε:**
α. Πόσο κοστίζει το κάθε παγωτό, αν για 7 παγωτά πληρώσαμε 14€.
β. Την πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει περίμετρο 231 μέτρα.
γ. Πόσα δοχεία των 5 κιλών χρειαζόμαστε για να αδειάσουμε 320 κιλά λάδι.

Λύση

α. Το κάθε παγωτό κοστίζει: $14:7=2$
β. Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι $231:3=77$ μέτρα.
γ. Χρειαζόμαστε $320:5=64$ δοχεία των 5 κιλών.

4 **Ένας μαθητής στην αρχή της σχολικής χρονιάς αγόρασε 15 τετράδια και 23 στυλό διαρκείας και πλήρωσε 3790 λεπτά. Αν κάθε στυλό κοστίζει 80 λεπτά, να βρείτε πόσο κοστίζει κάθε τετράδιο.**

Λύση

Τα στυλό κοστίζουν $23\cdot 80=1840$ λεπτά, οπότε τα 15 τετράδια κοστίζουν $3790-1840=1950$ λεπτά. Άρα το κάθε τετράδιο κοστίζει: $1950:15=130$ λεπτά.

5 **Για αναψυκτικά δώσαμε συνολικά 18€. Αν παίρναμε 6 αναψυκτικά παραπάνω θα δίναμε 30€. Πόσο κοστίζει το κάθε αναψυκτικό;**

Λύση

Τα 6 επιπλέον αναψυκτικά κοστίζουν $30-18=12$
οπότε το κάθε αναψυκτικό κοστίζει $12:6=2$.

6 **Να γράψετε τους κοινούς διαιρετέους των αριθμών 8, 24 και 56 και να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.**

Λύση

Οι διαιρέτες του 8 είναι: 1, 2, 4, 8
Οι διαιρέτες του 24 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Οι διαιρέτες του 56 είναι: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56
Οι κοινοί διαιρέτες των 8, 24 και 56 είναι οι: 1, 2, 4, 8
Άρα ο Μ.Κ.Δ. (8, 24, 56) = 8

7 **Δύο αριθμοί έχουν Μ.Κ.Δ. το 36. Να δικαιολογήσετε ότι έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες.**

Λύση

Επειδή το 36 είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες, τότε οι διαιρέτες του 36, θα είναι και διαιρέτες των αριθμών αυτών. Άρα κάθε ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 θα είναι κοινός διαιρέτης των δύο αυτών αριθμών.

8 Να γράψετε από τους αριθμούς 3432, 4581, 864, 156, 62775, 730 αυτούς που διαρούνται.

α. με το 2 β. με το 5 γ. με το 3 δ. με το 9

Λύση

α. Οι αριθμοί 3432, 864, 156, 730 διαιρούνται με το 2, διότι έχουν τελευταίο ψηφίο 2, 4, 6 και 0.

β. Οι αριθμοί 62775, 730 διαιρούνται με το 5, αφού λήγουν σε 5 και 0.

γ. Οι αριθμοί 3432, 4581, 864, 156 διαιρούνται με το 3, διότι το άθροισμά των ψηφίων τους διαιρείται με το 3.

δ. Οι αριθμοί 4581, 864, 62775 διαιρούνται με το 9, διότι το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9.

9 Να συμπληρώσετε τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.

α. i. 52....3 ii. 2....61 ώστε να διαιρούνται με το 3.

β. 6....4.... ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 9.

Λύση

α. Για να διαιρούνται οι 52....3, 2....61 με το 3 θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων τους να διαιρείται με το 3 οπότε έχουμε:

i. 52**2**3, 52**5**3, 52**8**3

ii. 2**0**61, 2**3**61, 2**6**61, 2**9**61

β. Για να διαιρείται ο 6....4.... ταυτόχρονα με το 2 και το 9 θα πρέπει το τελευταίο ψηφίο του να είναι 0, 2, 4, 6, 8 και το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού να διαιρείται με το 9, οπότε έχουμε:

6**840**, 6**642**, 6**444**, 6**246**, 6**048**, 6**948**

10 Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς.

α. 132 β. 500 γ. 140

Λύση

α. $\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

β. $\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $500 = 2^2 \cdot 5^3$

γ. $\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

⑪ Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών 60 και 150.

Λύση

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών, τους αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και παίρνουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων υψωμένους στη μεγαλύτερη δύναμη που εμφανίζεται ο καθένας.

Για να βρούμε το Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων αριθμών τους αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και παίρνουμε το γινόμενο των κοινών παραγόντων υψωμένων στη μικρότερη δύναμη που εμφανίζεται ο καθένας. Έχουμε:

$$\begin{array}{r|l}60&2\\30&2\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\qquad 60=2^2\cdot 3\cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l}100&2\\50&2\\25&5\\5&5\\1&\end{array}\qquad 100=2^2\cdot 5^2$$

Άρα $\text{Ε.Κ.Π.}(60,100)=2^2\cdot 3\cdot 5^2=300$

$\text{Μ.Κ.Δ.}(60,100)=2^2\cdot 5=20$

⑫ Να γίνουν οι παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.

α. 134 : 8 **β. 315 : 25** **γ. 5124 : 15**

Λύση

α. $\begin{array}{r|l}134&\underline{\;8\;}\\54&16\\6&\end{array}$ Δοκιμή: $\begin{array}{r}16\\ \underline{\text{x}\;\;8}\\128\\ \underline{+\;\;6}\\134\end{array}$

β. $\begin{array}{r|l}315&\underline{\;25\;}\\65&12\\15&\end{array}$ Δοκιμή : $\begin{array}{r}25\\ \underline{\text{x}\;\;12}\\50\\ \underline{+25\;}\\300\\ \underline{+\;\;15}\\315\end{array}$

γ. $\begin{array}{r|l}5124&\underline{\;15\;}\\62&341\\24&\\9&\end{array}$ Δοκιμή : $\begin{array}{r}341\\ \underline{\text{x}\;\;15}\\1705\\ \underline{341\;}\\5115\\ \underline{+\;\;9}\\5124\end{array}$

⑬ Αν Δ είναι φυσικός αριθμός

α. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\Delta : 5$.

β. Να βρείτε τους φυσικούς Δ, που, διαιρούμενοι με το 5, δίνουν πηλίκο 7.

Λύση

α. Επειδή στην ευκλείδεια διαίρεση το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το διαιρέτη έχουμε ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\Delta : 5$ είναι: 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4

β. Από την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε: $\Delta = 5 \cdot 7 + \upsilon$ με $\upsilon < 5$ οπότε για

$$\begin{array}{ll}
\upsilon = 0 & \Delta = 5 \cdot 7 = 35 \\
\upsilon = 1 & \Delta = 5 \cdot 7 + 1 = 36 \\
\upsilon = 2 & \Delta = 5 \cdot 7 + 2 = 37 \\
\upsilon = 3 & \Delta = 5 \cdot 7 + 3 = 38 \\
\upsilon = 4 & \Delta = 5 \cdot 7 + 4 = 39
\end{array}$$

⑭ Να γίνουν οι διαιρέσεις.

α. $8,25 : 2$ **β.** $0,805 : 35$ **γ.** $51,84 : 9,6$ **δ.** $0,6 : 0,12$

Λύση

α.
$$\begin{array}{r|l}
8,25 & 3 \\ \cline{2-2}
22 & 2,75 \\
15 & \\
0 &
\end{array}$$

β.
$$\begin{array}{r|l}
0,805 & 35 \\ \cline{2-2}
105 & 0,023 \\
0 &
\end{array}$$

γ.
$$\begin{array}{rr|ll}
 & 51,84 & 9,6 & \\ \cline{3-3}
x10\downarrow & & & \downarrow x10 \\
 & 518,4 & 96 & \\ \cline{3-3}
 & 384 & 5,4 & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

δ.
$$\begin{array}{rr|ll}
 & 0,6 & 0,12 & \\ \cline{3-3}
x100\downarrow & & & \downarrow x100 \\
 & 60 & 12 & \\ \cline{3-3}
 & 0 & 5 &
\end{array}$$

⑮ Να κάνετε τις πράξεις: α. i. $(64+32):4$ **ii.** $(64:4)+(32:4)$ **. Τι παρατηρείται;**

β. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους. i. $(73,8+44,4):6$ **ii.** $(7,56+9,72):1,2$

Λύση

α. i. $(64+32):4 = 96:4 = 24$ **ii.** $(64:4)+(32:4) = 16+8 = 24$

Παρατηρούμε ότι $(64+32):4 = (64:4)+(32:4) = 24$

β. i. $(73,8+44,4):6 = 118,2:6 = 19,7$

$(73,8+44,4):6 = 73,8:6+44,4:6 = 12,3+7,4 = 19,7$

ii. $(7,56+9,72):1,2 = 17,28:1,2 = 14,4$

$$(7,56+9,72):1,2=7,56:1,2+9,72:1,2=6,3+8,1=14,4$$

16 Ο Αντώνης αγόρασε 8 παγωτά και έδωσε 10,56€. Πόσο κοστίζει κάθε παγωτό;

Λύση

Επειδή τα 8 παγωτά κοστίζουν 10,56€ το παγωτό κοστίζει $10,56:8=1,32$.

17 Από δύο σούπερ μάρκετ αγοράσαμε φέτα της ίδιας ποιότητας. Στο πρώτο αγοράσαμε 2,5 κιλά και πληρώσαμε 12€, ενώ στο δεύτερο αγοράσαμε 1250 γραμμάρια και πληρώσαμε 5,75€. Να βρείτε ποιο σούπερ μάρκετ έχει φθηνότερη φέτα.

Λύση

Στο 1ο σούπερ μάρκετ το 1 κιλο φέτα κοστίζει $12:2,5=4,8$

Στο 2ο σούπερ μάρκετ το 1 κιλό φέτα κοστίζει $5,75:1,250=4,6$

Άρα το 2ο σούπερ μάρκετ έχει καλύτερη τιμή.

18 Να υπολογίσετε τα πηλίκα των διαιρέσεων.

α. $564:23$ **β.** $62,8:13$ **γ.** $185,6:33,6$

i. με προσέγγιση δεκάτου.
ii. με προσέγγιση εκατοστού.
iii. με προσέγγιση χιλιοστού.

Λύση

α. 564	23
104	24,5217...
120	
50	
40	
170	
9	

i. $564:23=24,5$ με προσέγγιση δεκάτου.

ii. $564:23=24,52$ με προσέγγιση εκατοστού.

iii. $564:23=24,521$ με προσέγγιση χιλιοστού.

β. 62,8	13
108	4,8307...
40	
100	
9	

i. $62,8:13=4,8$ με προσέγγιση δεκάτου

ii. $62,8:13=4,83$ με προσέγγιση εκατοστού

iii. $62,8:13=4,830$ με προσέγγιση χιλιοστού.

γ. 185,6	33,6
x10 ↓	↓ x10
1856	336
1760	5,5238...
800	
1280	
2720	
32	

i. $185,6 : 33,6 = 5,5$ με προσέγγιση δεκάτου.
ii. $185,6 : 33,6 = 5,52$ με προσέγγιση εκατοστού.
iii. $185,6 : 33,6 = 5,523$ με προσέγγιση χιλιοστού.

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.

α. 80 : 5 **β.** 215 : 5 **γ.** 405 : 45
δ. 7125 : 15 **ε.** 16235 : 34 **στ.** 88576 : 346

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $5 \cdot x = 70$ **β.** $15 \cdot x = 120$ **γ.** $64 : x = 4$
δ. $x : 6 = 13$ **ε.** $56 \cdot x = 168$ **στ.** $1088 : x = 64$

3. Να γραφτούν οι διαιρέσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες:

α. $5 \cdot 13 = 65$ **β.** $7 \cdot 16 = 112$ **γ.** $12 \cdot 6 = 72$
δ. $12 \cdot 4 = 48$ **ε.** $27 \cdot 31 = 837$ **στ.** $36 \cdot 45 = 1620$

4. Να γίνουν όπου είναι δυνατό οι διαιρέσεις.

α. 2004 : 2004 **β.** 0 : 1324 **γ.** 5398 : 1 **δ.** 1932 : 0

5. Να υπολογίσετε:

α. Πόσα κουτιά γάλα θα αγοράσουμε με 1040 λεπτά, αν το ένα κουτί κοστίζει 130 λεπτά.
β. Την πλευρά ρόμβου που έχει περίμετρο 72 μέτρα
γ. Πόσο κοστίζει το κιλό τα κεράσια, αν για 2 κιλά πληρώσαμε 6€.
δ. Το ύψος ορθογωνίου που έχει περίμετρο 60 και βάση 17 μέτρα.

6. Ένας μανάβης αγόρασε πατάτες και πλήρωσε 18000 λεπτά. Όταν τις πούλησε πήρε 24000 λεπτά κερδίζοντας έτσι 20 λεπτά το κιλό. Πόσα κιλά πατάτες αγόρασε;

7. Αγοράσαμε πίτσες και δώσαμε συνολικά 42€. Αν παίρναμε 4 πίτσες παραπάνω θα δίναμε 70€. Πόσο κοστίζει η κάθε πίτσα;

8. Πληρώσαμε για 3 αναψυκτικά και 5 κρουασάν 765 λεπτά, ενώ για 6 αναψυκτικά και 14 κρουασάν πληρώσαμε 2010 λεπτά. Να βρείτε πόσο κοστίζει το κάθε αναψυκτικό και το κάθε κρουασάν.

9. Να γράψετε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών 16, 20, 60 και να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

10. Δύο αριθμοί έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 20. Να δικαιολογήσετε ότι έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες.

11. Δίνονται οι αριθμοί: 3, 5, 9, 11, 12, 15. Να βρείτε:

α. Ποιο από αυτούς είναι πρώτοι.

β. Ποιο από αυτούς είναι σύνθετοι.

12. Ένα κατάστημα παιχνιδιών αποφάσισε να κάνει δώρο στους μαθητές ενός σχολείου 33 επιτραπέζια παιχνίδια, 48 πάζλ, και 63 μπάλες. Πόσα το πολύ δέματα μπορεί να κάνει με τον ίδιο αριθμό από επιτραπέζια παιχνίδια πάζλ και μπάλες. Πόσα επιτραπέζια παιχνίδια, πάζλ και μπάλες περιέχει το κάθε δέμα;

13. Να γράψετε από τους αριθμούς 4816, 805, 3600, 28575, 933 αυτούς που διαιρούνται.

α. με το 2 **β.** με το 5 **γ.** με το 3 **δ.** με το 9

14. Να συμπληρωθούν τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς

α. i 6_53 **ii.** 9_1 ώστε να διαιρούνται με το 3

β. 8_3_ ώστε να διαιρείτε ταυτόχρονα με το 5 και το 9.

15. Να δικαιολογήσετε ότι οι αριθμοί:

α. 9α **β.** $18\alpha + 21$ **γ.** $15\alpha - 3$

όπου α φυσικός αριθμός, διαιρούνται με το 3.

16. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς

α. 126 **β.** 300 **γ.** 256 **δ.** 620

17. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36 και 124.

18. Να γίνουν οι παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.

α. $314:5$ **β.** $278:23$ **γ.** $12449:23$ **δ.** $43396:452$

19. Αν Δ είναι φυσικός αριθμός

α. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων Δ : 8

β. Να βρείτε τους φυσικούς Δ, που, διαιρούμενοι με το 8, δίνουν πηλίκο 5.

20. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α. $30,03:7$ **β.** $0,406:29$ **γ.** $18,72:5,2$ **δ.** $3,864:0,56$

21. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α. $925:100$ **β.** $31,4:1000$ **γ.** $0,04:10$ **δ.** $658,124:10000$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $47,16:x=5,24$ **β.** $3,2\cdot x=30,72$ **γ.** $1,2\cdot x=73,8$ **δ.** $69,16:x=7,6$

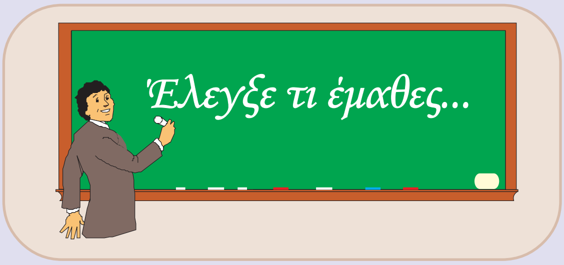
23. Πόσα περιοδικά μπορούμε να αγοράσουμε με 6,88€ αν το κάθε ένα κοστίζει 1,72€;

24. Τα 5 κιλά μήλα κοστίζουν 6,7€. Πόσο κοστίζουν το 12 κιλά μήλα;

25. Ένα βιβλιοπωλείο αγόρασε 34 βιβλία και πλήρωσε 266,56€. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κάθε βιβλίο για να κερδίσει 36,72€.

26. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $22,4:10+32,7:100+1682:1000$ **β.** $(625:1000)\cdot 10$



Ερώτηση 1

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται κοινοί διαιρέτες δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών; Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι;

Ερώτηση 2

Τι ονομάζεται ευκλείδια διαίρεση;

Ερώτηση 3

Ποια είναι τα κριτήρια διαιρετότητας ενός αριθμού με το 2, το 3, το 5 και το 9;

Άσκηση 1

Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των αριθμών 18, 48 και 64.

Άσκηση 2

Να συμπληρώσετε τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.

α. i. 12....9 **ii.** 8....73 ώστε να διαιρούνται με το 9

β. 3....4.... ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 3.

Άσκηση 3

Να βρείτε τους αριθμούς οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 6 δίνουν πηλίκο τετραπλάσιο του υπολοίπου.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τα πηλίκα των διαιρέσεων

α. $698:34$ **β.** $94,68:21$ **γ.** $895,23:52,7$

i. με προσέγγιση δεκάτου.

ii. με προσέγγιση εκατοστού.

iii. με προσέγγιση χιλιοστού.

Βιβλιομάθημα 6

• Προτεραιότητα των πράξεων
• Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

Αριθμητική παράσταση

? Τι ονομάζεται αριθμητική παράσταση; Τι ονομάζεται τιμή της αριθμητικής παράστασης;

Μια σειρά αριθμών, οι οποίοι συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων λέγεται **αριθμητική παράσταση**.
Το αποτέλεσμα που βρίσκουμε, όταν εκτελέσουμε τις πράξεις που είναι σημειωμένες στην αριθμητική παράσταση, λέγεται **τιμή** της αριθμητικής παράστασης.

Προτεραιότητα πράξεων

? Με ποια σειρά γίνονται οι πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση; Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$4^2 + \left(30:2-3\cdot 2^2\right)^2 + \left(6^2:9\right)\cdot 2-\left(15+3\right):3$$

Σε αριθμητικές παραστάσεις που δεν έχουν παρενθέσεις:

1. Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

2. Στη συνέχεια εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται.

3. Τέλος εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Σε αριθμητικές παραστάσεις που έχουν παρενθέσεις:
Εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στην συνέχεια τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση που προκύπτει.

$$4^2 + \left(30:2-3\cdot 2^2\right)^2 + \left(6^2:9\right)\cdot 2-\left(15+3\right):3$$

(Υπολογίζουμε τις δυνάμεις μέσα στις παρενθέσεις)

$$= 4^2 + \left(30:2-3\cdot 4\right)^2 + \left(36:9\right)\cdot 2-\left(15+3\right):3 =$$

(Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις στις παρενθέσεις)

$=4^2+(15-12)^2+4\cdot 2-(15+3):3=$

(Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις στις παρενθέσεις)

$=4^2+3^2+4\cdot 2-18:3=$

(Υπολογίζουμε τις δυνάμεις)

$=16+9+4\cdot 2-18:3=$

(Κάνουμε πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις)

$=16+9+8-6=$

(Κάνουμε προσθέσεις, αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται)

$25+8-6=33-6=27$

Τυποποιημένη μορφή

? Πώς μπορεί να γραφεί ένας μεγάλος αριθμός στην τυποποιημένη μορφή του; Να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή οι παρακάτω αριθμοί 3000000, 27000, 80900000, 740300000.

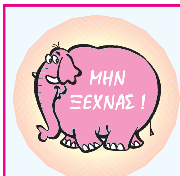
Ένας μεγάλος αριθμός στην τυποποιημένη μορφή γράφεται σαν γινόμενο ενός αριθμού α (φυσικού ή δεκαδικού) που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10, επί μια δύναμη του 10. Έχουμε:

$$3000000=3\cdot 10^6$$

$$27000=2,7\cdot 10^4$$

$$80900000=8,09\cdot 10^7$$

$$740300000=7,403\cdot 10^8$$



1. Αριθμητική παράσταση ονομάζεται μια σειρά αριθμών που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

2. Τιμή της αριθμητικής παράστασης λέγεται το αποτέλεσμα που βρίσκουμε κάνοντας τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση.

3. Σε μια αριμητική παράσταση που έχει παρενθέσεις κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την εξής σειρά:

α. Δυνάμεις

β. Πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις

γ. Προσθέσεις, αφαιρέσεις.

Αφού τελειώσουμε με τις παρενθέσεις κάνουμε τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση που προκύπτει με την σειρά που αναφέρθηκε παραπάνω.

4. Οι μεγάλοι αριθμοί γράφονται στην τυποποιημένη μορφή τους ως εξής: $\alpha\cdot 10^{\nu}$ όπου α είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10.

1 **Να υπολογιστούν οι τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:**

α. $\mathbf{18 \cdot 4 - 3 \cdot 15 + 9 \cdot 13}$ **β.** $\mathbf{78 : 3 + 34 \cdot 2 - 36 : 3}$ **γ.** $\mathbf{12{,}3 \cdot 5 - 1{,}52 : 4 + 3 \cdot 1{,}19}$

Λύση

α. $18 \cdot 4 - 3 \cdot 15 + 9 \cdot 13 =$

(Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς)

$= 72 - 45 + 117 =$

(Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

$= 27 + 117 = 144$

β. $78 : 3 + 34 \cdot 2 - 36 : 3 =$

(Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς)

$= 26 + 68 - 12 =$

(Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

$= 94 - 12 = 82$

γ. $12{,}3 \cdot 5 - 1{,}52 : 4 + 3 \cdot 1{,}19 = 61{,}5 - 0{,}38 + 3{,}57 = 61{,}12 + 3{,}57 = 64{,}69$

2 **Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:**

i. $\mathbf{A = 16 : 2 + 3^2 \cdot 4 - 6^2 : 9}$ **ii.** $\mathbf{B = 39{,}36 : 3{,}2 + \left(5{,}4^2 - 3{,}2^2\right) : 4}$

Λύση

i. $A = 16 : 2 + 3^2 \cdot 4 - 6^2 : 9 =$

(Υπολογίζουμε τις δυνάμεις)

$= 16 : 2 + 9 \cdot 4 - 36 : 9 =$

(Εκτελούμε πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις)

$= 8 + 36 - 4 =$

(Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

$= 44 - 4 = 40$

ii. $B = 39{,}36 : 3{,}2 + \left(5{,}4^2 - 3{,}2^2\right) : 4 =$

(Εκτελούμε τις δυνάμεις μέσα στην παρένθεση)

$= 39{,}36 : 3{,}2 + \left(29{,}16 - 10{,}24\right) : 4 =$

(Υπολογίζουμε την παρένθεση)

$= 39,36 : 3,2 + 18,92 : 4 =$

(Εκτελούμε τις διαιρέσεις)

$= 12,3 + 4,73 = 17,03$

❸ Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\mathbf{8\alpha^2 + (8\alpha)^2}$ **όταν** $\mathbf{\alpha = 2,1}$ **β.** $\mathbf{(6\beta)^2 - 6\beta^2}$ **όταν** $\mathbf{\beta = 0,3}$

Λύση

α. $8\alpha^2 + (8\alpha)^2 = 8 \cdot 2,1^2 + (8 \cdot 2,1)^2 = 8 \cdot 2,1^2 + 16,8^2 = 8 \cdot 4,41 + 282,24 =$

$= 35,28 + 282,24 = 317,52$

β. $(6\beta)^2 - 6\beta^2 = (6 \cdot 0,3)^2 - 6 \cdot 0,3^2 = 1,8^2 - 6 \cdot 0,3^2 = 3,24 - 6 \cdot 0,09 = 3,24 - 0,54 = 2,7$

❹ Αν $\mathbf{\alpha = 17, \beta = 9, \gamma = 2}$ **και** $\mathbf{\delta = 3}$ **να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:**

α. $\mathbf{(\beta : \delta)^2 - (\beta \cdot \gamma - \alpha)^2 \cdot \delta}$ **β.** $\mathbf{(\alpha - \gamma) : \delta - (\gamma \cdot \delta)^2 : \beta + (\alpha - \beta)^2 : \gamma}$

Λύση

α. $(\beta : \delta)^2 - (\beta \cdot \gamma - \alpha)^2 \cdot \delta = (9 : 3)^2 - (9 \cdot 2 - 17)^2 \cdot 3 = 3^2 - (18 - 17)^2 \cdot 3 = 9 - 1^2 \cdot 3 =$

$= 9 - 1 \cdot 3 = 9 - 3 = 6$

β. $(\alpha - \gamma) : \delta - (\gamma \cdot \delta)^2 : \beta + (\alpha - \beta)^2 : \gamma = (17 - 2) : 3 - (2 \cdot 3)^2 : 9 + (17 - 9)^2 : 2 =$

$= 15 : 3 - 6^2 : 9 + 8^2 : 2 = 15 : 3 - 36 : 9 + 64 : 2 = 5 - 4 + 32 = 1 + 32 = 33$

❺ Αν $\mathbf{\alpha = 15 : 5 + (3^2 - 7), \beta = (7 - 5)^3 + 3 \cdot 5 - 3^2, \gamma = (12 : 3)^2 - 5 \cdot 2}$ **και** $\mathbf{\delta = 5^2 - (2 \cdot 10 + 3)}$ **να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:**

$\mathbf{A = (\beta + \gamma) : \delta^2 + (\beta : \delta) \cdot \gamma - (\alpha^2 - \beta) \cdot \delta}$

Λύση

Υπολογίζουμε τις τιμές των α, β, γ, δ

$\alpha = 15 : 5 + (3^2 - 7) = +3 + (9 - 7) = 3 + 2 = 5$

$\beta = (7 - 5)^3 + 3 \cdot 5 - 3^2 = 2^3 + 3 \cdot 5 - 3^2 = 8 + 15 - 9 = 23 - 9 = 14$

$\gamma = (12 : 3)^2 - 5 \cdot 2 = 4^2 - 10 = 16 - 10 = 6$ και

$\delta = 5^2 - (2 \cdot 10 + 3) = 25 - (20 + 3) = 25 - 23 = 2$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των α, β, γ, δ στην παράσταση:

$A = (\beta + \gamma) : \delta^2 + (\beta : \delta) \cdot \gamma - (\alpha^2 - \beta) \cdot \delta = (14 + 6) : 2^2 + (14 : 2) \cdot 6 - (5^2 - 14) \cdot 2 =$

$20 : 2^2 + 7 \cdot 6 - (25 - 14) \cdot 2 = 20 : 2^2 + 7 \cdot 6 - 11 \cdot 2 = 20 : 4 + 7 \cdot 6 - 11 \cdot 2 =$

$5 + 42 - 22 = 47 - 22 = 25$

6 **Αν $x+3,7=4,2$, $y-2,1=0,3$, $0,4\cdot\omega=0,12$ και $4,8:t=3,2$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων.**

$$A=(x^2+y):0,5+(t^2+x):4-\omega^2 \qquad B=(y:\omega-x\cdot8)^2-(t:x)\cdot2$$

Λύση

Λύνουμε τις εξισώσεις για να υπολογίσουμε τα x, y, ω, t. Έχουμε:

$x+3,7=4,2$	$y-2,1=0,3$	$0,4\cdot\omega=0,12$	$4,8:t=3,2$
$x=4,2-3,7$	$y=0,3+2,1$	$\omega=0,12:0,4$	$3,2\cdot t=4,8$
$x=0,5$	$y=2,4$	$\omega=0,3$	$t=4,8:3,2$
			$t=1,5$

Υπολογίζουμε τις παραστάσεις:

$$\begin{aligned}
&A=(x^2+y):0,5+(t^2+x):4-\omega^2\\
&(0,5^2+2,4):0,5+(1,5^2+0,5):4-0,3^2=\\
&(0,25+2,4):0,5+(2,25+0,5):4-0,3^2=\\
&2,65:0,5+2,75:4-0,09=\\
&5,3+0,6875-0,09=\\
&5,9875-0,09=5,8975
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B=(y:\omega-x\cdot8)^2-(t:x)\cdot2=\\
&=(2,4:0,3-0,5\cdot8)^2-(1,5:0,5)2=\\
&=(8-4)^2-3\cdot2=\\
&=4^2-6=\\
&16-6=10
\end{aligned}$$

7 **Αν $\alpha-\beta=3,2$ και $\gamma+\delta=1,4$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης.**

$$A=2\cdot3\alpha+5^2\cdot\delta-(4^2-10)\beta+(15:3)\gamma-4\cdot5\delta$$

Λύση

$$\begin{aligned}
&A=2\cdot3\alpha+5^2\cdot\delta-(4^2-10)\beta+(15:3)\gamma-4\cdot5\delta=2\cdot3\alpha+5^2\cdot\delta-(16-10)\beta+5\gamma-4\cdot5\cdot\delta=\\
&=6\alpha+25\delta-6\beta+5\gamma-20\delta=6\alpha-6\beta+25\delta-20\delta+5\gamma=6(\alpha-\beta)+\delta(25-20)+5\gamma=\\
&=6(\alpha-\beta)+5\delta+5\gamma=6(\alpha-\beta)+5(\delta+\gamma)=6\cdot3,2+5\cdot1,4=19,2+7=26,2
\end{aligned}$$

8 **Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:**

α. 45000000 **β.** 9830000 **γ.** 27600000000 **δ.** 35900000
ε. 827300000 **στ.** 524000 **ζ.** 3000000 **η.** 13200000

Λύση

α. $45000000=4,5\cdot10^7$ **β.** $9830000=9,83\cdot10^6$ **γ.** $27600000000=2,76\cdot10^{10}$

δ. $35900000=3,59\cdot10^7$ **ε.** $827300000=8,273\cdot10^8$ **στ.** $524000=5,24\cdot10^5$

ζ. $3000000=3\cdot10^6$ **η.** $13200000=1,32\cdot10^7$

9 **Να γράψετε στη δεκαδική μορφή τους αριθμούς:**

α. $\mathbf{2{,}03\cdot 10^6}$ **β.** $\mathbf{8{,}64\cdot 10^7}$ **γ.** $\mathbf{4{,}721\cdot 10^9}$ **δ.** $\mathbf{5{,}1\cdot 10^8}$

Λύση

α. $2{,}03\cdot 10^6 = 2030000$ **β.** $8{,}64\cdot 10^7 = 86400000$

γ. $4{,}721\cdot 10^9 = 4721000000$ **δ.** $5{,}1\cdot 10^8 = 510000000$

10 **Να γράψετε στην τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς.**

α. $\mathbf{3{,}4\cdot 10^6 + 5{,}2\cdot 10^6}$ **β.** $\mathbf{6\cdot 10^4 + 1{,}4\cdot 10^5}$ **γ.** $\mathbf{300\cdot 10^5}$ **δ.** $\mathbf{520\cdot 10^6}$

Λύση

α. $3{,}4\cdot 10^6 + 5{,}2\cdot 10^6 = 10^6\cdot(3{,}4+5{,}2) = 8{,}6\cdot 10^6$

β. $6\cdot 10^4 + 1{,}4\cdot 10^5 = 60000 + 140000 = 200000 = 2\cdot 10^5$

γ. $300\cdot 10^5 = 300\cdot 100000 = 30000000 = 3\cdot 10^7$

δ. $520\cdot 10^6 = 520\cdot 1000000 = 520000000 = 5{,}2\cdot 10^8$

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = 12\cdot 7 + 9\cdot 8 - 3\cdot 15$ $B = 35:5 + 12\cdot 5 - 90:15$ $\Gamma = 18\cdot 9 - 17\cdot 3 + 224:56$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $(14{,}32 - 5{,}7):(0{,}75 + 0{,}05)$ **β.** $(73{,}2:3)\cdot 4 - (19{,}08:1{,}8)\cdot 3$

γ. $(9{,}3\cdot 5 - 27{,}4) + (0{,}56:8 + 1{,}03)$

δ. $9\cdot 27 - (1{,}2:8) - (12{,}88:5{,}6) + 3\cdot(7{,}22 - 5{,}04)$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = 18:3^2 + 4\cdot 3 + 3\cdot(4+2^2) + 2^5:16 - 27:3^2$

$B=(2\cdot 9-4\cdot 3)^2+(6+4-2)\cdot 3-(7-2\cdot 3)^{20}$

$\Gamma=(3^2-2^3)^{2004}+(4\cdot 3+6^2\cdot 3)-6\cdot 3-4(5^2-6\cdot 4)+11$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $0,8+(6,2^2-4,3)+5,2\cdot 3-5,62:2$ **β.** $4,3+(6,92-4,3)+7,1^2-2,1$

γ. $(3-2,8)^2+(5^3-1,2^2)5$ **δ.** $5-4,2+6,1\cdot 4^2+8\cdot 2-5,2\cdot 2^3+6,1^2$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $9x^2+(9x)^2$ όταν $x=0,7$

β. $(15t)^2-15\cdot t^2$ όταν $t=1,5$

γ. $2y^2+5y+4$ όταν $y=0,02$

6. Αν $\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=4$ και $\delta=9$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$A=(\alpha-\beta)^2\cdot\gamma+(\delta\cdot\gamma):\beta-(\gamma^2-\delta)$ $B=(\delta^2-\gamma^2):\alpha+(\beta\cdot\gamma)^2-(\delta-\alpha)^3$

7. Αν $x=2,1,\ y=4,\ \omega=3,2$ και $t=1,6$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων.

$A=(y-x)^2+(\omega:t)^5-(t\cdot y):\omega$ $B=(x+\omega)^2\cdot y-t^2\cdot y^2+y^3$

8. Αν $x+26=31,\ 17\cdot y=51,\ 15-\omega=11$ και $t:2=3$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων.

$A=(t:y)^6+2\cdot x^2-(8\cdot x):\omega-t^2:y$ $B=(2\cdot\omega)^2-y^3-(3t:2)+(x+2)^2$

$\Gamma=7\omega+t^2:9-(15\cdot y+\omega)+x^2\cdot\omega$

9. Αν $\alpha+12,5=13,9,\ \ 22,4-\beta=19,3,\ \ 14,8\cdot\gamma=37$ και $1,2:\delta=6$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A=3\cdot\alpha^2-(5\gamma-4\beta)^2+(8\cdot\delta:2)\cdot 4$ $B=(\alpha\cdot\gamma)^2+8\cdot\beta-4,8:\delta+7\alpha$

$\Gamma=(\alpha+\beta-\gamma)^5-(5\cdot\alpha-4)^3+9\cdot\delta$

10. Να γράψετε του παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:

α. 821000000 **β.** 5320000 **γ.** 7140000000
δ. 14100000 **ε.** 6020000 **στ.** 28000000

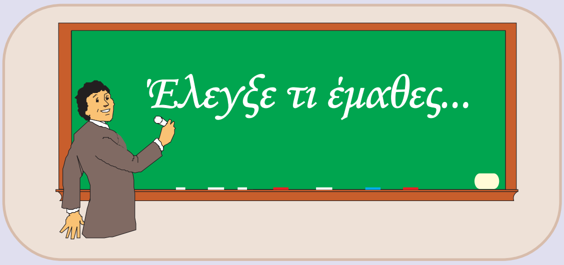
11. Να γράψετε στη δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:

α. $3,2 \cdot 10^6$ **β.** $1,04 \cdot 10^8$ **γ.** $5,32 \cdot 10^8$

δ. $2,538 \cdot 10^{11}$ **ε.** $8,72 \cdot 10^5$ **στ.** $6 \cdot 10^4$

12. Να γραφούν από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο οι αριθμοί:

$$7,4 \cdot 10^6, \quad 2 \cdot 10^3, \quad 2,4 \cdot 10^6, \quad 3 \cdot 10^9, \quad 6,2 \cdot 10^7$$



Ερώτηση 1

Τι ονομάζεται αριθμητική παράσταση και τι τιμή της αριθμητικής παράστασης;

Ερώτηση 2

Με ποιά σειρά γίνονται οι πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση; Οι υπολογισμοί στην παρακάτω παράσταση είναι σωστοί;

$$A = 7 + 5 \cdot 3^2 = 12 \cdot 3^2 = 12 \cdot 9 = 108$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$A = \left(6^2 - 29\right)^2 + \left(108:12\right)^2 - 4^3 \cdot 2$ $\qquad$ $B = \left(3^4 - 4^3\right) \cdot 4 + 5^2 \cdot 2^2 - \left(90:3^2\right)$

Άσκηση 2

Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α. 31200000 **β.** 1110000000 **γ.** 456000 **δ.** 87130000

Κεφάλαιο 2ο

Μετρήσεις μεγεθών

βιβλιομμάθημα 7: -Παράσταση αριθμών με σημεία ευθείας
-Παράσταση σημείων στο επίπεδο
-Μέτρηση μεγεθών
-Μέτρηση μήκους τμήματος
-Οι κυριότερες μονάδες μήκους
-Όργανα μέτρησης μήκους
-Το μέτρο σαν μονάδα μήκους

βιβλιομμάθημα 8: -Εμβαδό επίπεδων επιφανειών
-Οι κυριότερες μονάδες εμβαδού
-Σχέσεις τετραγωνικού μέτρου με υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσιά του
-Εμβαδό ορθογωνίου και τετραγώνου

βιβλιομμάθημα 9: -Όγκος στερεών
-Οι κυριότερες μονάδες όγκου
-Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

βιβλιομμάθημα 10: -Μονάδες μέτρησης του χρόνου
-Μονάδες μάζας
-Νομισματικές μονάδες

βιβλιομάθημα 7

- Παράσταση αριθμών με σημεία ευθείας
- Παράσταση σημείων στο επίπεδο
- Μέτρηση μεγεθών
- Μέτρηση μήκους τμήματος
- Οι κυριότερες μονάδες μήκους
- Όργανα μέτρησης μήκους
- Το μέτρο σαν μονάδα μήκους

Παράσταση αριθμών με σύστημα σημείων ευθείας.

Πώς παριστάνουμε αριθμούς με σημεία ευθείας. Ποια ευθεία ονομάζεται βαθμολογημένη ή άξονας; Τι είναι η κλίμακα οργάνου;

Σε μια ευθεία (ε) παίρνουμε ένα σημείο Ο που λέγεται αρχή και παριστάνει τον αριθμό μηδέν. Δεξιά απ'το Ο διαλέγουμε ένα άλλο σημείο Α τέτοιο ώστε $(OA)=1$. Έπειτα κατασκευάζουμε τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ...κ.λ.π. έτσι ώστε όλα να έχουν το ίδιο μήκος με το ΟΑ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, ... παριστάνονται απ'τα σημεία Β, Γ, Δ, ... αντίστοιχα. Η παραπάνω ευθεία λέγεται **βαθμολογημένη ή άξονας**.

Η **κλίμακα οργάνου** είναι ένα βαθμολογημένο τόξο ή ένα τμήμα της βαθμολογημένης ευθείας που το χρησιμοποιούμε σε διάφορα όργανα μέτρησης.

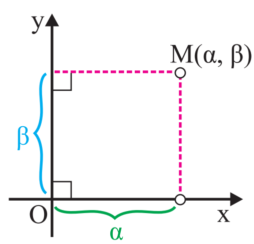
Παράσταση σημείων στο επίπεδο.

Τί ονομάζουμε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών; Τί ονομάζεται σύστημα ορθογώνιων αξόνων; Τι ονομάζεται τετμημένη και τι τεταγμένη ενός σημείου; Ποιές είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου;

Διατεταγμένο ζεύγος αριθμών λεγεται ένα ζεύγος αριθμών που τα μέλη του έχουν προκαθορισμένη σειρά.

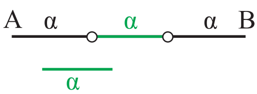
π.χ. $(3,5)$, $(-2,8)$

Σύστημα ορθογωνίων αξόνων είναι δύο κάθετοι άξονες Οx, Oy, όπου το σημείο Ο λέγεται αρχή των αξόνων.



Κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(α,β)$ ορίζει την θέση ενός και μόνο σημείου στο επίπεδο. Ο αριθμος α λέγεται **τετμημένη** του σημείου και αριθμός β **τεταγμένη** του σημείου. Το ζεύγος (α,β) αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου. Η αρχή των αξόνων Ο έχει συντεταγμένες $(0,0)$.

Μέτρηση μήκους τμήματος



AB = 3α

Πώς μετράμε το μήκος ευθύγραμμου τμήματος;

Για να μετρήσουμε το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB συγκρίνουμε το AB με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα έστω α που το έχουμε επιλέξει ως μονάδα μέτρησης (συνήθως λέγεται μονάδα μήκους). Το αποτέλεσμα της σύγκρισης ονομάζεται μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος προφανώς εξαρτάται απ'την μονάδα μετρήσεως που θα χρησιμοποιήσουμε.

Οι κυριότερες μονάδες μήκους.

Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης των μηκών; Ποια είναι τα πολλαπλάσια του μέτρου; Ποιες οι υποδιαιρέσεις του μέτρου; Ποιες είναι οι άλλες μονάδες μέτρησης του μήκους;

Η βασική μονάδα μέτρησης των μηκών είναι το μέτρο που συμβολίζεται με (m).

Τα πολλαπλάσια του μέτρου είναι:

- Δεκάμετρο $(\mathrm{dam}): 1\mathrm{dam} = 10\mathrm{m}$
- Εκατόμετρο $(\mathrm{hm}): 1\mathrm{hm} = 100\mathrm{m}$
- Χιλιόμετρο $(\mathrm{km}): 1\mathrm{km} = 1000\mathrm{m}$

Οι υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι:

- Δεκατόμετρο ή παλάμη $(\mathrm{dm}): 1\mathrm{dm} = 0{,}1\mathrm{m}$
- Εκατοστόμετρο ή πόντος $(\mathrm{cm}): 1\mathrm{cm} = 0{,}01\mathrm{m}$
- Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό $(\mathrm{mm}): 1\mathrm{mm} = 0{,}001\mathrm{m}$

Άλλες μονάδες μέτρησης μήκους είναι:

Η γιάρδα (yrd), το πόδι (ft), η ίντσα (in), το μίλι και το ναυτικό μίλι. Οι σχέσεις των μονάδων αυτών μεταξύ τους και με το μέτρο είναι:

$$1\text{yrd} = 3\text{ft} = 36\text{in}$$

$$1\text{ft} = 12\text{in}$$

$$1\text{yrd} = 0,9144\text{m}$$

$$1\text{ft} = 0,3048\text{m}$$

$$1\text{in} = 0,0254\text{m}$$

$$1\text{μίλι} = 1609\text{m}$$

$$1 \text{ ναυτικό μίλι} = 1852\text{m}.$$

Όργανα μέτρησης μήκους

Ποιά είναι τα όργανα μέτρησης του μήκους;

Συνήθως για μικρά μήκη χρησιμοποιούμε το υποδεκάμετρο. Για μεγάλα μήκη χρησιμοποιούμε το μέτρο, το δίμετρο, τη μετροταινία. Για πολύ μικρά μήκη χρησιμοποιούμε το παχύμετρο και το μικρόμετρο.

Το μέτρο ως μονάδα μήκους

1,5m	m	1,5m
	x10 ↓ ↑ :10	
15dm	dm	15dm
	x10 ↓ ↑ :10	
150cm	cm	150cm
	x10 ↓ ↑ :10	
1500mm	mm	1500mm

Γιατί βοηθά η δεκαδική παράσταση του μήκους; Ποιό είναι το διάγραμμα που μας βοηθά στις μετατροπές του μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντρίστροφα;

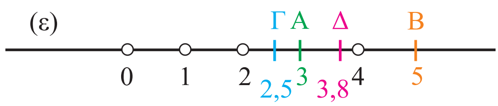
Η δεκαδική παράσταση του μήκους διευκολύνει γιατί έχει το πλεονέκτημα ότι με απλή μετάθεση της υποδιαστολής έχουμε το μήκος εκφρασμένο σε υποδιαιρέσεις ή πολλαπλάσια του μέτρου. Το διπλανό διάγραμμα βοηθά στις μετατροπές του μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα.

1. Διατεταγμένο ζεύγος αριθμών λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών που τα μέλη του έχουν προκαθορισμένη σειρά.
2. Σύστημα ορθογωνίων αξόνων είναι δύο κάθετοι άξονες Οx, Oy όπου το σημείο $O(0,0)$ λέγεται αρχή των αξόνων.
3. Βασική μονάδα μετρήσεως του μήκους είναι το ένα μέτρο (1m).
4. Για να μελετήσουμε μια μονάδα μήκους σε υποδιαιρέσεις ή πολλαπλάσια του μέτρου χρησιμοποιούμε το διάγραμμα.

1 **Να παρασταθούν με σημεία ενός άξονα οι αριθμοί:**

α. 3 **β. 5** **γ. 2,5** **δ. 3,8**

Λύση



$A(3,0)$ $B(5,0)$ $\Gamma(2{,}5,0)$ $\Delta(3{,}8,0)$

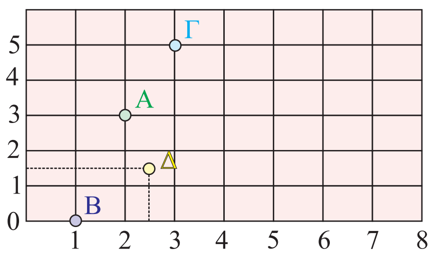
2 **Να γράψετε τα διατεταγμένα ζεύγη που σχηματίζονται από τους αριθμούς 2, 3, 8.**

Λύση

Τα διατεταγμένα είναι: $(2,3),(3,2),(2,8),(8,2),(3,8),(8,3)$

3 **Σε τετραγωνισμένο χαρτί να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων: $A(2,3)$, $B(1,0)$ $\Gamma(3,5)$, $\Delta(2.5,1.5)$**

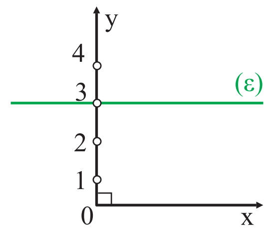
Λύση



4 **Να βρεθεί η ευθεία στην οποία βρίσκονται όλα τα σημεία που έχουν τεταγμένη 3.**

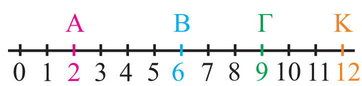
Λύση

Τα σημεία που έχουν τεταγμένη 3 βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο τεταγμένη 3.



5 **Πάνω στον άξονα παίρνουμε τα σημεία Α, Β που παριστάνουν τους αριθμούς 2,6 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι αριθμοί που παριστάνουν τα σημεία Κ, Λ όπου το Β είναι μέσο του ΑΚ και Λ το μέσο του ΒΚ.**

Λύση



Το Κ αντιστοιχεί στον αριθμό 12 και το Λ στον αριθμό 9.

6 **Να τραπούν α. τα 6,5Km σε m και β. τα 12500m σε Km.**

Λύση

α. $6,5\text{Km} = (6,5 \cdot 1000)\text{m} = 6500\text{m}$

β. $12500\text{m} = (12500 : 1000)\text{Km} = 12,5\text{Km}$

7 **Να τραπούν σε dm και σε cm τα παρακάτω μήκη:**

α. 960mm **β. 6,4m** **γ. 0,5Km** **δ. 0,9m**

Λύση

α. $960\text{mm} = 960 : 100 = 9,6\text{dm}$
$960\text{mm} = 960 : 10 = 96\text{cm}$

β. $6,4\text{m} = 6,4 \cdot 10 = 64\text{dm}$
$6,4\text{m} = 6,4 \cdot 100 = 640\text{cm}$

γ. $0,5\text{Km} = 0,5 \cdot 1000 = 500\text{m} = 500 \cdot 10 = 5000\text{dm}$
$0,5\text{Km} = 500\text{m} = 500 \cdot 100 = 50000\text{cm}$

δ. $0,9\text{m} = 0,9 \cdot 10 = 9\text{dm}$
$0,9\text{m} = 0,9 \cdot 100 = 90\text{cm}$

8 **Να τραπούν σε m τα μήκη:**

α. 3dm και 5cm **β. 2m, 8cm και 9mm** **γ. 12m 3dm 4mm**

Λύση

α. $3\text{dm}\ \text{και}\ 5\text{cm} = \frac{3}{10}\text{m}\ \text{και}\ \frac{5}{100} = 0,35\text{m}$

β. $2\text{m}\ 8\text{cm}\ 9\text{mm} = 2\text{m}\ \text{και}\ \frac{8}{100}\ \text{και}\ \frac{9}{1000} = 2,089\text{m}$

γ. $12m\ 3dm\ 4mm = 12m \text{ και } \frac{3}{10}m \text{ και } \frac{4}{1000} = 12,304m$

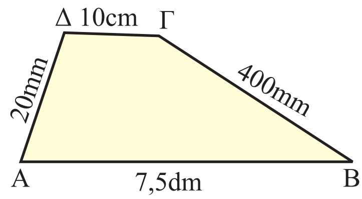
9 **Ένα χωράφι είναι σχήματος τετραπλεύρου με πλευρές ΑΒ = 305m, ΒΓ = 100m, ΓΔ = 500m, ΔΑ = 180m.**
Να βρεθεί η περίμετρος του σε m και σε Km.

Λύση

Η περίμετρος του χωραφιού Π ισούται:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 305 + 100 + 500 + 180 = 1085m = 1,085Km$$

10 **Να βρεθεί η περίμετρος του διπλανού σχήματος.**



Λύση

Είναι $7,5dm = 7,5 \cdot 100 = 750mm$ και

$10cm = 10 \cdot 10 = 100mm$

οπότε η περίμετρος είναι:

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 750 + 400 + 100 + 200 = 1450mm$$

11 **Να βρεθεί η περίμετρος ενός τριγώνου με ΑΒ = 5,5cm, ΒΓ = 3in και ΑΓ = 0,5ft.**

Λύση

Είναι η περίμετρος του τριγώνου:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 5,5cm + 3 \cdot 2,54cm + 0,5 \cdot 30,48cm$$
$$= 5,5 + 7,62 + 15,24 = 28,36cm$$

12 **Να γραφούν τα παρακάτω μήκη από το μεγαλύτερο στο μικρότερο.**

α. 120dm **β. 9m** **γ. 15000mm** **δ. 0,01Km**

Λύση

Είναι: $120dm = \frac{120}{10} = 12m$

$15000mm = \frac{15000}{1000} = 15m$

$0,01Km = 0,01 \cdot 1000 = 10cm$

άρα: $15000mm > 120dm > 0,01Km > 9m$

13 **Μια εταιρεία πωλεί ένα κομμάτι ύφασμα 2,34€ το μέτρο και μια άλλη εταιρεία το ίδιο κομμάτι ύφασμα το πωλεί 2,93€ την yrd. Ποιά απ'τις δύο εταιρείες πωλεί ακριβότερα το ύφασμα;**

Λύση

Η δεύτερη εταιρεία πωλεί το μέτρο το ύφασμα: $\frac{2,93}{0,9144}=3,20$ περίπου. Άρα είναι και η πιο ακριβή.

1. Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος (α) είναι 50 με μονάδα μέτρησης το (κ). Πόσο είναι το μήκος του αν ως μονάδα μέτρησης πάρουμε το (5κ)

2. Να σχεδιαστεί ένας άξονας με αρχή Ο και να ονομαστούν Α, Β, Γ, Δ τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 1, 3, 5, 12 αντίστοιχα. Στην συνέχεια να υπολογιστούν τα μήκη ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ με μονάδα μέτρησης το μήκος ΟΑ.

3. Να βρεθεί η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται όλα τα σημεία με τετμημένη 6

4. Να παρασταθούν πάνω σε άξονα οι δεκαδικοί 1,25 και 2,38.

5. Να τραπούν σε dm και κατόπιν σε cm τα παρακάτω μήκη:
α. 360mm **β.** 2,5m **γ.** 0,4Km **δ.** 0,1m

6. Να τραπούν:
α. τα 165cm σε m **β.** τα 2550mm σε cm **γ.** τα 350mm σε m

7. Να τραπούν σε cm τα μήκη:
α. 2dm 5cm **β.** 2m 3cm 5mm **γ.** 38m 3dm 6mm

8. Ένα οικόπεδο είναι σχήματος τραπεζίου με πλευρές ΑΒ = 105,8m, ΒΓ = 30m, ΓΔ = 15,8m και ΔΑ = 20m. Να βρεθεί η περίμετρος του σε m, Km, dm, cm, mm.

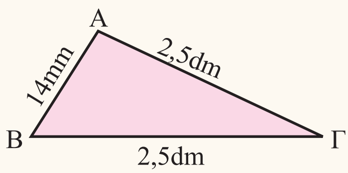
9. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι $AB = 3,5m$, $B\Gamma = 45dm$, $\Gamma\Delta = 260cm$, $\Delta A = 56dm$. Να βρεθεί η περίμετρος του σε m, dm, cm.

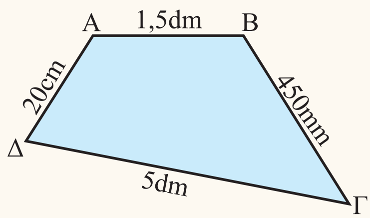
10. Να συγκριθούν τα μήκη 2850mm και 2,85m.

11. Να γραφτούν τα παρακάτω μήκη απ'το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

α. 1,2m **β.** 102dm **γ.** 10300mm **δ.** 1035cm **ε.** 0,015Km

12. Να βρεθεί η περίμετρος στα παρακάτω σχήματα:



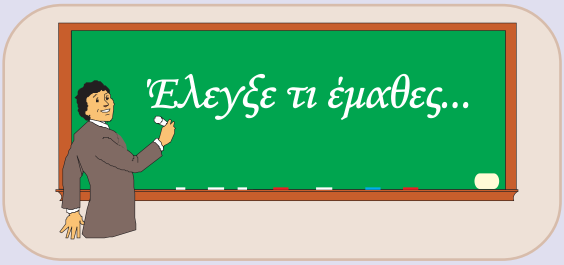


13. Να γραφούν με συμμιγείς αριθμούς τα παρακάτω μήκη:

α. 3,28m **β.** 0,09m **γ.** 0,014m **δ.** 15,308mm

14. Αγόρασε κάποιος 40yrd ύφασμα και πλήρωσε 200€. Να βρεθεί πόσα € αγόρασε το μέτρο.

15. Ένας έμπορος αγόρασε τρία κομμάτια από το ίδιο ύφασμα. Το πρώτο κομμάτι είχε μήκος 130yrd, το δεύτερο 100yrd και 6in και το τρίτο κομμάτι 80yrd και 3ft. Να βρεθεί πόσα Ευρώ θα εισπράξει αν πουλήσει και τα τρια κομμάτια προς 8yrd το μέτρο.



Ερώτηση 1

Τι είναι μέγεθος, μονάδα μέτρησης, μέτρηση και από τι εξαρτάται η τιμή μέτρησης ενός μεγέθους.

Ερώτηση 2

Ποιά είναι τα πολλαπλάσια και ποιές οι υποδιαιρέσεις του μέτρου; Ποιές οι σχέσεις του με το μέτρο;

Ερώτηση 3

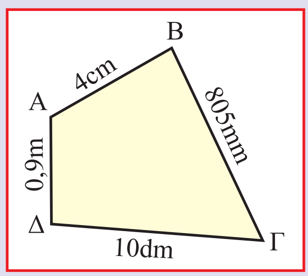
Πώς παριστάνεται ένα σημείο στο επίπεδο. Ποιο σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί στο ζεύγος $(0,0)$;

Άσκηση 1

Ένας κήπος σχήματος ορθογωνίου έχει διαιρέσεις 100m, 150dm. Θέλουμε να τον περιφράξουμε με συρματόπλεγμα που κοστίζει 4€ το τρέχον μέτρο. Πόσο θα στοιχίσει η περίφραξη;

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.



Βιβλιομάθημα 8

- Εμβαδό επίπεδων επιφανειών.
- Οι κυριότερες μονάδες εμβαδού.
- Σχέσεις τετραγωνικού μέτρου με υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσιά του.
- Εμβαδό ορθογωνίου και τετραγώνου.

Εμβαδόν επιφάνειας

Πώς μετράμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας; Από τι εξαρτάται το εμβαδόν μιας επιφάνειας;

Για να μετρήσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας ($ε_1$), συγκρίνουμε με την επιφάνεια ($ε_1$) με το εμβαδό μιας άλλης επιφάνειας ($ε_2$) που το έχουμε επιλέξει ως μονάδα μέτρησης. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης αυτής ονομάζεται εμβαδό της επιφάνειας ($ε_1$). Προφανώς το εμβαδό μιας επιφάνειας εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

Βασικές μονάδες μέτρησης εμβαδού.

Ποιά είναι η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού. Ποιά είναι τα πολλαπλάσια και ποιές οι υποδιαιρέσεις του (m^2) και ποιά η σχέση τους με αυτό.

• Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2) που είναι ένα τετράγωνο πλευράς 1 m.

• Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι:

- τετραγωνικό δεκατόμετρο $\left(dm^2\right): 1dm^2 = \dfrac{1}{100} m^2$

- τεραγωνικό εκατοστόμετρο $\left(cm^2\right): 1cm^2 = \dfrac{1}{10000} m^2$

- τετραγωνικό χιλιοστόμετρο $\left(mm^2\right): 1mm^2 = \dfrac{1}{1000000} m^2$

Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου είναι:

- τετραγωνικό δεκάμετρο $\left(dam^2\right): 1dam^2 = 100m^2$

- τετραγωνικό εκατόμετρο $\left(hm^2\right): 1hm = 10000m^2$

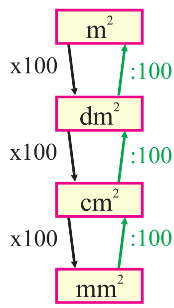
- τετραγωνικό χιλιόμετρο $(Km^2) = 1Km^2 = 1000000m^2$

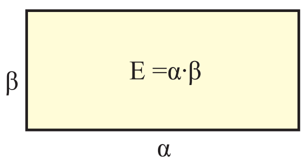
Στην χώρα μας χρησιμοποιούμε για την μέτρηση εμβαδού μεγάλης έκτασης κυρίως αγρών ή δασικών εκτάσεων το στρέμμα και είναι: **1 στρέμμα = 1000m²**.

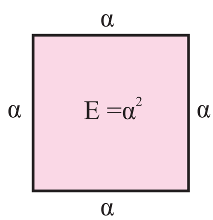
Ποιό είναι το διάγραμμα που μας βοηθάει στη μετατροπή του τετραγωνικού μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα;

Το διάγραμμα είναι το εξής:

Διάγραμμα μετατροπής του τετραγωνικού μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα.







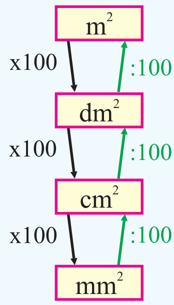
Με τι ισούται το εμβαδόν ενός ορθογωνίου; Με τι ισούται το εμβαδόν ενός τετραγώνου;

Το εμβαδόν ενός **ορθογωνίου** είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεων του, μετρημένων με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Το εμβαδόν ενός **τετραγώνου** ισούται με το μήκος της πλευράς του υψωμένο στο τετράγωνο.

1. Η βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι $1m^2$.

2. Το διάγραμμα που χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε το m^2 σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα είναι:



3. Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται απ'την σχέση $E = \alpha \cdot \beta$ όπου α, β οι διαστάσεις του μετρημένες με την ίδια μονάδα μέτρησης.

4. Το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται απ'την σχέση $E = \alpha^2$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου.

1 **Να τραπούν σε m^2 τα επόμενα εμβαδά:**

$\alpha = 1{,}5dm^2$ $\quad \beta = 12255mm^2$ $\quad \gamma = 0{,}01dm^2$ $\quad \delta = 135000cm^2$

Λύση

Είναι: $\alpha = 1{,}5 : 100 = 0{,}015m^2$

$\beta = 12255 : 1000000 = 0{,}012255m^2$

$\gamma = 0{,}01 : 100 = 0{,}0001m^2$

$\delta = 135000 : 10000 = 13{,}5m^2$

2 **Να τραπούν σε dm^2 τα επόμενα εμβαδά:**

$\alpha = 3{,}5Km^2$ $\beta = 45500cm^2$ $\gamma = 0{,}12Km^2$ $\delta = 1550000mm^2$

Λύση

Είναι: $\alpha = 3{,}5Km^2 = 3{,}5 \cdot 1000000 = 3500000m^2 = 3500000 \cdot 100 = 350000000dm^2$

$\beta = 45 \cdot 500 : 100 = 455dm^2$

$\gamma = 0{,}12Km^2 = 0{,}12 \cdot 1000000 = 120000m^2 = 12000000dm^2$

$\delta = 1550000mm^2 = 1550000 : 10000 = 155dm^2$

3 Να τραπούν σε στρέμματα τα επόμενα εμβαδά.

α. $40000m^2$ β. $156500m^2$ γ. $1240m^2$

Λύση

$\alpha = 40000 : 1000 = 40$ στρέμματα.

$\beta = 156500 : 1000 = 156{,}5$ στρέμματα.

$\gamma = 1240 : 1000 = 1{,}24$ στρέμματα.

4 Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,5			
	4,12		
		450000	
			2300000

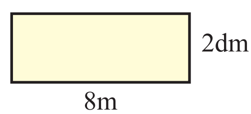
Λύση

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,5	250	25000	2500000
0,412	4,12	41200	4120000
45	4500	450000	45000000
2,3	230	23000	2300000

5 Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει μήκος 8m και πλάτος 2dm.

Λύση

Είναι $2dm = 2 : 10 = 0{,}2m$. Οπότε $E = \alpha\beta = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6m^2$.



6 Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου αν το εμβαδόν του ισούται με $400m^2$.

Λύση

Είναι $E = \alpha^2$

$E = 400cm^2$ άρα $\alpha^2 = 400cm^2$ οπότε $\alpha = 20cm$.

7 **Θελούμε να στρώσουμε ένα ορθογώνιο δάπεδο $27m^2$ με τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 30cm. Να υπολογιστεί πόσα πλακάκια θα χρειαστούν.**

Λύση

Το εμβαδόν του κάθε πλακιδίου είναι: $E = \alpha^2 = (30cm)^2 = 900cm^2 = 0,09m^2$

Άρα θα χρειαστούν: $27 : 0,09 = 300$ πλακάκια.

8 **Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει μήκος 0,25m και πλάτος 15cm.**

Λύση

Είναι $15cm = 0,15m$, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,15 = 0,5 + 70,3 = 0,8m$$

και το εμβαδόν είναι: $E = \alpha \cdot \beta = 0,25 \cdot 0,15 = 0,37m^2$.

9 **Αγόρασε κάποιος μια μοκέτα σχήματος ορθογωνίου που έχει μήκος 35dm και πλάτος 240cm. Αν το $1m^2$ κοστίζει 5€ να βρεθεί πόσα χρήματα πλήρωσε.**

Λύση

Είναι $35dm = 3,5m$ και $240cm = 2,4m$ άρα $E = \alpha \cdot \beta = 3,5 \cdot 24 = 8,4m^2$.

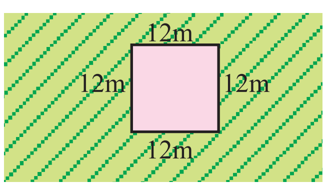
Άρα θα πληρώσει $8,4 \cdot 5 = 42$

10 **Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με πλάτος 14,4m πουλήθηκε 300€ το τετραγωνικό μέτρο και κόστισε συνολικά 60000€. Να βρεθεί το εμβαδό του και το μήκος του.**

Λύση

Το εμβαδό του οικοπέδου είναι $600 : 300 = 200m^2$. Αν τώρα x είναι το μήκος του οικοπέδου έχουμε: $14,4 \cdot x = 200$ άρα $x = 200 : 14,4 \simeq 13,8m$.

11 **Να βρεθεί το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.**



Λύση

Είναι: Εμβαδόν ορθογωνίου $=42\cdot21=882m^2$.

Εμβαδόν τετραγώνου $=12\cdot12=144m^2$.

Εμβαδόν ζητούμενο $=882-144=738m^2$.

1. Να τραπούν τα $18,5dm^2$ σε m^2, cm^2, mm^2.

2. Να τραπούν σε cm^2 τα εμβαδά:

α. $3,4m^2$ **β.** $2,5dm^2$ **γ.** $15625mm^2$ **δ.** $0,6m^2$ **ε.** $0,02dm^2$

3. Να τραπούν σε m^2 τα εμβαδά:

α. $2Km^2$ β. $570dm^2$ **γ.** $85000cm^2$ **δ.** $2800000mm^2$

4. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
5,82			
	40,4		
		320000	
			1800000

5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν ορθογωνίου με πλάτος 6dm και περίμετρο 16dm.

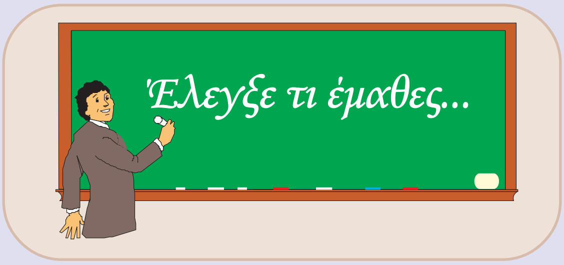
6. Η επιφάνεια μιας αυλής $45m^2$ στρώθηκε με πλακάκια τετράγωνα πλευράς 30cm. Να βρείτε πόσα πλακάκια χρησιμοποιήθηκαν.

7. Ένας κήπος έχει σχήμα ορθογωνίου και το εμβαδό του είναι 3600m^2. Αν το μήκος του είναι 7200cm να υπολογιστεί το πλάτος του. Αν στον κήπο αυτό χαράξουμε διάδρομο ορθογώνιο με διαστάσεις 7,2m και 1,5m. Να βρεθεί το εμβαδό του κήπου που απομένει για να καλλιεργηθεί.

8. Ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου με πλάτος 60m πουλήθηκε 1000€ το στρέμμα και κόστισε 12000€. Να βρεθεί το εμβαδόν του και το μήκος του.

9. Σε ένα ορθογώνιο το μήκος του είναι τριπλάσιο του πλάτους του και η περίμετρος του είναι 96m. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

10. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 30m και το εμβαδό του ισούται με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 12m. Ποιό είναι το πλάτος του ορθογωνίου;



Ερώτηση 1

Πόσες φορές μεγαλύτερο από το αρχικό θα είναι το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του;

Ερώτηση 2

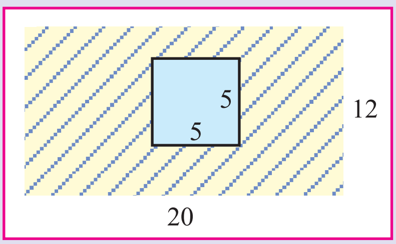
Ποια τα πολλαπλάσια και ποιες οι υποδιαιρέσεις του m^2; Ποιες οι σχέσεις του με αυτά;

Άσκηση 1

Ένας ορθογώνιος κήπος έχει περίμετρο 180m και το μήκος του είναι μεγαλύτερο απ'το πλάτος του κατά 10m. Να βρεθεί το εμβαδό του.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



βιβλιομάθημα 9

• Όγκος στερεών
• Οι κυριότερες μονάδες όγκου
• Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Όγκος στερεού σώματος

Πώς μετράμε τον όγκο ενός στερεού σώματος; Από τι εξαρτάται ο όγκος ενός στερεού;

Για να μετρήσουμε τον όγκο ενός στερεού σώματος (σ_1) συγκρίνουμε τον όγκο του στερεού σώματος (σ_1) με τον όγκο (σ_2) ενός άλλου στερεού σώματος που τον έχουμε επιλέξει ως μονάδα μέτρησης. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης αυτής ονομάζεται όγκος του στερεού σώματος (σ_1).
Προφανώς ο αριθμός που εκφράζει τον όγκο ενός στερεού σώματος εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

Κυριότερες μονάδες όγκου

Ποιά είναι η βασική μονάδα μέτρησης του όγκου; Ποιές είναι οι υποδιαιρέσεις του m^3 και ποια η σχέση τους με αυτό;

Βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3), που είναι κύβος με ακμή 1m.
Οι υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

• το κυβικό δεκατόμετρο $\left(dm^3\right): 1dm^3 = 0,001m^3$

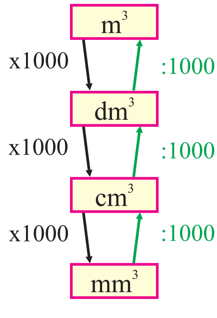
• το κυβικό εκατοστόμετρο $\left(cm^3\right): 1cm^3 = 0,000001m^3$

• το κυβικό χιλιοστόμετρο $\left(mm^3\right): 1mm^3 = 0,000000001m^3$

Χρησιμοποιούμε επίσης σαν μονάδες όγκου το λίτρο $(\ell): 1\ell = 1dm^3$ και το χιλιοστόλιτρο $(m\ell) 1m\ell = 1cm^3$.

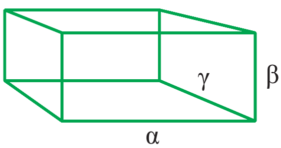
Πόιο είναι το διάγραμμα που μας βοηθά στην μετατροπή του κυβικού μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα;

Το διάγραμμα είναι το εξής:

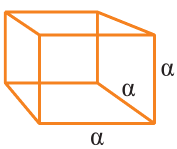


Με τι ισούται ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου; Με τι ισούται ο όγκος ενός κύβου;

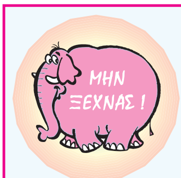
Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο των διαστάσεων του, μετρημένων με την ίδια μονάδα μήκους.



$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ όπου α, β, γ οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

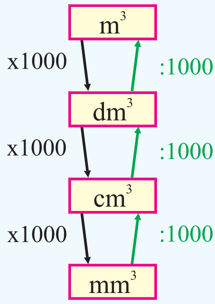


Ο όγκος ενός κύβου ισούται με το μήκος της ακμής του υψωμένο στην τρίτη. Είναι: $V = \alpha^3$



1. Ο όγκος ενός στερεού σώματος είναι ο χώρος που “καταλαμβάνει” το σώμα αυτό.
2. Η βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το $1m^3$.
3. Το λίτρο (1ℓ) είναι μονάδα μέτρησης όγκου κυρίως των υγρών.

   Είναι $1\ell = 1000cm^3 = 1000ml = 1dm^3$
4. Το διάγραμμα που χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε το m^3 σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα, είναι:



5. Ο όγκος ενός κύβου ακμής α είναι $V = \alpha^3$

6. Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ είναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

1 **Να τραπούν σε dm^3 οι όγκοι:**

α. $3m^3$ **β.** $25cm^3$ **γ.** $5{,}256m^3$

Λύση

α. $3m^3 = 3 \cdot 1000 = 3000dm^3$

β. $25cm^3 = 25 : 1000 = 0{,}025dm^3$

γ. $5{,}256m^3 = 5{,}256 \cdot 1000 = 5256dm^3$

2 **Να τραπούν σε cm^3 οι όγκοι:**

α. $0{,}08dm^3$ **β.** $30mm^3$ **γ.** $0{,}645m^3$

Λύση

α. $0,08dm^3 = 0,08 \cdot 1000 = 80cm^3$

β. $30mm^3 = 30:1000 = 0,03cm^3$

γ. $0,645m^3 = 0,645 \cdot 1000000 = 645000cm^3$

❸ Να τραπούν σε λίτρα οι όγκοι:

α. $\mathbf{25dm^3}$ **β.** $\mathbf{6m^3}$ **γ.** **525ml**

Λύση

α. $25dm^3 = 25\ell$

β. $6m^3 = 6 \cdot 1000 = 6000\ell$

γ. $525m\ell = 525:1000 = 0,525\ell$

❹ Να τραπούν σε $\mathbf{mm^3}$ οι όγκοι:

α. $\mathbf{0,12m^3}$ **β.** $\mathbf{5,75dm^3}$ **γ.** $\mathbf{3,465cm^3}$

Λύση

α. $0,12m^3 = 0,125 \cdot 10^9 = 125000000mm^3$

β. $5,75dm^3 = 5,75 \cdot 1000000 = 5750000mm^3$

γ. $3,46cm^3 = 3,465 \cdot 1000 = 3465mm^3$

❺ Να τραπούν σε $\mathbf{m^3}$ οι όγκοι:

α. $\mathbf{5200000cm^3}$ **β.** $\mathbf{55850124mm^3}$

Λύση

α. $\dfrac{5200000}{1000000} = 5,2m^3$ **β.** $\dfrac{55850124}{1000000000} = 0,55850124m^3$

❻ Να βρεθεί ο όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 2,5m, 15dm, 1150mm.

Λύση

Είναι $15dm = \dfrac{15}{10} = 1,5m$ και $1150mm = \dfrac{1150}{1000} = 1,15m$.

Άρα $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 1,15 = 4,312m^3$

❼ Να βρεθεί ο όγκος ενος κύβου με ακμή 3,2m σε:

α. $\mathbf{m^3}$ **β.** $\mathbf{dm^3}$ **γ.** $\mathbf{cm^3}$

Λύση

Είναι $V = α^2 = 3,2^3 = 32,8m^3 = 32,8 \cdot 1000 = 32800dm^3 = 32800 \cdot 1000 = 32800000cm^3$

8 **Ένας κύβος έχει όγκο $0,216m^3$. Να υπολογιστεί η ακμή του.**

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{l} V = α^3 \\ V = 0,216m^3 \end{array}\right\} α^3 = 0,216$ ή $α^3 = 0,6^3$ ή $α = 0,6m$

9 **Να βρεθεί πόσοι ασβεστόλιθοι με διαστάσεις 60cm, 15cm, 10cm, θα χρειαστούν για να χτίσουμε ένα τοίχο με όγκο $13,5m^3$.**

Λύση

Κάθε ασβεστόλιθος έχει όγκο $V = 60 \cdot 15 \cdot 10 = 9000cm^3$

δηλαδή $9000 : 1000000m^3 = 0,009m^3$

Άρα θα χρειαστούν 13,5: 0,009 = 1500 ασβεστόλιθοι.

10 **Οι διαστάσεις μιας δεξαμενής είναι $4,5m$, $20dm$, $150cm$. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει από μια βρύση που παρέχει $20,15\ell$ νερό σε μια ώρα.**

Λύση

Μετατρέπουμε τις διαστάσεις στην ίδια μονάδα μέτρησης

Είναι $4,5m = 4,5 \cdot 10 = 45dm$ και

$150cm = 150 : 10 = 15dm$

Άρα η δεξαμενή έχει όγκο $V = 45 \cdot 15 \cdot 20 = 13500dm^3$.

Επειδή σε 1 λεπτό η βρύση παρέχει 20,15 ℓ, σε μια ώρα δηλαδή σε 60 λεπτά θα παρέχει:

$$60 \cdot 20,15\ell = 1209\ell$$

Άρα για να γεμίσει τη δεξαμενή χρειάζονται: $13500 : 1209 = 11$ ώρες περίπου.

1. Να τραπούν dm^3 οι όγκοι:

α. $0,3m^3$ **β.** $10500cm^3$ **γ.** $7000000mm^3$

2. Να τραπούν σε cm^3 οι όγκοι:

α. $0,32dm^3$ **β.** $128mm^3$ **γ.** $0,18m^3$

3. Να τραπούν σε mm^3 οι όγκοι:

α. $2m^3$ β. $0,12dm^3$ **γ.** $25cm^3$

4. Να τραπούν σε m^3 οι όγκοι:

α. $35450000mm^3$ **β.** $5400000cm^3$

5. Να τραπούν σε λίτρα οι όγκοι:

α. $10m^3$ **β.** $530m^3$

6. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

cm^3	m^3	dm^3	mm^3
325000000			
	0,00034		
		55,64	
			8500000000

7. Το εμβαδόν ενός κύβου είναι $81cm^2$. Να βρεθεί ο όγκος του.

8. Ο όγκος ενός κύβου είναι $1331cm^3$. Να υπολογιστεί η ακμή του.

9. Να βρεθεί ο όγκος ενός κύβου που έχει ακμή 45m και να μετατραπεί σε cm^3 και σε ℓ.

10. Να βρεθεί ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις, 3m, 25dm, 200cm.

11. Σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το μήκος του είναι 30dm και το πλάτος του 6m. Αν ο όγκος του είναι $1980m^3$ να βρεθεί το ύψος του.

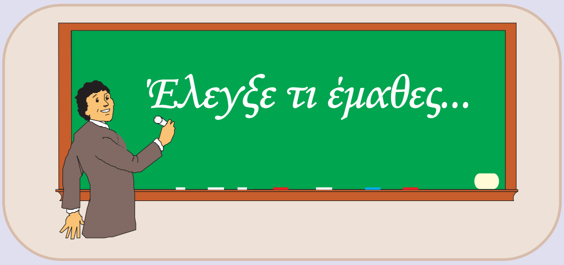
12. Μια δεξαμενή έχει μήκος 4m, πλάτος 30dm και ύψος 150cm.

α. Να βρεθεί ο όγκος της

β. Αν ρίξουμε σε αυτή 1800ℓ νερό σε τι ύψος θα φτάσει η ελέυθερη επιφάνεια του νερού;

13. Να υπολογίσετε σε cm^2 το ολικό εμβαδό ενός κύβου του οποίου ο όγκος είναι 2160ℓ.

14. Μια δεξαμενή έχει σχήμα κύβου με ακμή 10ft. Να βρεθεί η χωριτικότητα της σε λίτρα.



Ερώτηση 1

Αν τριπλασιάσουμε την ακμή ενός κύβου, πώς μεταβάλεται ο όγκος του;

Ερώτηση 2

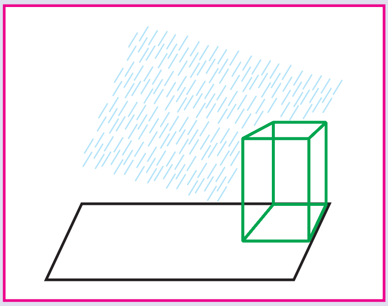
Τι είναι λίτρο και σε τι υποδιαιρείται;

Ερώτηση 3

Ποιές είναι οι υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου και ποιές οι σχέσεις τους με αυτό;

Άσκηση 1

Σε μια καταιγίδα το ύψος της βροχής είναι 5,5mm. Σε ένα ορθογώνιο οικόπεδο με διαστάσεις 30m και 40m πόσα κυβικά μέτρα νερού έχουν πέσει;



Άσκηση 2

Σε ένα κύβο χωράνε ακριβώς 8 μικρότεροι κύβοι ακμής 3cm. Να βρεθεί η ακμή του μεγάλου κύβου.