Γιώργος Λ. Μαυρίδης

Μαθηματικά

Β΄ Λυκείου

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΥΡΙΔΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Γιώργος Λ. Μαυρίδης

τηλ.: 2310.810715, 6973.306709

e-mail: glmavridis@gmail.com

ISBN: 978 – 618 – 81496 – 9 – 4

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΥΡΙΔΗ

Τηλ.: 2310.810715 & 6973.306709

E-mail: glmavridis@gmail.com

Στη μνήμη του φίλου μου
Χάρη Βαφειάδη

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό συνιστά μια ολοκληρωμένη προσπάθεια προσέγγισης των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου. Περιέχει αναλυτικά τη θεωρία του σχολικού βιβλίου δομημένη κατά θεματικές ενότητες και πλήρη μεθοδολογία για την αντιμετώπιση ενός αρκετά μεγάλου φάσματος προβλημάτων.

Στη συγγραφή του βιβλίου, η συνεισφορά του αγαπητού μου φίλου και εξαίρετου μαθηματικού **Λουκά Κανάκη** ήταν καθοριστική και ανεκτίμητη.

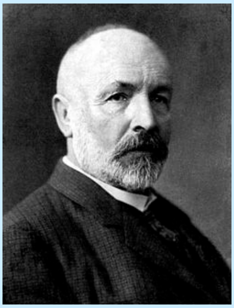
Πολύτιμο υλικό για τη συγγραφή του βιβλίου αντλήθηκε από το εγχειρίδιο «Θέματα Διανυσματικού Λογισμού», που είχα την τιμή να συγγράψω το 1997 με τον δάσκαλό μου, **Παναγιώτη Βασιλειάδη**.

Θεσσαλονίκη, Αύγουστος 2016

Γιώργος Λ. Μαυρίδης

Περιεχόμενα

Διανύσματα



«Η ουσία των Μαθηματικών έγκειται στην ελευθερία τους.»

G. Cantor

Georg Cantor

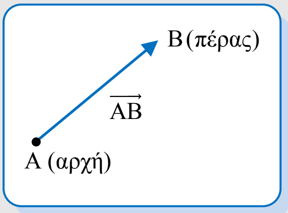
(1845 – 1918)

Ο Γκέοργκ Καντόρ, κορυφαίος μαθηματικός, περισσότερο γνωστός για τη Θεωρία Συνόλων γεννήθηκε στις 3/3/1845 στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας. Όταν ο πατέρας του αρρώστησε το 1856, η οικογένειά του μετακόμισε στη Γερμανία, πρώτα στο Βιζαμπάντεν κι έπειτα στη Φρανκφούρτη. Το 1862 ο Καντόρ αποφοίτησε από το ΕΤΗ (Ελβετικό Ομοσπονδιακό Ινστιτούτο Τεχνολογίας) της Ζυρίχης, ενώ αργότερα συνέχισε τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Στη συνέχεια έλαβε έδρα καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Χάλε. Ο Καντόρ πέθανε το 1918, ύστερα από μια περίοδο μεγάλης φτώχειας, σε ηλικία 72 ετών. Μεγάλη στιγμή της ζωής του είναι η απόδειξη πως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο, κάτι το οποίο κατάφερε με την τεχνική της διαγωνιοποίησης.

Η Έννοια του Διανύσματος

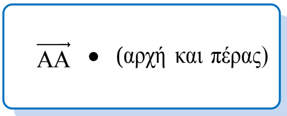
Ορισμός (διανύσματος)

Στη Γεωμετρία, ονομάζουμε **διάνυσμα** κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Δηλαδή, κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο άκρο λέγεται **πέρας** του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας το Β συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από το Α και καταλήγει στο Β.



- Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το ίδιο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ. Όμως, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ δεν είναι ίδιο με το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$.

- Ονομάζουμε **μηδενικό διάνυσμα** κάθε διάνυσμα που η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.



- Για τον συμβολισμό των διανυσμάτων πολλές φορές χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου, επιγραμμισμένα με ένα βέλος, για παράδειγμα, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, κ.λπ.

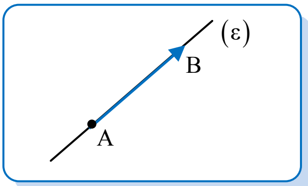
- Ονομάζουμε **μέτρο** ή **μήκος** ενός διανύσματος και συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$ την απόσταση των άκρων του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

- Το μέτρο κάθε μη μηδενικού διανύσματος είναι θετικός αριθμός.

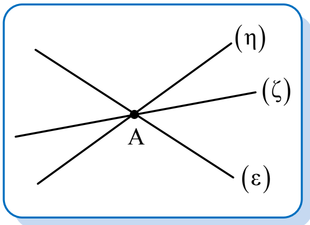
- Το μέτρο του μηδενικού διανύσματος είναι ίσο με 0.

- Ονομάζουμε **μοναδιαίο** διάνυσμα κάθε διάνυσμα που το μέτρο του είναι ίσο με 1.

- Ονομάζουμε **φορέα** ενός μη μηδενικού διανύσματος την ευθεία στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.
  Έτσι, για παράδειγμα, ο φορέας του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία ε.

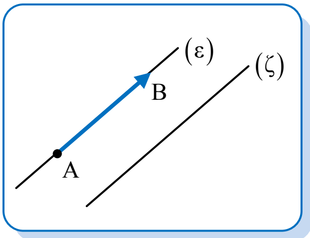


- Ονομάζουμε φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το σημείο Α. Έτσι, για παράδειγμα, κάθε μία από τις ευθείες (ε), $(\zeta), (\eta), \ldots$ θεωρείται φορέας του μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$.



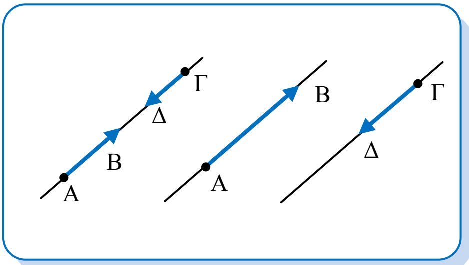
- Λέμε ότι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι **παράλληλο** προς μία ευθεία (ε) και συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} // (\varepsilon)$, αν και μόνο αν ο φορέας του $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με την ευθεία (ε).

  Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τις ευθείες (ε) και (ζ).

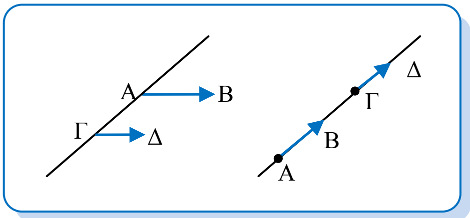


Παράλληλα διανύσματα

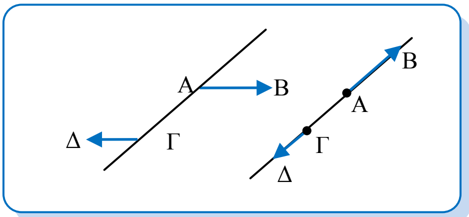
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι είναι **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ή ότι έχουν **ίδια διεύθυνση** αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα** αν και μόνο αν είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



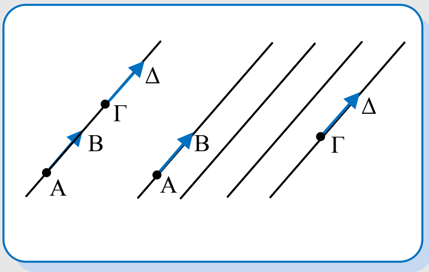
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα,** αν και μόνο αν είναι παράλληλα και έχουν αντίθετη φορά. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Ίσα-Αντίθετα Διανύσματα

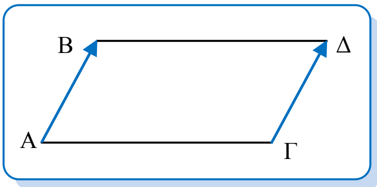
Ορισμός

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι είναι **ίσα** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αν και μόνο αν έχουν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα.

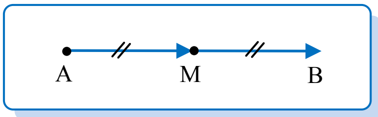


Δηλαδή $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right| \end{cases}$

- Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.
- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

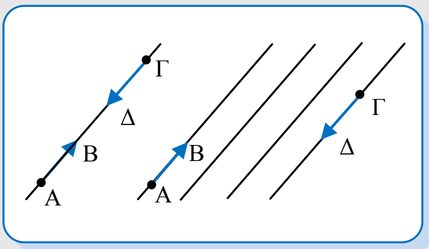


- Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισχύει
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$



Ορισμός

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι είναι **αντίθετα** και γράφουμε
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \quad ή \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$$
αν είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα.



Δηλαδή $\quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right| \end{cases}$

- Ισχύει η ισοδυναμία

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

- Ισχύει η ισότητα

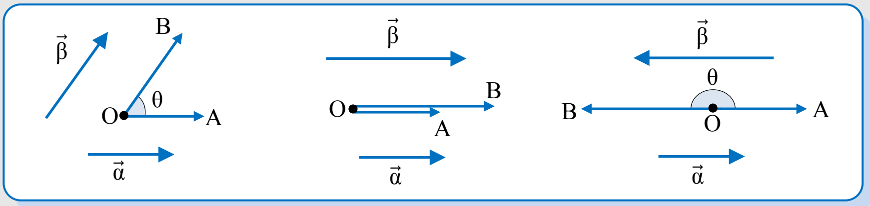
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \text{ για όλα τα σημεία } A, B$$

Γωνία δύο Διανυσμάτων

Ορισμός

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}.$$



Ονομάζουμε **γωνία** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζουμε με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ ή $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}\right)$ την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που ορίζουν οι ημιευθείας ΟΑ και ΟΒ.

- Πολλές φορές τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τη συμβολίζουμε με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ.

- Η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο.

- Ισχύουν οι σχέσεις

$$0° \le \theta \le 180° \quad \text{ή σε ακτίνα} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες

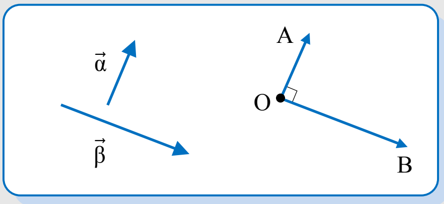
$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0$$

$$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = \pi$$

Ορισμός

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέμε ότι είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα**, αν και μόνο αν η γωνία τους είναι

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

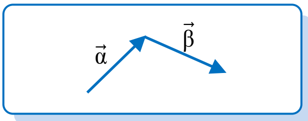


- Αν κάποιο από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \le \theta \le \pi$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι παράλληλο, ομόρροπο, αντίρροπο ακόμη και κάθετο σε οποιοδήποτε διάνυσμα.

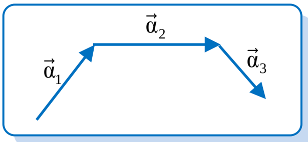
Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

Πρόσθεση διανυσμάτων

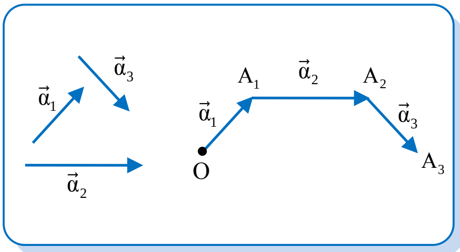
- Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **διαδοχικά** αν και μόνο αν το πέρας του ενός από αυτά συμπίπτει με την αρχή του άλλου.



- Γενικά, ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_\nu$ λέγονται διαδοχικά αν και μόνο αν το πέρας καθενός από αυτά, με εξαίρεση το τελευταίο, συμπίπτει με την αρχή του επόμενου.

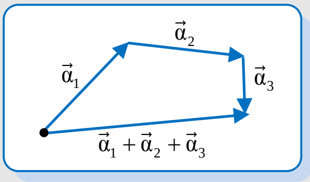


- Οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_\nu$ μπορούμε να τα καταστήσουμε διαδοχικά με τον εξής τρόπο: Θεωρούμε ένα σημείο Ο και κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1} = \vec{\alpha}_1$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\alpha}_2$, μετά $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{\alpha}_3$ κ.λπ.



Ορισμός

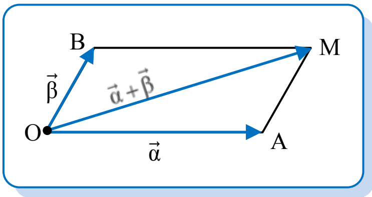
Ονομάζουμε **άθροισμα** ή **συνισταμένη** ν διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_\nu$ τα οποία καθιστούμε διαδοχικά, το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.



- Για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$.

- Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ βρίσκεται και με τον λεγόμενο **κανόνα του παραλληλογράμμου**. Θεωρούμε ένα σημείο Ο και κατασκευάζουμε διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΟΑΜΒ. Ισχύει

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}.$$



Πρόταση

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

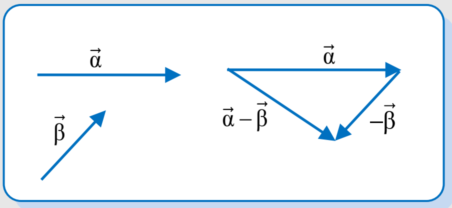
- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)
- $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική)
- $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ (Ουδέτερο στοιχείο)
- $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ (Αντίθετο στοιχείο)

Αφαίρεση Διανυσμάτων

Ορισμός

Ονομάζουμε **διαφορά** ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ από ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})}.$$

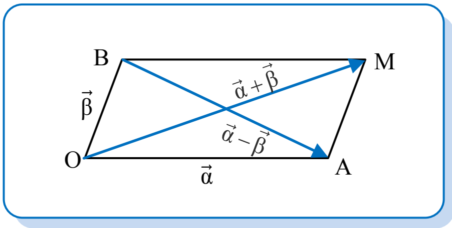


- Αν θεωρήσουμε παραλληλόγραμμο ΟΑΜΒ έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha} \text{ και } \overrightarrow{OB}=\vec{\beta},$$

τότε

$$\overrightarrow{OM}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}.$$



Διάνυσμα Θέσεως

Ορισμός

Έστω Ο ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Τότε, για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του Μ** ή **διανυσματική ακτίνα του Μ.** Το σημείο Ο που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του επιπέδου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο επίπεδο.

Πρόταση

Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ισχύει

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

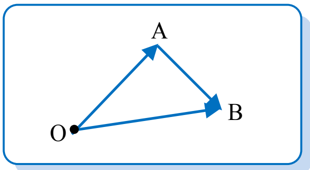
Απόδειξη

Έχουμε

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

Οπότε,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$



Δηλαδή, κάθε διάνυσμα του επιπέδου είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος, μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Πρόταση (Τριγωνική Ανισότητα)

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε σημεία O, A, B τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}\,.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

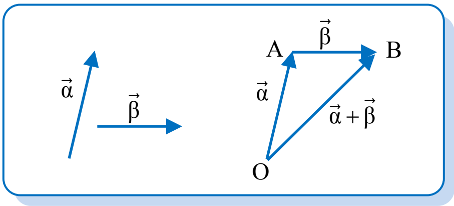
- $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.

  Τότε, με βάση την τριγωνική ανισότητα έχουμε

  $$|(OA)-(AB)| < (OB) < (OA)+(AB)$$

  δηλαδή

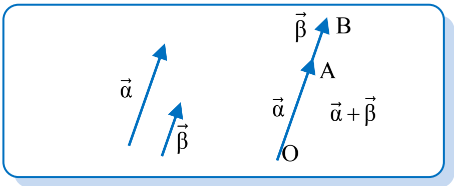
  $$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$



- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

  Τότε, $(OB) = (OA) + (AB)$.

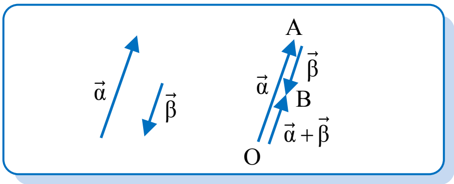
  Δηλαδή, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$



- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

  Τότε $(OB) = |(OA)-(AB)|$.

  Δηλαδή, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$

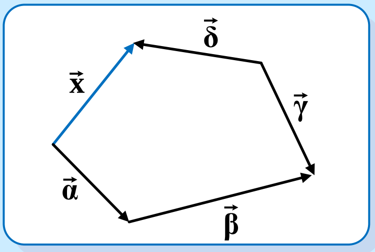


Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|.$$

Λυμένες Ασκήσεις

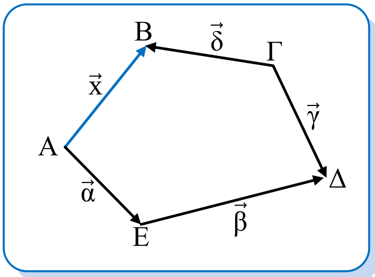
1. **Στο διπλανό σχήμα να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.**



Λύση

Έστω Α, Β, Γ, Δ και Ε τα άκρα των διανυσμάτων που εμφανίζονται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι

$$\vec{x} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{\alpha} = \overrightarrow{AE}, \quad \vec{\beta} = \overrightarrow{E\Delta},$$
$$\vec{\gamma} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = \overrightarrow{\Gamma B}.$$



Επομένως,

$$\vec{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}.$$

Όμως,

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} \\ &= \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}.\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Γράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων έτσι, ώστε να εμφανίσουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$. Υπενθυμίζουμε ότι άθροισμα ν διαδοχικών διανυσμάτων είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.

2. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ και Δ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}.$$

Λύση

α΄ τρόπος:

Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}$$

και

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}.$$

Επομένως,

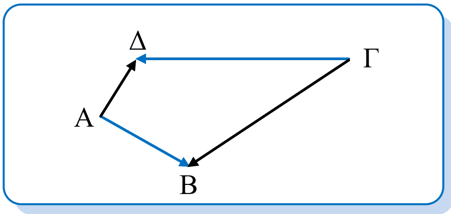
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}&=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}\\&=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}+\left(\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}\right).\end{aligned}$$

Και επειδή

$$\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Delta}=\vec{0},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}.$$



Μέθοδος των Διαδοχικών Διανυσμάτων

Γράφουμε κάθε διάνυσμα του πρώτου μέλους ως άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων έτσι, ώστε να εμφανίσουμε τα διανύσματα του δεύτερου μέλους.

β΄ τρόπος:

Για κάθε σημείο Ο έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}-\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}$

Επομένως,

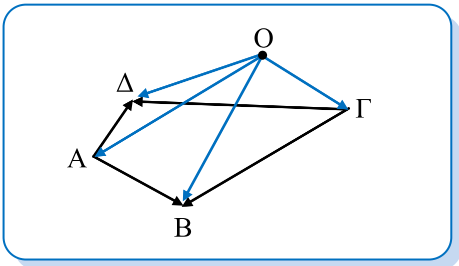
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}-\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma} \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}.$$



Μέθοδος των Διανυσματικών Ακτίνων

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο και εκφράζουμε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ως διαφορά των διανυσματικών ακτίνων του πέρατος και της αρχής. Δηλαδή γράφουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

Έτσι, στη ζητούμενη ή στη δοθείσα σχέση όλα τα διανύσματα που εμφανίζονται έχουν κοινή αρχή το σημείο Ο, πράγμα που διευκολύνει τους μετέπειτα αλγεβρικούς χειρισμούς.

3. **Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε**

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{A\Delta}}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α΄ τρόπος:

Έχουμε

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{A\Delta}}$$

Όμως,

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{B\Gamma}}$$

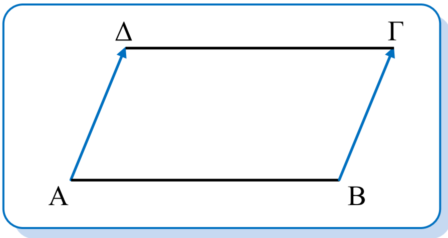
Επομένως,

$$\vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{B\Gamma}}$$

και τελικά

$$\vec{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\mathrm{B\Gamma}}.$$

Δηλαδή, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



β΄ τρόπος:

Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\vec{\mathrm{A\Gamma}} - \vec{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\mathrm{AB}}.$$

Δηλαδή,

$$\vec{\mathrm{\Delta\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}}.$$

Άρα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Σχόλιο

Πολλές φορές κάποια από τα δεδομένα ή τα ζητούμενα ενός προβλήματος είναι διατυπωμένα στη γλώσσα και στην ορολογία της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να μεταφράσουμε αρχικά τα αντίστοιχα σημεία του προβλήματος στη γλώσσα του Διανυσματικού λογισμού. Έτσι, για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\vec{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\mathrm{B\Gamma}}$$

ή

$$\vec{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{\Delta\Gamma}}.$$

4. Δίνονται τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 5 \quad \text{και} \quad |\vec{\gamma}| = 8.$$

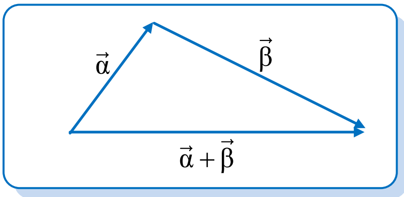
Να αποδείξετε ότι:

i) $3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7$ **ii)** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma} \ne \vec{0}$.

Λύση

i) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$



Όμως,

$$|\vec{\alpha}| = 2 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = 5.$$

Επομένως,

$$|2-5| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 2+5$$

δηλαδή

$$3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7.$$

Σημείωση

Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουμε

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

ii) Ας υποθέσουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma} = \vec{0}$$

Δηλαδή,

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

Άρα,

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 8$$

Όμως, αυτό είναι αδύνατο αφού όπως αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** ισχύει

$$3 \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le 7.$$

Επομένως,

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma} \ne \vec{0}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Έστω ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Ο και τέτοιος, ώστε $\widehat{A}=120°$. Να βρείτε τις γωνίες:

i) $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{A\Delta}}\right)$ **ii)** $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$

iii) $\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$ **iv)** $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{B\Delta}}\right)$

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Ο τέτοιο, ώστε

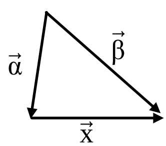
$$A\Gamma = 2B\Gamma.$$

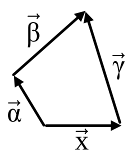
Να βρείτε τις γωνίες:

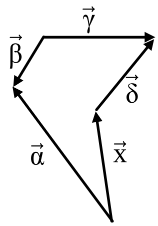
i) $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}\right)$ **ii)** $\left(\widehat{\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{AB}}\right)$

iii) $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{\Gamma O}}\right)$ **iv)** $\left(\widehat{\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{\Delta O}}\right)$

3. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

i) 

ii) 

iii) 

4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma Z}+\overrightarrow{EB}$$

5. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{E\Delta}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{A\Gamma}.$$

6. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ο για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}.$$

Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε, Ζ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{Z\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

8. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ οι διανυσματικές ακτίνες των κορυφών Α, Β, Γ αντίστοιχα ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Τι συμπεραίνετε για το τρίγωνο ΑΒΓ αν:

i) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|$ **ii)** $|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2+|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|^2$.

9. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\geq|\vec{\gamma}|$ **ii)** αν $|\vec{\gamma}|>2|\vec{\alpha}|$, τότε $|\vec{\alpha}|<|\vec{\beta}|$.

10. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=3, \quad |\vec{\beta}|=5 \quad \text{και} \quad |\vec{\gamma}|=9.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $2\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq 8$ **ii)** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\neq\vec{0}$.

11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=5,$$

να αποδείξετε ότι

$$3\leq|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|\leq 7.$$

Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

Ορισμός

Έστω πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$ και διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.
Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με

$$\boldsymbol{\lambda \cdot \vec{\alpha}} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}}$$

ένα διάνυσμα το οποίο:

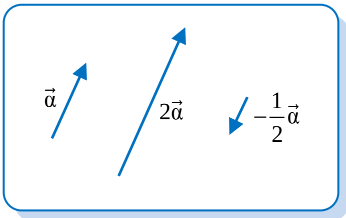
- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$
- είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$
- έχει μέτρο $|\lambda|\,|\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε

$$\boldsymbol{\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}}\ .$$

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, το οποίο έχει μέτρο 4. Το διάνυσμα $2\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|2\vec{\alpha}| = 2|\vec{\alpha}| = 2 \cdot 4 = 8$, ενώ το διάνυσμα $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο



$$\left|-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right||\vec{\alpha}| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

- Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$. Έτσι, π.χ., μπορούμε να γράψουμε $\frac{\vec{\alpha}}{3}$, αντί του τυπικά ορθότερου $\frac{1}{3} \cdot \vec{\alpha}$.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Πρόταση

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

- $\lambda\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lambda\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\beta}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $(-\lambda)\,\vec{\alpha}=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$
- Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$
- Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$.

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Ορισμός

Ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\vec{\upsilon}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \quad \text{με} \quad \kappa,\lambda \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα

Κάθε ένα από τα διανύσματα $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, $-4\vec{\alpha}$, $7\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

- Αποδεικνύεται ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων.

1η Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θεώρημα

Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq 0$, τότε

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta} \text{ για κάποιο } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη

- Αν έχουμε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό πολλαπλασιασμού με διάνυσμα ισχύει $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.
- Αντιστρόφως, αν έχουμε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\neq 0$, τότε ισχύει
$$|\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}|\vec{\beta}|=\kappa|\vec{\beta}|=|\kappa\vec{\beta}|, \quad \text{όπου} \quad \kappa=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}.$$
Οπότε:
  - αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}$
  - αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=-\kappa\vec{\beta}$
  - αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}=0\cdot\vec{\beta}$.

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ (και μάλιστα μοναδικός) τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

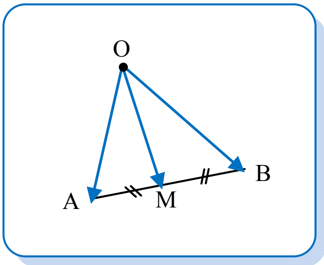
Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Πρόταση

Αν Μ είναι το μέσο ενός τμήματος ΑΒ, τότε για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

Απόδειξη



Το σημείο Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ. Δηλαδή,

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}.$$

Οπότε,

$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

και τελικά

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

5. **Αν για δύο σημεία Α και Β ισχύει η σχέση**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

Λύση

α΄ τρόπος:

Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Επομένως, η σχέση

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}.$$

Δηλαδή,

$$2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

και τελικά

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

Άρα, τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

Σχόλιο

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι διατυπωμένο στη γλώσσα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Μεταφράζοντάς το στη γλώσσα του Διανυσματικού λογισμού διαπιστώνουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

ή

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$$

για κάποιο σημείο Ο.

β΄ τρόπος:

Για κάθε σημείο Ο η σχέση

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

Δηλαδή,

$$2\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$$

και τελικά

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι ίσα. Και επειδή έχουν κοινή αρχή, συμπεραίνουμε ότι έχουν κοινό πέρας. Δηλαδή, τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

6. **Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση**

$$\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\alpha} = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\alpha} = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\beta}.$$

Άρα,

$$\left|\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\beta}\right|.$$

Δηλαδή,

$$\frac{1}{|\vec{\beta}|}\cdot|\vec{\alpha}| = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot|\vec{\beta}|$$

και τελικά

$$|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2.$$

Επομένως,

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

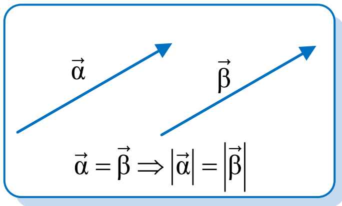
$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|.$$

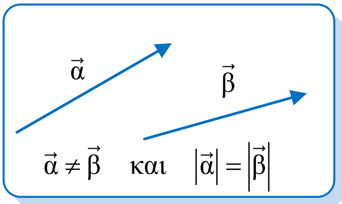
Άρα, η δοθείσα σχέση γίνεται

$$\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha} = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\beta}$$

και συνεπώς

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$





Σχόλια

- Αν δύο διανύσματα είναι ίσα, τότε έχουν και ίσα μέτρα.
- Το αντίστροφο, βέβαια, δεν ισχύει.
- Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 0$

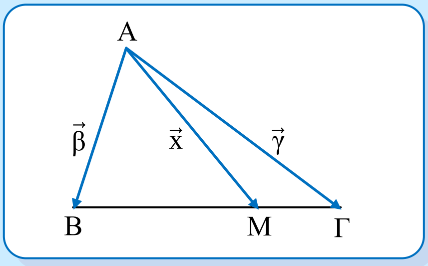
7. **Στο διπλανό σχήμα έχουμε**

$$(\mathrm{BM}) = 3(\mathrm{M\Gamma}).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$

ii) $\vec{x} = \frac{1}{4}\left(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}\right)$.



Λύση

i) Έχουμε

$$(\mathrm{BM}) = 3(\mathrm{M\Gamma}).$$

Δηλαδή,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right| = 3\left|\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\right|$$

ή ισοδύναμα

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right| = \left|3\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\right|. \quad \textbf{(1)}$$

Επίσης, από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$$

και επομένως

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} \uparrow\uparrow 3\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}. \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$$

οπότε

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right).$$

Δηλαδή,

$$\vec{x} - \vec{\beta} = 3\left(\vec{\gamma} - \vec{x}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\vec{x} - \vec{\beta} = 3\vec{\gamma} - 3\vec{x}.$$

Επομένως,

$$4\vec{x} = \vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$$

και τελικά

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\left(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}\right).$$

Σημείωση

Δύο διανύσματα είναι ίσα όταν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα.

Σχόλιο

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M, B και Γ αντίστοιχα. Είναι λοιπόν φανερό ότι πρέπει να αξιοποιήσουμε τη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)**.

8. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Gamma} = 4\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \left(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right) \\ &= \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}.\end{aligned}$$

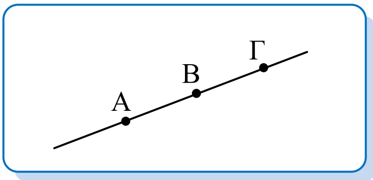
επίσης,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Gamma} &= \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} \\ &= 4\vec{\alpha} - 11\vec{\beta} - \left(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right) \\ &= 3\vec{\alpha} - 15\vec{\beta}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι μεταξύ τους παράλληλα. Και επειδή έχουν κοινή αρχή, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.



Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που έχουν άκρα αυτά τα σημεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

9. **Αν ισχύει η ισότητα**

$$\overrightarrow{AK} + 4\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MA},$$

να αποδείξετε ότι:

i) **για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση**

$$5\overrightarrow{OK} = 7\overrightarrow{O\Lambda} - 2\overrightarrow{OM}$$

ii) **τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.**

Λύση

i) Για κάθε σημείο Ο του επιπέδου η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}+4\left(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OB}\right)=3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+7\left(\overrightarrow{O\Lambda}-\overrightarrow{OB}\right)+2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right).$$

Δηλαδή,

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OK}-4\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{O\Lambda}-7\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OM}$$

και τελικά

$$5\overrightarrow{OK}=7\overrightarrow{O\Lambda}-2\overrightarrow{OM}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{OK}=7\overrightarrow{O\Lambda}-2\overrightarrow{OM}.$$

Θέτοντας λοιπόν όπου Ο το σημείο Μ έχουμε

$$5\overrightarrow{MK}=7\overrightarrow{M\Lambda}-2\overrightarrow{MM}.$$

Δηλαδή,

$$5\overrightarrow{MK}=7\overrightarrow{M\Lambda}$$

αφού

$$\overrightarrow{MM}=\vec{0}$$

και τελικά

$$\overrightarrow{MK}=\frac{7}{5}\overrightarrow{M\Lambda}.$$

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{MK}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι παράλληλα. Και επειδή έχουν κοινή αρχή συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

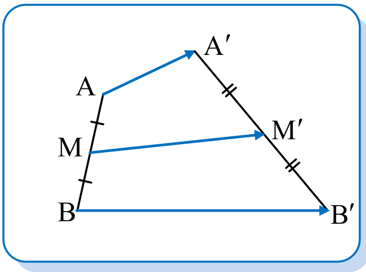
Παρατήρηση

Η σχέση που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα ισχύει για κάθε σημείο Ο. Επομένως, ισχύει αν θέσουμε όπου Ο οποιοδήποτε σημείο μας εξυπηρετεί π.χ. το σημείο Μ.

10. **Αν M και M' είναι τα μέσα δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και $A'B'$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι**

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{MM'}.$$

Λύση



Έχουμε

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'}$$

και

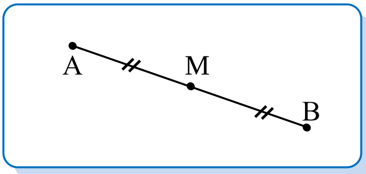
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B'} .$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) + 2\overrightarrow{MM'} + \left(\overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{M'B'}\right). \quad \textbf{(1)}$$

Όμως, τα σημεία M και M' είναι τα μέσα των τμημάτων AB και $A'B'$ αντίστοιχα.

Άρα,



$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

και

$$\overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{M'B'} = \overrightarrow{M'A'} - \overrightarrow{B'M'} = \vec{0}.$$

Επομένως, η σχέση **(1)** γράφεται

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0} + 2\overrightarrow{MM'} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MM'}.$$

Σημείωση
Το σημείο M είναι μέσο του τμήματος AB αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

11. **Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

αφού το Ο είναι μέσο του ΒΕ

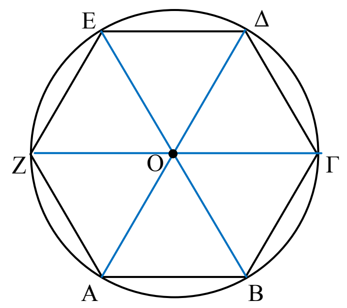
$$\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA},$$

αφού το Ο είναι μέσο του ΓΖ

Οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ} &= -4\overrightarrow{OA}\\ &= 2\left(-2\overrightarrow{OA}\right)=2\left(2\overrightarrow{AO}\right)\\ &= 2\overrightarrow{A\Delta},\end{aligned}$$

αφού το Ο είναι μέσο του ΑΔ.



Παρατήρηση

Οι διαγώνιοι του κανονικού εξαγώνου είναι διάμετροι του περιγεγραμμένου κύκλου του. Δηλαδή, το κέντρο Ο είναι μέσο των ΒΕ, ΓΖ και ΑΔ.

12. Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και τα σημεία Γ, Δ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\overrightarrow{AB}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{B\Gamma}=3\overrightarrow{AB}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}$

ii) $\lambda=2$

iii) το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΓ.

Λύση

i) Έχουμε

$$\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\overrightarrow{AB}\ \text{ και }\ \overrightarrow{\Gamma B}=-\overrightarrow{B\Gamma}=-3\overrightarrow{AB}.$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}.$$

Όμως,

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}.$$

Άρα,

$$(\lambda-1)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.$$

Και επειδή

$$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda-1=1$$

και τελικά

$$\lambda=2.$$

iii) Αποδείξαμε ότι

$$\lambda=2.$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{AB}.$$

Όμως,

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\overrightarrow{AB}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Η τελευταία σχέση εγγυάται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΓ.

Σημείωση

Αν ισχύει η σχέση

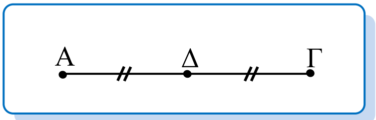
$$\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$$

και

$$\vec{\alpha}\neq\vec{0},$$

τότε

$$\lambda=\mu.$$



Σχόλιο

Για να αποδείξουμε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΓ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

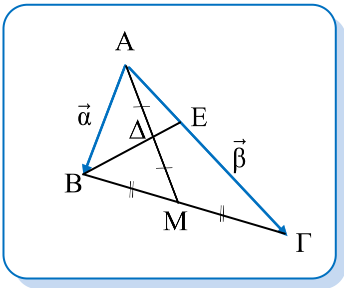
13. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ, το μέσο Δ της ΑΜ και το σημείο Ε για το οποίο ισχύει η σχέση**

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

Λύση



i) Έχουμε

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma} = -\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}.$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

Όμως, το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ. Επομένως,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\overrightarrow{B\Delta} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right)$$

$$= -\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = -\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta}.$$

Σημείωση

Για τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right).$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\overrightarrow{BE} = -\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$$

και

$$\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{3}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} = \frac{3}{4}\left(-\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}\right).$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\overrightarrow{B\Delta} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE}.$$

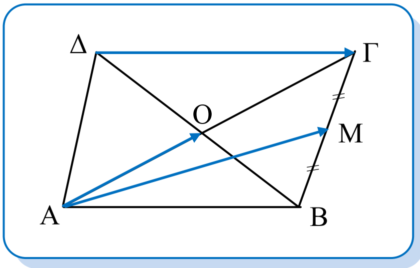
Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{BE}$ είναι παράλληλα. Και επειδή έχουν κοινή αρχή, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

14. **Αν Ο είναι το κέντρο ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ και Μ το μέσον της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι**

$$\mathbf{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{AO}}\,.$$

Λύση

α΄ τρόπος:



Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ. Επομένως,

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Όμως,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma},$$

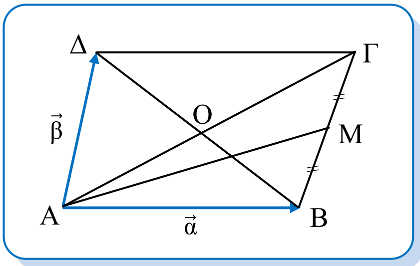
αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης,

$$\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{AO},$$

αφού το Ο είναι μέσο του τμήματος ΑΓ. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AO}.$$

β΄ τρόπος:



Θέτουμε

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}.$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}. \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$$

και

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right).$$

Άρα,

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}. \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AO}.$$

Μέθοδος των Ελαχίστων Διανυσμάτων

Θεωρούμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα τα οποία ονομάζουμε $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Στη συνέχεια εκφράζουμε κάθε ένα από τα διανύσματα που εμφανίζονται στο πρόβλημα ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Έτσι, το πρόβλημα γίνεται κατά κανόνα απλούστερο, αφού πλέον σ' αυτό πρωταγωνιστούν μόνο δύο διανύσματα, τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

15. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ.**

i) **Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση**

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=4\overrightarrow{ME},$$

όπου Ε το μέσο του ΑΔ.

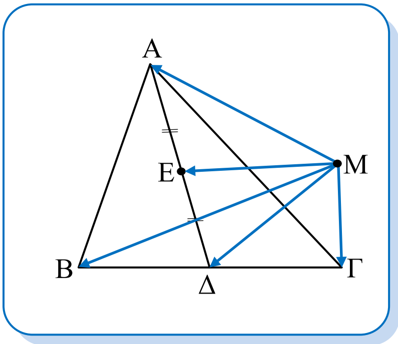
ii) **Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:**

α) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=4$

β) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=\left|4\overrightarrow{MA}\right|$

γ) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

Λύση



i) Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ. Επομένως, για κάθε σημείο Μ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=2\overrightarrow{M\Delta}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}&=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{M\Delta}\\&=2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Delta}\right).\end{aligned}$$

Επίσης, το σημείο Ε είναι το μέσο του ΑΔ. Άρα,

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Delta}=2\overrightarrow{ME}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=2\left(2\overrightarrow{ME}\right)=4\overrightarrow{ME}.$$

ii) **α)** Η σχέση

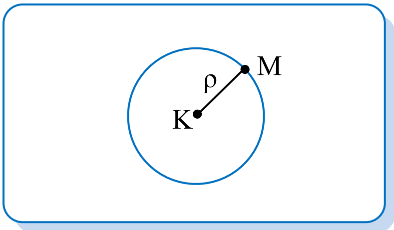
$$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=4,$$

λόγω του ερωτήματος **i)** ισοδύναμα γράφεται:

$$\left|4\overrightarrow{ME}\right|=4\Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{ME}\right|=4$$

$$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{ME}\right|=1.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ε και ακτίνα $\rho=1$.



Σημείωση

Έστω ένα σταθερό σημείο Κ του επιπέδου και ένας θετικός αριθμός ρ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\left|\overrightarrow{MK}\right|=\rho$$

είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ.

ii) **β)** Η σχέση

$$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=\left|4\overrightarrow{MA}\right|$$

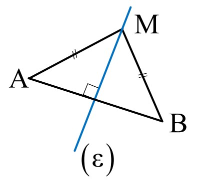
λόγω του ερωτήματος **i)** ισοδύναμα γράφεται

$$\left|4\overrightarrow{ME}\right|=4\left|\overrightarrow{MA}\right|$$

$$\Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{ME}\right|=4\left|\overrightarrow{MA}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{ME}\right|=\left|\overrightarrow{MA}\right|.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος ΑΕ.



Σημείωση
Έστω Α και Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$$

είναι η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος ΑΒ.

γ) Αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=4\overrightarrow{ME}.$$

Επομένως, η σχέση

$$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)\perp\overrightarrow{B\Gamma}$$

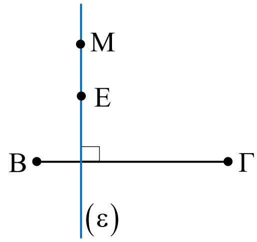
ισοδύναμα γράφεται

$$4\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{B\Gamma}.$$

Δηλαδή,

$$\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{B\Gamma}.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Ε και είναι κάθετη στη ΒΓ.



Σημείωση
Έστω Β, Γ και Ε τρία σταθερά σημεία του επιπέδου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$$

είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Ε και είναι κάθετη στον φορέα του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

12. Αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\Sigma\mathrm{A}}+\overrightarrow{\Sigma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}.$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Β.

14. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}+2\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}+3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+2\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}.$$

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{x}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{x}+\frac{1}{5}\vec{\beta}=\frac{4}{5}\left(\vec{x}+\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right).$$

i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

ii) Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύουν

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}\quad\text{και}\quad\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=-12\vec{\alpha}+15\vec{\beta}$$

να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

16. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\quad\text{και}\quad\vec{\beta}=|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

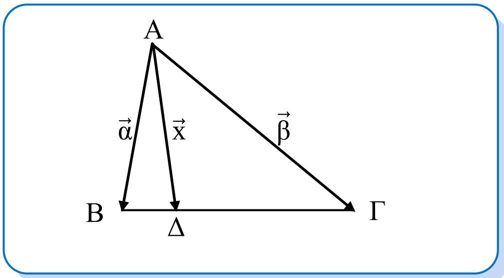
17. Στο διπλανό σχήμα έχουμε

$$(\mathrm{B\Delta})=\frac{2}{5}(\Delta\Gamma).$$

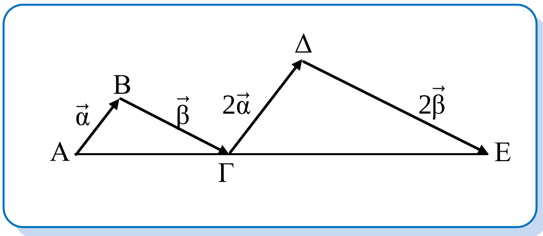
Να αποδείξετε ότι:

i) $5\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

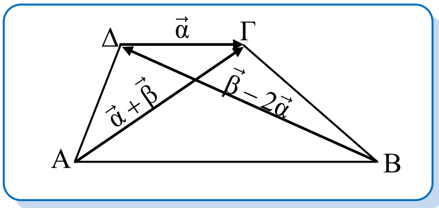
ii) $\vec{x}=\frac{1}{7}\left(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)$.



18. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ε του διπλανού σχήματος είναι συνευθειακά.



19. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.



20. Δίνονται τα διανύσματα

$$\overrightarrow{ΟΑ}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta},\quad \overrightarrow{ΟΒ}=7\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{ΟΓ}=22\vec{\alpha}-9\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

21. Δίνονται τα διανύσματα

$$\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma},\quad \overrightarrow{ΟΒ}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{ΟΓ}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}+3\vec{\gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι το μέσον του τμήματος ΑΓ.

22. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{ΑΒ}+2\overrightarrow{ΒΓ}-3\overrightarrow{ΓΑ}=\vec{0},$$

να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{ΟΓ}=4\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}$$

ii) τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

23. Αν ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{ΑΚ}+4\overrightarrow{ΒΚ}+7\overrightarrow{ΑΒ}=3\overrightarrow{ΛΒ}+8\overrightarrow{ΑΜ},$$

να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{OK} = 8\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{O\Lambda}$$

ii) τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}$$

ii) το Μ είναι το μέσον του ΑΓ.

25. Αν ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Lambda B} + 4\overrightarrow{AM},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

26. Δίνεται παραλληλόγραμμοΑΒΓΔ, ένα σημείο Μ και πραγματικός αριθμός λ έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{MB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}.$$

i) Να βρείτε την τιμή του λ.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Δ.

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}.$$

Αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AE} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

τότε:

i) να αποδείξετε για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι συνευθειακά

ii) να βρείτε την τιμή του κ για την οποία το σημείο Γ είναι το μέσον του ΔΕ.

28. Δίνονται σημεία Α, Β, Κ, Λ και Μ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AK}+(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{B\Lambda}+\lambda\overrightarrow{AM}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta}=\mu\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lambda=\mu=\dfrac{1}{3}$.

30. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι πραγματικοί αριθμοί λ και μ τέτοιοι, ώστε:

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ και $\mu=2$.

31. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB} \text{ για κάποιον } \lambda\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda\neq-1$

ii) για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

32. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ το μέσον της διαγωνίου του ΑΓ. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0} \quad \text{και} \quad 2\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $2\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Gamma E}$

ii) το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

36. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$x\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} = (x+1)\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + y\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(x-1)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = y\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ **ii)** $x = 1$ και $y = 0$.

37. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και σημεία Ο, Α, Β, Γ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (x+1)\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 5\vec{\alpha} + (2y-1)\vec{\beta}$$

όπου x, y σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $(x-2)\vec{\alpha} = (y-3)\vec{\beta}$ **ii)** $x = 2$ και $y = 3$.

38. Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και τα σημεία Γ, Δ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda = -4$ **ii)** $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

39. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$4 \le |\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}| \le 6.$$

40. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\text{ΒΑ}} \ , \quad \vec{\beta} = \overrightarrow{\text{ΑΓ}} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{ΓΜ}} \ ,$$

όπου Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -2\vec{\gamma}$

ii) Αν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 3$, τότε $1 \le |\vec{\gamma}| \le 2$.

41. Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| > |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

ii) αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

42. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \overrightarrow{\text{ΖΓ}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσον Δ της ΒΓ και το σημείο Ε για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$, $\overrightarrow{\text{ΕΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$5\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΓΒ}} = 3\left(\overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΕΔ}} + \overrightarrow{\text{ΕΒ}}\right).$$

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{B\Gamma},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{BZ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$2\overrightarrow{A\Delta}+3\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}.$$

45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσον Δ της ΒΓ και τα σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Delta}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{AZ}=\frac{3}{7}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{BZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{\Delta E}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta B}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{BZ}=2\overrightarrow{B\Gamma}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ ως γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}$ και $\vec{\beta}=\overrightarrow{A\Delta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

47. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\neq\vec{0}$

ii) τα διανύσματα

$$\vec{u}=5\vec{\alpha}+\vec{\beta}\quad \text{και}\quad \vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$$

δεν είναι συγγραμμικά.

48. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}.$$

49. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=4\overrightarrow{OZ}.$$

50. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ καθώς επίσης και τα μέσα Ε, Ζ των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{EZ}$

ii) αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}=4\overrightarrow{EZ}$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

51. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Κ.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}=4\overrightarrow{M\Lambda}$$

όπου Λ το μέσο του ΔΚ.

ii) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}\right|$$

είναι ο κύκλος με διάμετρο ΔΚ.

iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

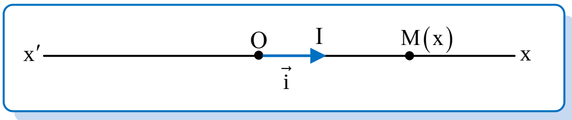
α) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}\ /\!/\ \overrightarrow{AB}$

β) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}\right|=4\left|\overrightarrow{MA}\right|.$

Συντεταγμένες στο Επίπεδο

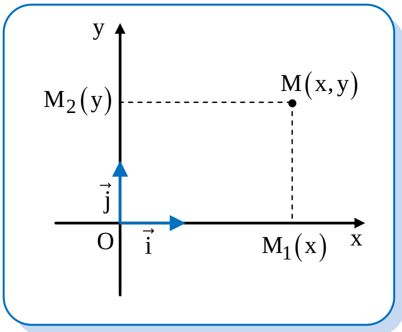
Συντεταγμένες Σημείου

- Σε μια ευθεία $x'x$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο Ο. Στη συνέχεια, θεωρούμε το σημείο Ι τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 (δηλαδή, να είναι μοναδιαίο) και το σημείο Ι να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox. Τότε λέμε ότι η ευθεία $x'x$ είναι ένας **άξονας** με **αρχή** το σημείο Ο και **μοναδιαίο διάνυσμα** το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. Η ημιευθεία Οx λέγεται **θετικός ημιάξονας Οx**, ενώ η ημιευθεία Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας Ox'**.



- Παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο Μ του άξονα $x'x$ ισχύει $\overrightarrow{OM} // \vec{i}$. Δηλαδή, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.
  Αυτόν τον αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του σημείου Μ.

- Σε ένα επίπεδο θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με **Oxy.**



- Έστω Μ τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Από το Μ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον $y'y$, η οποία τέμνει τον $x'x$ στο σημείο M_1. Επίσης, από το Μ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον $x'x$, η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο M_2. Ονομάζουμε **τετμημένη του Μ** την τετμημένη x του M_1 και **τεταγμένη του Μ** την τετμημένη y του M_2. Η τετμημένη και η τεταγμένη του Μ λέγονται **συντεταγμένες του Μ.**

Συντεταγμένες Διανύσματος

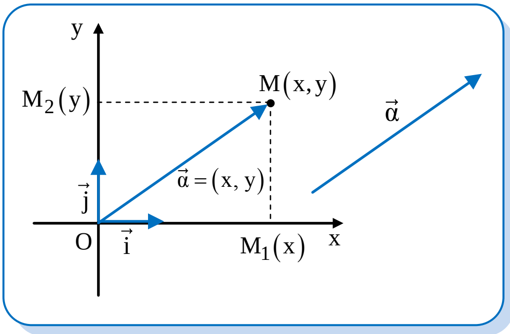
Πρόταση

Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ κατά μοναδικό τρόπο. Δηλαδή, για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος αριθμών (x, y) τέτοιο, ώστε

$$\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}\,.$$

- Πράγματι, αν $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha}$, τότε
$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$

- Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{\alpha}$, κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.



- Οι αριθμοί x, y λέγονται συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Oxy. Συγκεκριμένα, ο x λέγεται **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ και ο y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$. Έτσι, για λόγους απλότητας, αντί να γράφουμε $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ γράφουμε $\vec{\alpha} = (x, y)$.

- Παρατηρούμε ότι αν $M(x, y)$, τότε $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Δηλαδή, κάθε διάνυσμα με αρχή το $O(0, 0)$ έχει συντεταγμένες τις συντεταγμένες του πέρατός του.

Πρόταση

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε ισχύει

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Πρόταση

Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε έχουμε

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

και

$$\lambda\vec{\alpha}=\lambda(x_1, y_1)=(\lambda x_1, \lambda y_1) \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\vec{\alpha}=(x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(x_2, y_2)\,.$$

Δηλαδή,

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\,.$$

Οπότε,

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$$

και

$$\lambda\vec{\alpha}=\lambda\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}$$

Επομένως,

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \text{ και } \lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)\,.$$

- Γενικά έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} &= \lambda(x_1, y_1)+\mu(x_2, y_2)\\ &= (\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2) \text{ για κάθε } \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Αν $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$, τότε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2,-1)+(3,4)=(5,3)$
- $5\vec{\alpha}=5(2,-1)=(10,-5)$
- $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=2(2,-1)-3(3,4)=(4,-2)+(-9,-12)=(-5,-14)$.

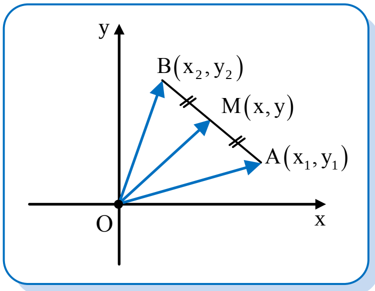
Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Πρόταση

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου και $M(x, y)$ είναι το μέσο του τμήματος AB, τότε ισχύει

$$\mathbf{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

Απόδειξη



Έχουμε

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Όμως,

$$\overrightarrow{OM} = (x, y), \quad \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$$

και

$$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2).$$

Επομένως, η αρχική ισότητα γράφεται

$$(x, y) = \frac{1}{2}\left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Δηλαδή,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Πρόταση

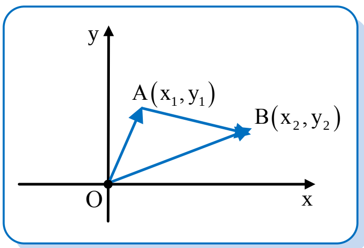
Οι συντεταγμένες (x, y) ενός διανύσματος που έχει αρχή το σημείο $A(x_1, y_1)$ και πέρας το σημείο $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{x = x_2 - x_1} \quad \text{και} \quad \mathbf{y = y_2 - y_1}.$$

Δηλαδή

$$\mathbf{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)}.$$

Απόδειξη



Έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Όμως,

$$\overrightarrow{AB} = (x, y), \ \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2) \ \text{και} \ \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$$

Επομένως, η αρχική ισότητα γράφεται

$$(x,y)=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,\, y_2-y_1)$$

Δηλαδή,

$$x=x_2-x_1 \quad \text{και} \quad y=y_2-y_1.$$

Μέτρο διανύσματος

Πρόταση

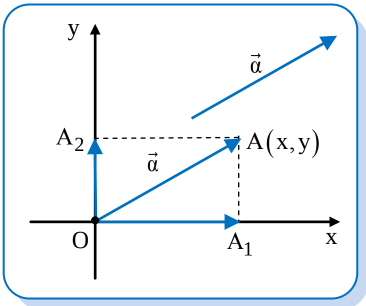
Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$ είναι

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Απόδειξη

Έστω Α το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Προφανώς, το σημείο Α έχει συντεταγμένες (x,y). Θεωρούμε τις προβολές A_1 και A_2 του σημείου Α στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Οπότε, επειδή το Α έχει τετμημένη x και τεταγμένη y ισχύει:

$$(OA_1)=|x| \quad \text{και} \quad (OA_2)=|y|$$



Έχουμε λοιπόν

$$|\vec{\alpha}|^2=(OA)^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2$$
$$=(OA_1)^2+(OA_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$$

Επομένως,

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Παράδειγμα

Αν $\vec{\alpha}=(4,-3)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

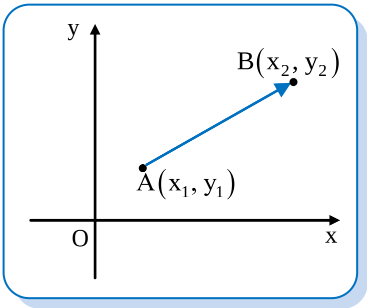
Απόσταση δύο σημείων

Πρόταση

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Απόδειξη



Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Όμως,

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

Επομένως,

$$(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Παράδειγμα

Αν $A(-2,1)$ και $B(10,6)$, τότε

$$(AB)=\sqrt{(10+2)^2+(6-1)^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13.$$

2η Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Ορισμός

Ονομάζουμε **ορίζουσα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ (με τη σειρά που δίνονται) και τη συμβολίζουμε με $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

που έχει 1η γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ και 2η γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{\beta}$. Δηλαδή,

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-y_1x_2.$$

Πρόταση

Είναι έγκυρη η ισοδυναμία

$$\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}\Leftrightarrow\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0.$$

Παράδειγμα

- Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\sqrt{2},-1)$ και $\vec{\beta}=(-2,\sqrt{2})$ είναι παράλληλα διότι

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=2-2=0.$$

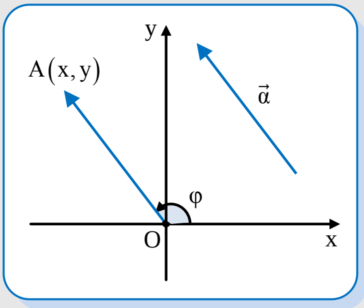
- Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,5)$ και $\vec{\beta}=(4,7)$ δεν είναι παράλληλα διότι

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{vmatrix}=21-20=1\neq 0.$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Ορισμός

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$**, τη γωνία φ που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA.



- Με βάση τον ορισμό ισχύει

$$0\leq \varphi < 2\pi.$$

- Από την Τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$ δεν είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$, δηλαδή αν είναι $x\neq 0$, τότε ισχύει

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{y}{x}.$$

Ορισμός

Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x\neq 0$, το οποίο σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα $x'x$. Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του $\vec{\alpha}$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\lambda=\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\varphi}\,.$$

- Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x=0$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα των x.
- Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $y=0$ και $x\neq 0$, τότε $\lambda=0$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα των y.

3η Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Πρόταση

Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2, ισχύει η ισοδυναμία

$$\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2.$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Οπότε,

$$\lambda_1=\frac{y_1}{x_1} \quad \text{και} \quad \lambda_2=\frac{y_2}{x_2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta} &\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0 \Leftrightarrow x_1y_2=y_1x_2\\ &\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,-6)$ είναι παράλληλα διότι έχουν αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1=\frac{3}{-1}=-3 \quad \text{και} \quad \lambda_2=\frac{-6}{2}=-3.$$

Οπότε,

$$\lambda_1=\lambda_2.$$

Λυμένες Ασκήσεις

16. **Έστω Oxy καρτεσιανό επίπεδο, με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha} = 2\vec{i} + x\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \vec{\beta} = (1-x)\vec{i} + 2y\vec{j}$$

να είναι:

i) ίσα

ii) αντίθετα.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες. Επομένως,

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$2 = 1 - x \qquad \text{και} \qquad x = 2y.$$

Δηλαδή,

$$x = -1 \qquad \text{και} \qquad y = -\frac{1}{2}.$$

ii) Έχουμε

$$-\vec{\beta} = (x-1)\vec{i} - 2y\vec{j}\,.$$

Άρα,

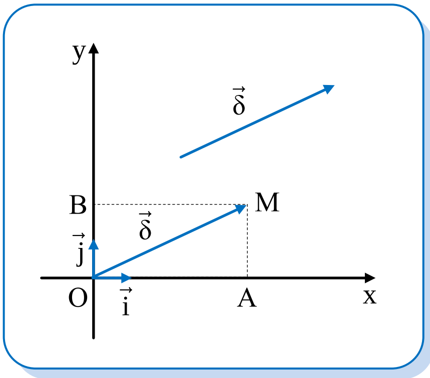
$$\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$$

αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$2 = x - 1 \qquad \text{και} \qquad x = -2y.$$

Δηλαδή,

$$x = 3 \qquad \text{και} \qquad y = -\frac{3}{2}.$$



Σημείωση

Κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ κατά μοναδικό τρόπο. Δηλαδή, υπάρχει μοναδικό ζεύγος αριθμών (x, y) τέτοιο, ώστε

$$\vec{\delta} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Οι αριθμοί x και y ονομάζονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\delta}$.

17. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(2,1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(-3,4).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

i) $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

ii) $\vec{v}=5\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

iii) $\vec{w}=4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

Λύση

Έχουμε

i)
$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{\alpha}+\vec{\beta}\\ &=(2,1)+(-3,4)\\ &=(2-3,\ 1+4)\\ &=(-1,5).\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}\vec{v} &= 5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\\ &=5(2,1)-(-3,4)\\ &=(10,5)-(-3,4)\\ &=(10+3,\ 5-4)\\ &=(13,1).\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\\ &=4(2,1)+2(-3,4)\\ &=(8,4)+(-6,8)\\ &=(8-6,\ 4+8)\\ &=(2,12).\end{aligned}$$

Σημείωση

Αν

$$\vec{\alpha}=(x_1,y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(x_2,y_2),$$

τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
- $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$

  για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γενικότερα

$$\begin{aligned}\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} &= (\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)\\ &=(\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2)\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

18. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{u} = (-1, 5) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (3, 2).$$

Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων και Α, Β δύο σημεία τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{u} + 3\vec{v},$$

να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β

ii) τις συντεταγμένες του μέσου του τμήματος ΑΒ.

Λύση

i) Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Έχουμε

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v}$$

δηλαδή

$$(x_1, y_1) = (-1, 5) + (3, 2) = (2, 7)$$

Επομένως,

$$A(2, 7).$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{OB} = \vec{u} + 3\vec{v}$$

δηλαδή

$$(x_2, y_2) = (-1, 5) + 3(3, 2) = (8, 11).$$

Επομένως,

$$B(8, 11).$$

ii) Έχουμε

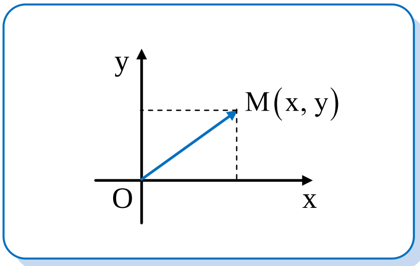
$$A(2, 7) \quad \text{και} \quad B(8, 11).$$

Οπότε, αν $M(x, y)$ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{και} \quad y = \frac{7+11}{2} = 9.$$

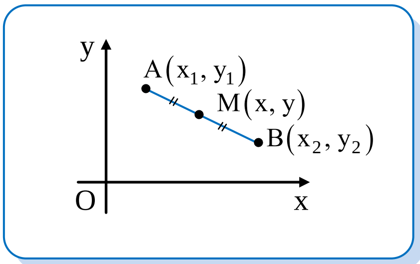
Άρα,

$$M(5, 9).$$



Σημείωση

Οι συντεταγμένες ενός σημείου Μ συμπίπτουν με τις συντεταγμένες της διανυσματικής του ακτίνας $\overrightarrow{OM}$.



Σημείωση

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε για το μέσο $M(x, y)$ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

19. **Δίνεται το σημείο $A(4,3)$ και το διάνυσμα**

$$\overrightarrow{AB}=(1,2).$$

Να βρείτε:

i) **τις συντεταγμένες του σημείου B**

ii) **τις συντεταγμένες διανύσματος**

$$\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BA},$$

όπου O η αρχή των αξόνων

iii) **το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.**

Λύση

i) Έχουμε $A(4,3)$ και έστω $B(x,y)$. Η σχέση

$$\overrightarrow{AB}=(1,2)$$

ισοδύναμα γράφεται

$$(x-4,\ y-3)=(1,2).$$

Δηλαδή,

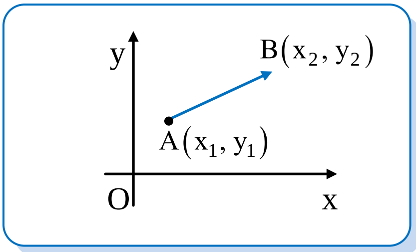
$$x-4=1 \quad \text{και} \quad y-3=2.$$

Τελικά

$$x=5 \quad \text{και} \quad y=5.$$

Άρα,

$$B(5,5).$$



Σημείωση
Αν

$A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$,

τότε

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{OA}=(4,3)$$

και

$$\overrightarrow{BA}=(-1,-2).$$

Επομένως,

$$\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BA}=(2,-1).$$

iii) Είναι

$$\vec{u}=(2,-1).$$

Άρα,

$$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

Σημείωση
Αν

$$\vec{\alpha}=(x,y)$$

τότε

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

20. **Τα σημεία**

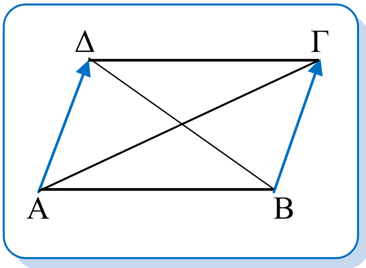
$$\mathbf{A(2,1),\ B(3,-4)\ \ \text{και}\ \ \Gamma(0,-5)}$$

είναι οι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ

ii) τα μήκη των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Λύση



i) Έστω $\Delta(x, y)$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}.$$

Δηλαδή,

$$(x-2,\ y-1)=(0-3,\ -5+4)$$

ή ισοδύναμα

$$x-2=-3 \quad \text{και} \quad y-1=-1,$$

και τελικά

$$x=-1 \quad \text{και} \quad y=0.$$

Άρα,

$$\Delta(-1,0).$$

ii) Έχουμε

$$A(2,1) \quad \text{και} \quad \Gamma(0,-5).$$

Άρα,

$$(A\Gamma)=\sqrt{(0-2)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{40}.$$

Επίσης,

$$B(3,-4) \quad \text{και} \quad \Delta(-1,0).$$

Επομένως,

$$(B\Delta)=\sqrt{(-1-3)^2+(0+4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Σημείωση

Η απόσταση των σημείων

$$A(x_1, y_1) \quad \text{και} \quad B(x_2, y_2)$$

είναι

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

21. **Δίνεται το διάνυσμα**

$$\vec{u} = (4, -3).$$

i) **Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{u}$ και έχει μέτρο ίσο με 10.**

ii) **Να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.**

Λύση

i) **α΄ τρόπος:**

Έχουμε

$$\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u} \quad \text{και} \quad \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Άρα, υπάρχει $\lambda < 0$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{v} = \lambda\vec{u} = \lambda(4, -3) = (4\lambda, -3\lambda).$$

Όμως,

$$|\vec{v}| = 10.$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{(4\lambda)^2 + (-3\lambda)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4.$$

Και επειδή

$$\lambda < 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda = -2.$$

Επομένως,

$$\vec{v} = (-8, 6).$$

Σημείωση

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με

$$\vec{\beta} \neq \vec{0}.$$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ για κάποιον $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ για κάποιον $\lambda > 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ για κάποιον $\lambda < 0$.

β΄ τρόπος:

Έστω

$$\vec{v} = (x, y).$$

Το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι αντίρροπο και συνεπώς παράλληλο του διανύσματος $\vec{u}$.

Άρα, ισχύει η σχέση

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ x & y \end{vmatrix} = 0.$$

Σημείωση

Δύο διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι παράλληλα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

Δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$4y + 3x = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Επίσης,

$$|\vec{v}| = 10$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 10$$

και τελικά

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

$$(x, y) = (8, -6) = 2\vec{u}$$

ή

$$(x, y) = (-8, 6) = -2\vec{u}.$$

Και επειδή

$$\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{v} = (-8, 6).$$

ii) Έχουμε

$$\vec{u} = (4, -3)$$

και

$$\vec{v} = (-8, 6).$$

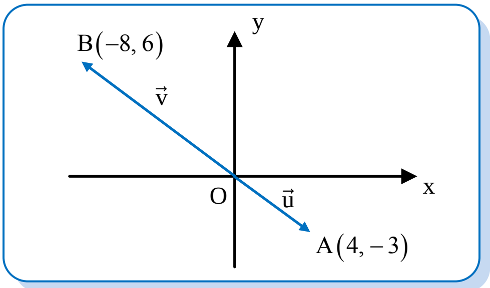
Οπότε, αν θεωρήσουμε τα σημεία

$$A(4, -3) \quad \text{και} \quad B(-8, 6)$$

τότε ισχύουν

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \quad \text{και} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}$$

όπου O η αρχή των αξόνων.



Σχόλιο

Υπάρχουν άπειροι τρόποι για να παραστήσουμε γραφικά ένα διάνυσμα

$$\vec{\alpha} = (x, y).$$

Ο πιο απλός είναι να θεωρήσουμε το σημείο $A(x, y)$ οπότε $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$.

22. **Δίνονται τα σημεία**

$$\mathbf{A(-7,-5)} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{B(3,0)}.$$

i) Να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

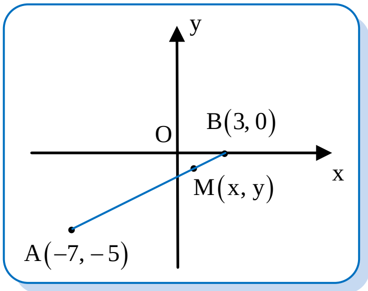
$$\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}.$$

ii) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{\delta} = 7\overrightarrow{OB} - 12\overrightarrow{OM},$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση



Σχόλιο
Εύρεση ενός σημείου Μ σημαίνει εύρεση των συντεταγμένων του (x, y).

i) Έστω

$$M(x, y).$$

Οπότε,

$$\overrightarrow{AM} = (x+7, y+5)$$

και

$$\overrightarrow{MB} = (3-x, 0-y).$$

Επομένως, η σχέση

$$\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$$

γράφεται

$$(x+7, y+5) = 4(3-x, -y)$$

ή ισοδύναμα,

$$(x+7, y+5) = (12-4x, -4y).$$

Δηλαδή,

$$\begin{cases} x+7 = 12-4x \\ y+5 = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, $M(1, -1)$.

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{OB} = (3-0, 0-0) = (3, 0)$$

και

$$\overrightarrow{OM} = (1-0, -1-0) = (1, -1).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= 7\overrightarrow{OB} - 12\overrightarrow{OM} = 7\cdot(3,0) - 12\cdot(1,-1) \\ &= (21,0) - (12,-12) = (9,12). \end{aligned}$$

Άρα,

$$|\vec{\delta}| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15.$$

23. **Δίνεται το διάνυσμα**

$$\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-\lambda,\lambda-2\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

i) **Να αποδείξετε ότι**

$$\vec{\alpha}\neq\vec{0}\quad \text{για κάθε}\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

ii) **Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:**

α) $\vec{\alpha}\,//\,x'x$

β) $\vec{\alpha}\,//\,y'y$ **και** $\left|\vec{\alpha}\right|=2.$

iii) **Για $\lambda=3,$ να παραστήσετε γραφικά το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ παίρνοντας ως αρχή του το σημείο $A(1,2).$**

Λύση

i) Ας υποθέσουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

Δηλαδή,

$$\left(\lambda^2-\lambda,\lambda-2\right)=(0,0)$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda^2-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0\quad \text{ή}\quad \lambda=1$$

και

$$\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2.$$

που είναι αδύνατον.
Άρα,

$$\vec{\alpha}\neq\vec{0}\ \text{για κάθε}\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

ii) **α)** Έχουμε

$$\vec{\alpha}\,//\,x'x.$$

Δηλαδή,

$$\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2.$$

Σημείωση
Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$.
Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
- $\vec{\alpha}\,//\,x'x\Leftrightarrow y=0.$
- $\vec{\alpha}\,//\,y'y\Leftrightarrow x=0.$

β) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \,//\, y'y$$

Δηλαδή,

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

- Αν $\lambda = 0$, τότε

$$\vec{\alpha} = (0, -2)$$

και συνεπώς

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε

$$\vec{\alpha} = (0, -1)$$

και συνεπώς

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\alpha} \,//\, y'y \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = 2$$

αν και μόνο αν $\lambda = 0$.

iii) Για $\lambda = 3$ έχουμε

$$\vec{\alpha} = (3^2 - 3, 3 - 2) = (6,1).$$

Είναι φανερό ότι αρκεί να βρούμε το σημείο $B(x, y)$ για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}.$$

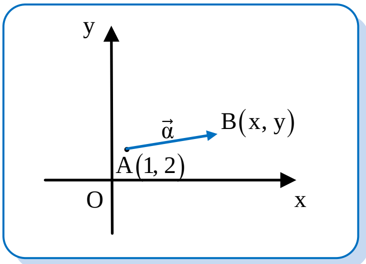
Δηλαδή,

$$(x - 1, y - 2) = (6,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 6 \\ y - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3. \end{cases}$$

Επομένως, $B(7,3)$.



Σχόλιο
Η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση του πέρατος του διανύσματος $\vec{\alpha}$ αφού η αρχή του είναι γνωστή.

24. Δίνονται τα σημεία

$$\mathrm{A}(0,3),\ \mathrm{B}(0,1) \text{ και } \Gamma(1,4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

i) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=(0,-2)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma}=(1,1).$$

Επομένως,

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0.$$

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Δηλαδή, τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Σημείωση
Τρία σημεία αποτελούν κορυφές τριγώνου αν και μόνο αν δεν είναι συνευθειακά.

Παρατήρηση
Ένας πιο απλός τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία Α και Β ανήκουν στον άξονα $y'y$, κάτι που δεν ισχύει για το σημείο Γ.

ii) Έστω $K(x,y)$. Έχουμε

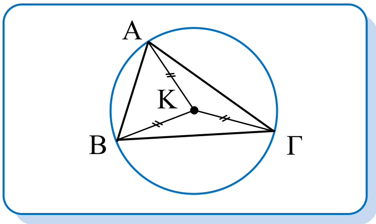
$$(KA)=(KB)=(K\Gamma).$$

Δηλαδή,

$$\begin{cases}(KA)=(KB)\\ (KB)=(K\Gamma)\end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\\ \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}\end{cases}$$



Σημείωση
Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου απέχει από κάθε κορυφή του απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-6y+9=x^2+y^2-2y+1\\ x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-8y+16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4y=-8\\ 2x+6y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=2.\end{cases}$$

Επομένως, $K(2,2)$.

25. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(0,-2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(1,4).$$

i) **Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά.**

ii) **Να εκφράσετε το διάνυσμα**

$$\vec{u}=(7,4)$$

ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=0+2=2\neq 0.$$

Άρα, τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Αναζητούμε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιους, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}.$$

Δηλαδή,

$$(7,4)=\kappa(0,-2)+\lambda(1,4)$$
$$\Leftrightarrow (7,4)=(0,-2\kappa)+(\lambda,4\lambda)$$
$$\Leftrightarrow (7,4)=(\lambda,-2\kappa+4\lambda).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\lambda=7 \quad \text{και} \quad -2\kappa+4\lambda=4.$$

Τελικά

$$\lambda=7 \quad \text{και} \quad \kappa=12.$$

Επομένως,

$$\vec{u}=12\vec{\alpha}+7\vec{\beta}.$$

Σημείωση

Ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}, \quad \text{με} \quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Αρκεί λοιπόν να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{u}$ στην παραπάνω μορφή.

26. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha} = (1, x) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \left(6 - x, 9 + y^2\right)$$

τα οποία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

i) Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta}.$$

Δηλαδή,

$$\det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 6 - x & 9 + y^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + y^2 - x(6 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + y^2 - 6x + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right) + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 0.$$

Όμως,

$$(x - 3)^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y^2 \geq 0$$

Επομένως, η σχέση

$$(x - 3)^2 + y^2 = 0$$

ισχύει ακριβώς τότε, όταν

$$x - 3 = 0 \quad \text{και} \quad y = 0.$$

Άρα, $x = 3$ και $y = 0$.

Σημείωση
Η ισότητα

$$A^2 + B^2 = 0$$

ισχύει αν και μόνο αν

$$A = 0 \text{ και } B = 0.$$

ii) Αποδείξαμε ότι $x = 3$ και $y = 0$.

Επομένως

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (3, 9).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\vec{\beta} = 3(1, 3) = 3\vec{\alpha}.$$

Και επειδή $3 > 0$ συμπεραίνουμε ότι

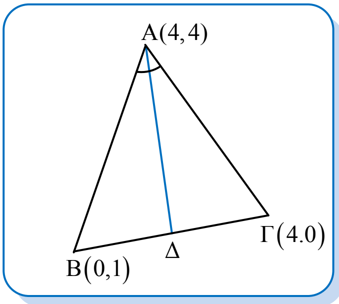
$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}.$$

27. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(4,4), B(0,1), \Gamma(4,0)$ και η εσωτερική διχοτόμος του ΑΔ.**

i) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{B\Delta}| = \frac{5}{4}|\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

Λύση



i) Σύμφωνα με το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε

$$\frac{(B\Delta)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{(AB)}{(A\Gamma)} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{0^2+4^2}} = \frac{5}{4}.$$

Επομένως, $(B\Delta) = \frac{5}{4}(\Delta\Gamma)$

δηλαδή $|\overrightarrow{B\Delta}| = \frac{5}{4}|\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$.

ii) Με βάση το ερώτημα **i)** έχουμε

$$|\overrightarrow{B\Delta}| = \frac{5}{4}|\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \quad \textbf{(1)}$$

Επίσης, $\overrightarrow{B\Delta} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και συνεπώς

$$\overrightarrow{B\Delta} \uparrow\uparrow \frac{5}{4}\overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{B\Delta} = \frac{5}{4}\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Οπότε, αν $\Delta(x_1, y_1)$ η τελευταία ισότητα γράφεται

$$(x_1-0, y_1-1) = \frac{5}{4}(4-x_1, 0-y_1)$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1, y_1-1) = 5(4-x_1, -y_1)$$

$$\Leftrightarrow (4x_1, 4y_1-4) = (20-5x_1, -5y_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = 20-5x_1 \\ 4y_1-4 = -5y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 = 20 \\ 9y_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{9} \\ y_1 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$\Delta\left(\frac{20}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

Σχόλιο

Η παρατήρηση ότι η ζητούμενη σχέση γράφεται $(B\Delta) = \frac{5}{4}(\Delta\Gamma)$ ή ισοδύναμα $\frac{(B\Delta)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{5}{4}$ οδηγεί τη σκέψη μας στο θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου, σύμφωνα με το οποίο ισχύει

$$\frac{(B\Delta)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{(AB)}{(A\Gamma)}.$$

Παρατήρηση

Τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\frac{5}{4}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι ομόρροπα. Επομένως, είναι ίσα.

28. **Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση**

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2} \geq 5.$$

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(x, y) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(3-x, 4-y).$$

Έχουμε

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

και

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}$$

Οπότε

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|.$$

Επίσης, σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|.$$

Επομένως,

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2} \geq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x, y)+(3-x, 4-y)=(3, 4)$$

και συνεπώς

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Άρα, η σχέση **(1)** γράφεται

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2} \geq 5.$$

Παρατήρηση

Κάθε παράσταση της μορφής

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

είναι το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{\alpha}=(x, y).$$

Επομένως, το πρώτο μέλος της ζητούμενης σχέσης είναι το άθροισμα των μέτρων των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}=(x, y)$$

και

$$\vec{\beta}=(3-x, 4-y).$$

29. **Δίνεται το διάνυσμα**

$$\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3},1\right).$$

i) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$

ii) Να σχεδιάσετε στο καρτεσιανό επίπεδο το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3},1\right).$$

Παρατηρούμε ότι η τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $\sqrt{3}\neq 0$.

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

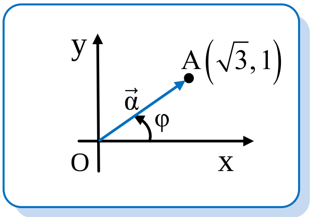
Σημείωση

Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x\neq 0$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του επιπέδου, τότε ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$, τον αριθμό

$$\lambda=\frac{y}{x}.$$

ii) Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και το σημείο Α έχουν τις ίδιες συντεταγμένες και συνεπώς

$$A\left(\sqrt{3},1\right).$$



Αποδείξαμε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \varphi=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Και επειδή $0\leq\varphi<2\pi$ συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\quad \text{ή}\quad \varphi=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}.$$

Σημείωση

Αν ένα διάνυσμα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία φ, τότε ισχύει $\lambda=\varepsilon\varphi\varphi$.

Όμως, $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}$ και το σημείο Α βρίσκεται στο α΄ τεταρτημόριο. Επομένως,

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

και συνεπώς

$$\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

30. **Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα**
$$\vec{\alpha}=(\kappa,-\kappa),\ \ \kappa\neq 0$$
με τον άξονα $x'x$, για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}^*$.

Λύση

- Έχουμε $\kappa\neq 0$, οπότε ορίζεται ο συντελεστής του διανύσματος $\vec{\alpha}=(\kappa,-\kappa)$ και είναι
$$\lambda=\frac{y}{x}=\frac{-\kappa}{\kappa}=-1$$
για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$.

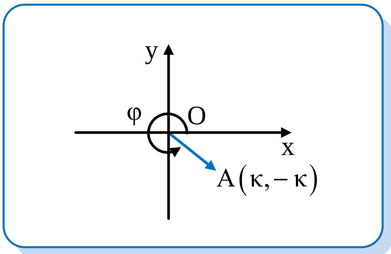
- Έχουμε
$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\varphi=\lambda\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=-1\\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow \varphi=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$
Και επειδή $\varphi\in[0,2\pi)$ συμπεραίνουμε ότι
$$\varphi=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$
ή
$$\varphi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}.$$

- Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=(\kappa,-\kappa)$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες με το σημείο $A(\kappa,-\kappa)$. Επομένως
  - Αν $\kappa>0$, τότε το σημείο $A(\kappa,-\kappa)$ βρίσκεται στο δ΄ τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου και συνεπώς
$$\varphi=\frac{7\pi}{4}.$$

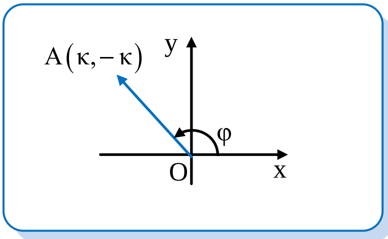
Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη γωνία φ που σχηματίζει ένα διάνυσμα
$$\vec{\alpha}=(x,y),\ x\neq 0$$
με τον άξονα $x'x$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης
$$\lambda=\frac{y}{x}$$
του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
- Από την εξίσωση
$$\varepsilon\varphi\varphi=\lambda$$
βρίσκουμε δύο τιμές φ_1,φ_2 της γωνίας $\varphi\in[0,2\pi)$.
- Σχεδιάζουμε στο καρτεσιανό επίπεδο το διάνυσμα
$$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha},$$
όπου O η αρχή των αξόνων και διαπιστώνουμε ποια από τις τιμές φ_1,φ_2 είναι η ζητούμενη γωνία φ.



- Αν $\kappa<0$, τότε το σημείο $A(\kappa,-\kappa)$ βρίσκεται στο β΄ τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου και συνεπώς
$$\varphi=\frac{3\pi}{4}.$$



31. **Δίνεται το διάνυσμα**
$$\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3}\mu,\ \mu^2+\mu-3\right)$$
όπου μ κάποιος πραγματικός αριθμός.

i) **Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\sqrt{3}$.**

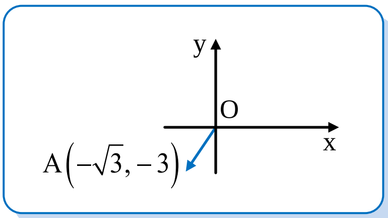
ii) **Για τις τιμές του μ που βρήκατε στο ερώτημα i) να παραστήσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ στο καρτεσιανό επίπεδο.**

iii) **Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi=\frac{\pi}{3}$.**

Λύση

i) Έχουμε
$$\lambda=\sqrt{3}.$$
Δηλαδή,
$$\frac{\mu^2+\mu-3}{\sqrt{3}\mu}=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \mu^2+\mu-3=\left(\sqrt{3}\right)^2\mu \quad \text{και} \quad \mu\neq 0.$$
$$\Leftrightarrow \mu^2-2\mu-3=0 \quad \text{και} \quad \mu\neq 0.$$
$$\Leftrightarrow \mu=-1 \quad \text{ή} \quad \mu=3.$$

ii)
- Για $\mu=-1$ έχουμε
$$\vec{\alpha}=\left(-\sqrt{3},-3\right)$$
και συνεπώς
$$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA},$$
όπου $A\left(-\sqrt{3},-3\right)$.



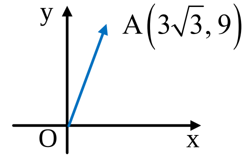
- Για $\mu = 3$ έχουμε

$$\vec{\alpha} = \left(3\sqrt{3}, 9\right)$$

και συνεπώς

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA},$$

όπου $A\left(3\sqrt{3}, 9\right)$.



iii) Έχουμε $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Άρα,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Δηλαδή, $\lambda = \sqrt{3}$ ή ισοδύναμα $\mu = -1$ ή $\mu = 3$, σύμφωνα με το ερώτημα **i).**

Όμως, από το ερώτημα **ii)** προκύπτει ότι για $\mu = -1$ είναι $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ ενώ για $\mu = 3$ είναι $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mu = 3.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

52. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$:

$$A(2, 5), \qquad B(-4, 3), \qquad \Gamma(1, -2) \qquad \text{και} \qquad \Delta(\alpha, \beta - 2).$$

53. Έστω Oxy καρτεσιανό επίπεδο με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x - 1)\vec{i} + 4\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \vec{\beta} = (3 - x)\vec{i} + y\vec{j}$$

να είναι ίσα μεταξύ τους.

54. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{\alpha} = \left(\mu^2 - \mu, \mu^2 - 4\mu + 3\right), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες είναι:

i) $\vec{\alpha} = \vec{0}$ **ii)** $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // x'x$.

55. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\lambda - \mu, 1 + 2\mu) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\mu - 3, 2\lambda - 3).$$

Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

56. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (-2, 4).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

i) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **ii)** $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

57. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (0, 2), \quad \vec{\beta} = (4, -1) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (-4, 5).$$

Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει η σχέση $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

58. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε για τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x, 1), \quad \vec{\beta} = (2, -2) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (0, y)$$

να ισχύει η σχέση $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

59. Έστω $M(2,3)$ το μέσο του τμήματος ΑΒ με $A(3,2)$.

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Κ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

60. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις τις ΑΒ και ΓΔ τέτοιο, ώστε $(AB)=2(\Gamma\Delta)$. Αν είναι $A(1,0)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(4,5)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

61. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,4),\quad B(3,2)\ \text{ και }\ \Gamma(-1,5).$$

Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Μ

ii) το σημείο Δ, ώστε το Μ να είναι το μέσον του ΓΔ.

62. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(4,5)$ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, όπου $A(x,7)$ και $B(8,y)$.

63. Το σημείο $M(3,2)$ είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $x_1<x_2$. Αν $\overrightarrow{AB}//x'x$ και x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(\lambda+1)x+5=0$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός, να βρείτε:

i) την τιμή του λ

ii) τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

64. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με

$$A(1,1),\quad B(4,2)\ \text{ και }\ \Gamma(5,3).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) της κορυφής Δ

ii) του κέντρου Κ του ΑΒΓΔ.

65. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο $K(2,4)$. Αν είναι $A(-2,1)$ και $B(4,3)$, να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΚΓΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία $K(3,4)$, $\Lambda(4,5)$ και $M(0,3)$ που είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

67. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με

$$B(2,-1) \text{ και } \Gamma(3,2).$$

Αν το σημείο Α ανήκει στον άξονα $x'x$ και το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ ανήκει στον άξονα $y'y$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Κ και Δ.

68. Δίνονται τα διαστήματα

$$\vec{u}=(2,5) \text{ και } \vec{v}=(-1,0).$$

Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων και Α, Β δύο σημεία τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u}+4\vec{v} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB}=2\vec{u}-3\vec{v},$$

να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) των σημείων Α και Β

ii) του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

69. Αν $A(-2,0)$ και $\overrightarrow{AB}=(0,4)$, να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου Β

ii) του διανύσματος $\vec{u}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{BA}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

70. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,4) \quad \text{και} \quad B(2,7).$$

Να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}.$$

71. Δίνονται τα σημεία

$$A(-2,0) \text{ και } B(7,8).$$

Να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AM}.$$

72. Δίνεται το σημείο $M(5,2)$. Να βρείτε τα σημεία Α, Β τα οποία ανήκουν στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα και είναι τέτοια, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσον του ΑΒ.

73. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{\alpha}=(\lambda-1,\lambda^2-5\lambda+4),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha}\neq\vec{0}\quad \text{και} \quad \vec{\alpha}//x'x.$$

74. Αν είναι

$$\vec{\alpha}=(\lambda^2-5\lambda+6,\lambda-1),$$

να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

i) $\vec{\alpha}//x'x$

ii) $\vec{\alpha}//y'y$ και $|\vec{\alpha}|=1$.

75. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$ και $\vec{\beta}=(2,1)$.

Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων

$$\vec{u}=4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\quad \text{και} \quad \vec{v}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}.$$

76. Δίνονται τα σημεία $A(3,5)$ και $B(0,1)$. Να βρείτε το σημείο Γ του άξονα $x'x$, έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ.

77. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u}=(2,-1).$$

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι ομόρροπο του $\vec{u}$ και έχει μέτρο ίσο με $3\sqrt{5}$.

78. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (-2, 6).$$

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\vec{u}$ και έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{10}$.

79. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (3, -4).$$

Να βρείτε τα διανύσματα που είναι συγγραμμικά με το διάνυσμα $\vec{u}$ και έχουν μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

80. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (4, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (0, 2).$$

Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5.$$

81. Δίνονται τα σημεία

$$A(7, 5), \quad B(0, -2) \quad \text{και} \quad \Gamma(8, 4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

82. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 4), \quad B(3, 0) \quad \text{και} \quad \Gamma(5, 2).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

83. Δίνεται ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} = (1, 3) + |\vec{\alpha}| \cdot (-1, 0).$$

Να βρείτε:

i) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

84. Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} = \left(0, \sqrt{3}\right) + \left|\vec{\beta}\right| \cdot (1, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (2, 1) + |\vec{\alpha}| \cdot (-1, 0).$$

Να βρείτε:

i) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ii) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

85. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \ \text{και} \ \vec{\beta} = (-2, 4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Να εκφράσετε το διάνυσμα

$$\vec{u} = (6, 8)$$

ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

86. Αν $\vec{i}, \vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του Oxy, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ έτσι, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \vec{i} - \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\lambda + 2)\vec{i} + \left(\kappa^2 + 1\right)\vec{j}$$

να είναι συγγραμμικά.

87. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \left(x^2, 2\right) + \left(y^2 + 1, 0\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x, 1) + 2(y\text{-}1, 0)$$

τα οποία είναι παράλληλα μεταξύ τους. Να βρείτε:

i) τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$

ii) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

88. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \left(x^2 + 1, -y\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (y - 2, 1)$$

είναι μεταξύ τους παράλληλα.

89. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\mu - 2, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \left(\mu^2 - 4, 5\right)$$

είναι μεταξύ τους παράλληλα.

90. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \geq \sqrt{10}.$$

91. Δίνονται τα σημεία

$$A(x, 1), \quad B(-1, x) \quad \text{και} \quad \Gamma(x+1, 1-x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ώστε το άθροισμα

$$f(x) = (OA)^2 + (OB)^2 + (O\Gamma)^2$$

να γίνεται ελάχιστο. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $f(x)$;

92. Δίνονται τα σημεία

$$A(0, 5), \quad B(1, 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(3, 4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $x'x$, ώστε το άθροισμα

$$f(x) = (MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2$$

να γίνεται ελάχιστο.

93. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 2), \quad B(5, 1) \quad \text{και} \quad M(x, 0) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να υπολογίσετε το $(A'B)$, όπου A' το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα $x'x$.

ii) Να υπολογίσετε το (AM) και το (BM).

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

94. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία τα σημεία

$$A(0, 1), \quad B(1, \mu+1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2-\mu, 2)$$

είναι συνευθειακά.

95. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία τα σημεία

$$A(1, \mu), \quad B(-1, \mu+2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-\mu, -3)$$

είναι συνεθειακά.

96. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(-2,1) \text{ και } \vec{\beta}=(1,1).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$(\vec{u}-\vec{\alpha})//\vec{\beta} \quad \text{και} \quad (\vec{u}-2\vec{\beta})//(\vec{\alpha}+5\vec{\beta}).$$

iii) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

97. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Ν για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BN}=3\mu\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{με} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$(1-\lambda-3\mu)\overrightarrow{AB}=(\mu-\lambda)\overrightarrow{A\Gamma}.$$

ii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ.

iii) Αν είναι

$$A(2,2),\ B(0,1) \quad \text{και} \quad N(2,1),$$

να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

98. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,2) \text{ και } B(3,\kappa).$$

Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=5$.

99. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u}=(1,\sqrt{3}).$$

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Α για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u}$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων

ii) τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα $x'x$.

100. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = \left(2\mu - 4,\ \mu^2 - 3\mu\right)$$

όπου μ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

ii) Για τις τιμές του μ που βρήκατε στο ερώτημα **i)** να παραστήσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ στο καρτεσιανό επίπεδο.

iii) Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία το διάνυσμα $\vec{u}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

101. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{\alpha} = \left(-3, \sqrt{3}\right).$$

Να βρείτε:

i) τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$

ii) το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

iii) τη γωνία φ' που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

102. Δίνονται τα συγγραμμικά διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \left(x + 2,\ 5 - x\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \left(x - 7,\ 2x - 10\right),$$

όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $x = 1$

ii) να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

με τον άξονα $x'x$, όπου $\vec{\gamma} = (3, 5)$.

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Ορισμός

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\theta$ όπου θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Παράδειγμα

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}|=4, |\vec{\beta}|=6$ και $\theta=\frac{2\pi}{3}$, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta= 4\cdot 6\cdot \text{συν}\frac{2\pi}{3}=4\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-12.$$

Άμεσες Συνέπειες του Ορισμού

Πρόταση

- Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Ορισμός

Ονομάζουμε **τετράγωνο του $\vec{\alpha}$** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}^2$.

Πρόταση

Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει

$$\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2.$$

Απόδειξη

$$\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot\text{συν}0=|\vec{\alpha}|^2.$$

- Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύουν

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0 \quad \text{και} \quad \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1.$$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Πρόταση

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}.$$

Ιδιότητες του Εσωτερικού Γινομένου

Πρόταση

- Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\boldsymbol{(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})} \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$$

- Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}} \qquad \text{(επιμεριστική ιδιότητα).}$$

- Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι έγκυρη η ισοδυναμία

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1.}$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1), \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$. Έχουμε:

- $$\begin{aligned}(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}&=(\lambda x_1, \lambda y_1)\cdot(x_2, y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2\\&=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\end{aligned}$$

  και

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right)=\left(x_1,\ y_1\right)\cdot\left(\lambda x_2,\lambda y_2\right)=x_1\left(\lambda x_2\right)+y_1\left(\lambda y_2\right)$$
$$=\lambda\left(x_1x_2+y_1y_2\right)=\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$$

Επομένως,

$$\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right)=\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right).$$

- $$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\left(x_1,y_1\right)\cdot\left(x_2+x_3,\ y_2+y_3\right)=x_1\left(x_2+x_3\right)+y_1\left(y_2+y_3\right)$$
$$=\left(x_1x_2+x_1x_3\right)+\left(y_1y_2+y_1y_3\right)=\left(x_1x_2+y_1y_2\right)+\left(x_1x_3+y_1y_3\right)$$
$$=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$$

- $$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\ \Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$$
$$\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1.$$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Πρόταση

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα

$$\vec{\alpha}=\left(x_1,\ y_1\right)\quad\text{και}\quad\vec{\beta}=\left(x_2,\ y_2\right),$$

τότε

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}.$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

και επομένως,

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2,\quad\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

και

$$\left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ .$$

Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Παράδειγμα

Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (2,0)$ και $\vec{\beta} = (1,\sqrt{3})$, τότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{2\cdot 1 + 0\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}.$$

Επομένως,

$$\theta = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Και επειδή $\theta\in[0,\pi]$, συμπεραίνουμε ότι

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

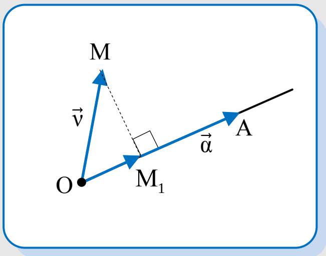
Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Ορισμός

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM} = \vec{v}.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε την προβολή M_1 του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΟΑ. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ ονομάζεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με **$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.**



Δηλαδή,

$$\overrightarrow{OM_1} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

- Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο.

Θεώρημα (των προβολών)

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{v}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ ισχύει

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$$

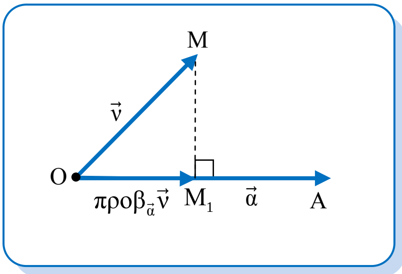
Απόδειξη

Με αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{OM} = \vec{v}$$

και την προβολή M_1 του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΟΑ, οπότε είναι

$$\overrightarrow{OM_1} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}.$$



Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} \cdot \vec{v} &= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} \cdot \left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}\right) = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M} \\
&= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + 0, \quad \text{αφού } \vec{\alpha} \perp \overrightarrow{M_1M} \\
&= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} \\
&= \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}.
\end{aligned}$$

- Η παραπάνω πρόταση εγγυάται ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε το ένα από τα δύο διανύσματα με την προβολή του στο άλλο.

Παράδειγμα

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\pi\rho o\beta_{\alpha} \vec{\beta} = (5, 6)$. Τότε έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 6 = -8$$

και

$$\vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8.$$

Λυμένες Ασκήσεις

32. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4 \text{ και } \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ **ii)** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$ **iii)** $(3\vec{\alpha}) \cdot (-4\vec{\beta})$ **iv)** $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$.

Λύση

i) Σύμφωνα με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot \text{συν}\frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \quad = 4.$$

ii) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

$$= 2^2 \quad = 4.$$

iii) Είναι

$$(3\vec{\alpha}) \cdot (-4\vec{\beta}) = -12(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = -12 \cdot 4 = -48.$$

iv) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$$= 4 - 2 \cdot 4$$

$$= 4 - 8 = -4.$$

Σημειώσεις

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right).$$

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0.$$

- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και ονομάζεται τετράγωνο του $\vec{\alpha}$. Ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2.$$

- Ισχύουν οι ιδιότητες
  - $(\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
  - $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

33. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ **ii)** $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0, \quad \text{αφού } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

Άρα,

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 9 + 0 = 9.$$

Σημείωση

Αν ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta},$$

τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$$

και αντιστρόφως.

ii) Έχουμε

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$$

και

$$\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 4^2 = 16.$$

Επομένως,

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 9 - 16 = -7.$$

Σχόλια

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$

34. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = 5, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ **ii)** $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}.$$

Άρα,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = 5 \cdot 2 = 10.$$

Σημειώσεις

- Αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

και αντιστρόφως.

- Αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

και αντιστρόφως.

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}^2 \\ &= 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 \\ &= 2|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2.\end{aligned}$$

Όμως,

$$|\vec{\alpha}| = 5, \quad |\vec{\beta}| = 2 \qquad \text{και} \qquad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10.$$

Επομένως,

$$(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2 \cdot 5^2 + 10 - 2^2 = 56.$$

35. **Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να βρείτε:

i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot \text{συν}\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Επίσης,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 1^2 = 1 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1.$$

Επομένως,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = 2 - 1 = 1.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, όταν δεν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους, αξιοποιούμε ή τον ορισμό ή γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

ii) Έχουμε

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$$= 4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 4 \cdot (-1)$$

$$= 4 \cdot 1^2 + 2^2 - 4 = 4.$$

Άρα,

$$|\vec{u}| = \sqrt{4} = 2.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το μέτρο ενός γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων αρκεί να βρούμε το τετράγωνο αυτού, αξιοποιώντας την ιδιότητα

$$|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}^2.$$

iii) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{u}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|}$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}.$$

Δηλαδή,

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{u}}\right)=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Και επειδή

$$0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{u}}\right)\le\pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{u}}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$ βρίσκουμε πρώτα το συνημίτονό της με βάση τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{u}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|}.$$

36. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(2,-5)\ \text{και}\ \ \vec{\beta}=(7,2).$$

Να βρείτε:

i) **τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$**

ii) **τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.**

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 7+(-5)\cdot 2=4.$$

Επίσης

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2,-5)+(7,2)=(9,-3)$$

και

$$\begin{aligned}3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}&=3(2,-5)-2(7,2)\\&=(6,-15)-(14,4)\\&=(-8,-19).\end{aligned}$$

Άρα,

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=9\cdot(-8)+(-3)\cdot(-19)=-15.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)\ \ \text{και}\ \ \vec{\beta}=(x_2,\ y_2),$$

αξιοποιούμε ή τον τύπο

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2.$$

ή τις γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

ii) Τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(2,-5) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}=(2,-5)+\kappa(7,2)=(7\kappa+2,\, 2\kappa-5)$$

είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}\right)=0.$$

Δηλαδή,

$$2(7\kappa+2)-5(2\kappa-5)=0$$

ή ισοδύναμα

$$14\kappa+4-10\kappa+25=0$$

και τελικά

$$\kappa=-\frac{29}{4}.$$

37. **Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων**

$$\vec{\alpha}=(-2,1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(-1,3).$$

Λύση

Αν ϑ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-2)(-1)+1\cdot 3=5,\ |\vec{\alpha}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

και

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

Επομένως,

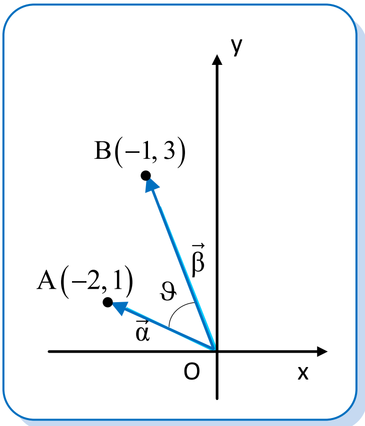
$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

ή ισοδύναμα

$$\vartheta=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$



Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη γωνία ϑ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}(x_2,y_2)$ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Και επειδή

$$0 \le \vartheta \le \pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

38. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Να βρείτε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο τα διανύσματα

$$\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \qquad \text{και} \qquad \vec{v} = 2\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

είναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) \\ &= 1 \cdot 4 \cdot \text{συν}\frac{2\pi}{3} \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.\end{aligned}$$

Σημείωση

$$\begin{aligned}\text{συν}\frac{2\pi}{3} &= \text{συν}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\text{συν}\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ii) Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(2\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right) = 0 &\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 + \lambda\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) - 2\left(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}\right) - \lambda \cdot \vec{\beta}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 + (\lambda - 2)\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) - \lambda \cdot |\vec{\beta}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + (\lambda - 2)(-2) - \lambda \cdot 4^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\lambda + 4 - 16\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow 18\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

39. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(1,2) \text{ και } \vec{\beta}=(\mu,1), \ \mu\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία ισχύει η σχέση:

i) $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$ **ii)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ **iii)** $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Λύση

i) Έχουμε $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$. Δηλαδή,

$$\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ \mu & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 1-2\mu=0\Leftrightarrow \mu=\frac{1}{2}.$$

ii) Έχουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Δηλαδή,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow 1\cdot\mu+2\cdot 1=0 \ \Leftrightarrow \mu=-2.$$

iii) Έχουμε

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Επομένως,

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot\mu+2\cdot 1=\mu+2.$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

και

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{\mu^2+1^2}=\sqrt{\mu^2+1}.$$

Σχόλιο

Η σχέση $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ συνεπάγεται τη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

και αντιστρόφως.
Πράγματι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Και επειδή

$$0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le\pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Επομένως, η σχέση **(1)** γράφεται

$$\frac{\mu+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\mu^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(\mu+2)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\mu^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 4(\mu+2)^2=10(\mu^2+1) \quad \text{και} \quad \mu+2>0$$

$$\Leftrightarrow 3\mu^2-8\mu-3=0 \quad \text{και} \quad \mu>-2$$

$$\Leftrightarrow \mu=3 \quad \text{ή} \quad \mu=-\frac{1}{3}.$$

40. **Δίνονται τα σημεία**

$$\mathbf{A(0,2)} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{B(3,1)}.$$

i) **Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $x'x$ για το οποίο ισχύει η σχέση**

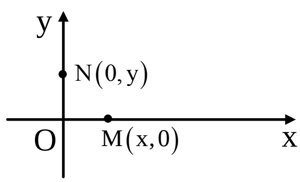
$$\overrightarrow{\mathbf{MA}}\perp\overrightarrow{\mathbf{MB}}.$$

ii) **Να βρείτε το σημείο Ν του άξονα $y'y$ για το οποίο ισχύει η σχέση**

$$\overrightarrow{\mathbf{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BN}}=12.$$

Λύση

i) Το ζητούμενο σημείο Μ είναι σημείο του άξονα $x'x$. Επομένως οι συντεταγμένες του είναι της μορφής $(x,0)$ για κάποιο $x\in\mathbb{R}$.



Σχόλιο
Το σημείο Μ ανήκει στον άξονα $x'x$. Άρα, οι συντεταγμένες του είναι της μορφής $(x,0)$ για κάποιο $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε

$$\overrightarrow{MA}=(0-x,2-0)=(-x,2)$$

και

$$\overrightarrow{MB}=(3-x,1-0)=(3-x,1).$$

Όμως,

$$\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}.$$

Δηλαδή,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow -x(3-x)+2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=2.$$

Άρα,

$$M(1,0) \quad \text{ή} \quad M(2,0).$$

ii) Το ζητούμενο σημείο Ν είναι σημείο του άξονα $y'y$. Επομένως,

$$N(0, y)$$

για κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\overrightarrow{BA} = (0-3,\, 2-1) = (-3, 1)$$

και

$$\overrightarrow{BN} = (0-3,\, y-1) = (-3,\, y-1).$$

Οπότε, η σχέση

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BN} = 12$$

ισοδύναμα γράφεται

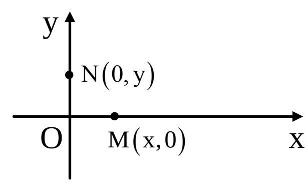
$$(-3)\cdot(-3) + 1\cdot(y-1) = 12$$

$$\Leftrightarrow 9 + y - 1 = 12$$

$$\Leftrightarrow y = 4.$$

Άρα,

$$N(0, 4).$$



Σχόλιο

Το σημείο Ν ανήκει στον άξονα $y'y$. Άρα, οι συντεταγμένες του είναι της μορφής $(0, y)$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}$.

41. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε**

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1, \quad \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{A\Gamma}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ **ii)** $3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$ **iii)** $\overrightarrow{AB}^2$ **iv)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.

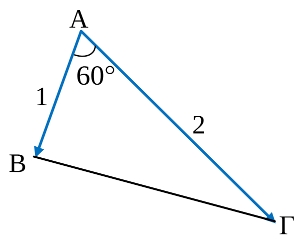
Λύση

i) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| \cdot \text{συν}\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{A\Gamma}}\right)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot \text{συν}\frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$



ii) Έχουμε

$$3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A} = 3\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{A\Gamma}\right)$$
$$= -3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = -3\cdot 1 = -3.$$

iii) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 1^2 = 1\,.$$

iv) Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}.$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}^2$$
$$= 1 - 1 = 0.$$

42. **Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε**

$$(AB) = \alpha \quad \text{και} \quad (B\Gamma) = \beta\,.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ρ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Delta}$

ii) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{P\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \alpha^2\,.$

Λύση

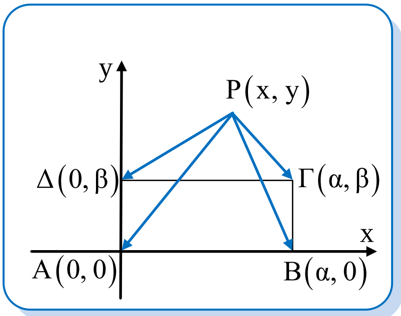
i) Σε κατάλληλο σύστημα αναφοράς θέτουμε

$$A(0,0) \quad \text{και} \quad B(\alpha,0).$$

Και επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έχουμε

$$\Gamma(\alpha,\beta) \quad \text{και} \quad \Delta(0,\beta)\,.$$

Επομένως, αν $P(x,y)$, τότε έχουμε



$$\overrightarrow{PA} = (-x, -y), \qquad \overrightarrow{PB} = (\alpha - x, -y)$$

$$\overrightarrow{P\Gamma} = (\alpha - x, \beta - y) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{P\Delta} = (-x, \beta - y).$$

Άρα,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{P\Gamma} = -x(\alpha - x) - y(\beta - y)$$

$$= -\alpha x + x^2 - \beta y + y^2 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{P\Delta} = (\alpha - x)(-x) - y(\beta - y)$$

$$= -\alpha x + x^2 - \beta y + y^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{P\Delta}.$$

Μέθοδος των Συντεταγμένων

Εφοδιάζουμε το επίπεδο με ένα σύστημα συντεταγμένων έτσι, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερες μηδενικές συντεταγμένες. Με τον τρόπο αυτό ένα γεωμετρικό πρόβλημα γίνεται κατά κανόνα απλούστερο, αφού μετατρέπεται σε πρόβλημα αλγεβρικό.

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{PA} = (-x, -y), \qquad \overrightarrow{BA} = (-\alpha, 0)$$

$$\overrightarrow{P\Gamma} = (\alpha - x, \beta - y) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (\alpha, 0).$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BA} = (-x)\cdot(-\alpha) + (-y)\cdot 0 = \alpha x$$

και

$$\overrightarrow{P\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (\alpha - x)\cdot \alpha + (\beta - y)\cdot 0 = \alpha^2 - \alpha x.$$

Άρα,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{P\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \alpha x + \alpha^2 - \alpha x = \alpha^2.$$

43. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 - 1$ **ii)** **αν ισχύει** $|\vec{\alpha}| = 1$, **τότε** $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$$
$$= \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}.$$

Όμως,

$$\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = \left(\sqrt{2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1}\right)^2 = 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1.$$

Άρα,

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 1 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2 - 1.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 - 1$$

δηλαδή

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 1.$$

Και επειδή

$$|\vec{\alpha}| = 1$$

συμπεραίνουμε ότι

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 1^2 - 1 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0.$$

Επομένως,

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$$

και τελικά

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

Παρατήρηση

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το μόνο διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο μηδέν. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

δηλαδή

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0.$$

44. **Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:**

$$\vec{\alpha}\neq\vec{\beta},\ |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}| \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ **ii)** $\vec{\gamma}\,//\,(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0$$

Άρα,

$$\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}).$$

ii) Έχουμε

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2=0$$

Οπότε,

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}).$$

Επίσης

$$\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}).$$

Και επειδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}\neq\vec{0}$, αφού $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\gamma}\,//\,\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

Σχόλιο

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta}).$$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$$

αφού

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}\neq\vec{0}.$$

45. **Έστω διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις**

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=4 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=4.$$

Να αποδείξετε ότι

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|.$$

Λύση

Από τη σχέση

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=4 \qquad \textbf{(1)}$$

υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=16 \qquad \textbf{(2)}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 &=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2+\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2\\ &=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\\ &=2\vec{\alpha}^2+2\vec{\beta}^2=2\left(\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2\right)\\ &=2\cdot 4=8.\end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση **(2)** γράφεται

$$8+2|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=16 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=8$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=4. \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(3)** συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Δηλαδή,

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2.$$

Μεθοδολογία

Όταν οι σχέσεις ενός προβλήματος περιέχουν μέτρα γραμμικών συνδυασμών διανυσμάτων, για τα οποία δεν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους, τότε:

- Υψώνουμε τα μέλη των σχέσεων στο τετράγωνο.
- Αξιοποιούμε την ιδιότητα $$|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$$

Σημείωση

Αν είναι

$$x_1+x_2=S$$

και

$$x_1x_2=P,$$

τότε οι αριθμοί x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-Sx+P=0.$$

46. **Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα**

$$\vec{u}=(4,3)$$

και έχουν μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

Λύση

α΄ τρόπος:

Έστω $\vec{v}=(x,y)$ ζητούμενο διάνυσμα.

Έχουμε

$$\vec{v}\perp\vec{u}.$$

Δηλαδή,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 4x+3y=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης,

$$|\vec{v}|=2|\vec{u}|.$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{4^2+3^2} \Leftrightarrow x^2+y^2=100 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

$$(x,y)=(6,-8) \quad ή \quad (x,y)=(-6,8).$$

Άρα,

$$\vec{v}=(6,-8) \quad ή \quad \vec{v}=(-6,8).$$

β΄ τρόπος:

Ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec{u}=(4,3)$$

είναι το διάνυσμα

$$\vec{\beta}=(3,-4).$$

Επομένως, το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{v}$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\beta}$ και συνεπώς είναι της μορφής

$$\vec{v}=\lambda\vec{\beta}=\lambda(3,-4)=(3\lambda,-4\lambda).$$

Όμως,

$$|\vec{v}|=2|\vec{u}|.$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{(3\lambda)^2+(-4\lambda)^2}=2\sqrt{4^2+3^2}$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2=100 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2.$$

Άρα,

$$\vec{v}=(6,-8) \quad ή \quad \vec{v}=(-6,8).$$

Μεθοδολογία

Εύρεση διανύσματος $\vec{v}$ σημαίνει εύρεση των συντεταγμένων του (x,y). Έχουμε λοιπόν δύο αγνώστους και συνεπώς χρειαζόμαστε δύο σχέσεις οι οποίες θα προκύψουν από ισάριθμες πληροφορίες. Οι πληροφορίες αυτές είναι:

- $\vec{v}\perp\vec{u}$
- $|\vec{v}|=2|\vec{u}|$.

Παρατήρηση

Ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec{\alpha}=(x,y)$$

είναι το διάνυσμα

$$\vec{\beta}=(y,-x)$$

αφού

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=xy+y(-x)=0.$$

47. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(3,4) \quad \text{και} \quad \vec{u}=(-7,24).$$

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ σε δύο μη μηδενικές και κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Λύση

Αναζητούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{u}=\vec{\beta}+\vec{\gamma} \quad \text{με} \quad \vec{\beta}\perp\vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}//\vec{\alpha}..$$

- Έχουμε

$$\vec{\beta}//\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\neq\vec{0}.$$

Άρα, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}^*$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}=\lambda(3,4)=(3\lambda,4\lambda).$$

- Επομένως, από τη σχέση

$$\vec{u}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$$

παίρνουμε

$$\vec{\gamma}=\vec{u}-\vec{\beta}=(-7,24)-(3\lambda,4\lambda)$$
$$=(-7-3\lambda,24-4\lambda).$$

- Όμως,

$$\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}.$$

Δηλαδή,

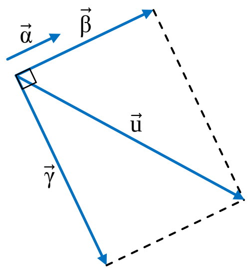
$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0$$

ή ισοδύναμα

$$3\lambda\cdot(-7-3\lambda)+4\lambda\cdot(24-4\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(-21-9\lambda+96-16\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=3, \quad \text{αφού} \quad \lambda\neq 0.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\beta}=(9,12) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}=(-16,12).$$



Μεθοδολογία

- Αξιοποιούμε αρχικά την πληροφορία

$$\vec{\beta}//\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\neq\vec{0}$$

γράφοντας

$$\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}$$

για κάποιον $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Στη συνέχεια επικαλούμαστε τη σχέση

$$\vec{u}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\vec{\gamma}=\vec{u}-\vec{\beta}=\vec{u}-\lambda\vec{\alpha}.$$

- Με αυτό τον τρόπο οι συντεταγμένες των ζητούμενων διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ εκφράζονται συναρτήσει ενός μόνο αγνώστου λ, ο οποίος υπολογίζεται από την πληροφορία $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$.

48. **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις**

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 8, \quad |\vec{\gamma}| = 5 \quad \text{και} \quad 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = 100$

ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

iii) **αν για το διάνυσμα $\vec{\delta}$ ισχύουν οι σχέσεις**

$$\left(\vec{\delta} + \vec{\beta}\right) // \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} \perp \left(4\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right),$$

τότε

$$\vec{\delta} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma}.$$

Άρα,

$$\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = \left(2\vec{\gamma}\right)^2 = 4\vec{\gamma}^2$$
$$= 4|\vec{\gamma}|^2 = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = 100.$$

Δηλαδή,

$$9\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 100$$
$$\Leftrightarrow 9|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 100$$
$$\Leftrightarrow 9 \cdot 2^2 + 8^2 - 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 100$$
$$\Leftrightarrow -6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0.$$

Επομένως,

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

iii) Έχουμε

$$\left(\vec{\delta}+\vec{\beta}\right)//\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\neq\vec{0}.$$

Άρα, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\delta}+\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha},$$

δηλαδή

$$\vec{\delta}=\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}.$$

Όμως,

$$\vec{\delta}\perp\left(4\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right).$$

Επομένως,

$$\vec{\delta}\cdot\left(4\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(4\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0 \Leftrightarrow 4\lambda\vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda\cdot\left|\vec{\alpha}\right|^2+\lambda\cdot 0-4\cdot 0-\left|\vec{\beta}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda\cdot 2^2-8^2=0 \Leftrightarrow \lambda=4.$$

Άρα,

$$\vec{\delta}=4\vec{\alpha}-\vec{\beta}.$$

49. **Δίνονται τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=\left(1,2\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=\left(7,4\right).$$

Να βρείτε:

i) **το εσωτερικό γινόμενο** $\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

ii) **τις συντεταγμένες του διανύσματος** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 7+2\cdot 4=15.$$

Άρα,

$$\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=15.$$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \,//\, \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \neq \vec{0}.$$

Άρα,

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} = \lambda(1, 2) = (\lambda, 2\lambda)$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Όμως, στο ερώτημα **i)** αποδείξαμε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = 15.$$

Δηλαδή,

$$1 \cdot \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 15$$

ή ισοδύναμα

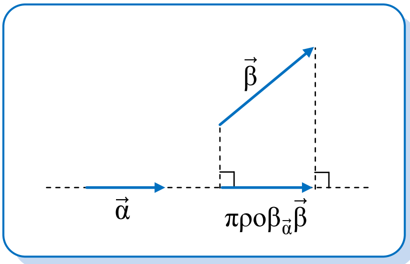
$$5\lambda = 15$$

και τελικά

$$\lambda = 3.$$

Επομένως,

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = (3, 2 \cdot 3) = (3, 6).$$



Μεθοδολογία

Το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Επομένως,

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.
Η εύρεση του λ προκύπτει από την αξιοποίηση της ιδιότητας

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}.$$

50. **Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια, ώστε**

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

iii) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}.$$

Άρα,

$$\vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{\beta} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{\beta}\right) \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

Επίσης, από τη σχέση

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha}$$

προκύπτει ότι

$$\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{\alpha}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 .$$

ii) Στο ερώτημα **i)** αποδείξαμε ότι

$$\frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 .$$

Δηλαδή,

$$|\vec{\beta}|^2 = 3|\vec{\alpha}|^2$$

και τελικά

$$|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}.$$

iii) Αν ϑ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

Όμως,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}.$$

Επομένως,

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Και επειδή

$$0 \le \vartheta \le \pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\vartheta = \frac{\pi}{6}.$$

51. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq 3.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2$ **ii)** $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$

Λύση

i) Έχουμε

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq 3$$

Επίσης, σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα, ισχύει

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 1 + 2 = 3.$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 3.$$

Οπότε,

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = 3^2 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 9$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2.$$

Σχόλιο
Γνωρίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Οπότε, για να βρούμε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, (αφού δεν ξέρουμε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$), αρκεί να βρούμε το μέτρο ενός γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Είναι λοιπόν λογικό να στραφούμε στον υπολογισμό του $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, αφού ήδη γνωρίζουμε ότι

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq 3.$$

ii) Η σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** γράφεται

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}.$$

Επομένως, $\vec{\beta} \uparrow\uparrow 2\vec{\alpha}$.

Και επειδή $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = |2\vec{\alpha}|$, συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}.$$

Σχόλιο
Για να αποδείξουμε ότι $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\vec{\beta} \uparrow\uparrow 2\vec{\alpha} \text{ και } |\vec{\beta}| = |2\vec{\alpha}|.$$

52. **Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε**

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \text{ και } \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 2$$

Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Λύση

Σχόλιο

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ έχουν ίσα μέτρα. Οπότε για να αποδείξουμε ότι είναι ίσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ομόρροπα.

α΄ τρόπος:

Έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) + |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) + \text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) = 2.$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 1 \text{ και } \text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) = 1.$$

διότι

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \le 1 \quad \text{και} \quad \text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) \le 1$$

Οπότε,

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}.$$

Επιπλέον

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$$

και συνεπώς

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$

β΄ τρόπος:

Έχουμε

$$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 + \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)^2$$

$$= \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}$$

$$= |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 - 2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right) = 1 + 2 + 1 - 2\cdot 2 = 0.$$

Άρα,

$$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Δηλαδή,

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$

53. **i)** **Να αποδείξετε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση**

$$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

ii) **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση**

$$x^2+y^2=9,$$

να αποδείξετε ότι

$$|3x+4y|\le 15.$$

και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $4x=3y$.

Λύση

i) • Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \text{όπου} \quad \varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right).$$

Επομένως, η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\varphi|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\varphi|\le 1.$$

Και επειδή η τελευταία σχέση είναι αληθής, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει και με την ισοδύναμη προς αυτή ζητούμενη σχέση.

• Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0.$$

Επομένως, η ζητούμενη σχέση προφανώς ισχύει και μάλιστα ως ισότητα.

Άρα, για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

ii) Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(3,4), \quad \vec{\beta}=(x,y)$$

και παρατηρούμε ότι

$$|3x+4y|=\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|.$$

Όμως, σύμφωνα με το ερώτημα **i)** έχουμε

$$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}=15.$$

Παρατήρηση

Η παράσταση

$$3x+4y$$

είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}=(3,4)$$

και

$$\vec{\beta}=(x,y).$$

Άρα,

$$|3x+4y| \le 15.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}.$$

Τελικά αν και μόνο αν

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y-4x=0 \Leftrightarrow 4x=3y.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

103. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** $(2\vec{\alpha})\cdot(3\vec{\beta})$

iii) $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}$ **iv)** $\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-6\vec{\beta})$.

104. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=8,\ |\vec{\beta}|=3 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot(-2\vec{\beta})$

iii) $\vec{\alpha}^2$ **iv)** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

105. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=2 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+4\vec{\beta})$.

106. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}|=3 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}+\vec{\beta}),$$

να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

iii) $(2\vec{\alpha})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

107. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=3 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

108. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=4,\ |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

109. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=4 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}.$$

Να βρείτε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii) τον $\kappa\in\mathbb{R}$ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

iii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}+4\vec{v}$, αν είναι $\kappa=-\dfrac{1}{2}$.

110. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$$

να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\perp(\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$

111. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(3,2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(4,3).$$

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha}\perp\vec{u} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}\cdot\vec{u}=1.$$

ii) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\vec{u}\,//\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right).$$

112. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(1,-4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(3,1).$$

Να βρείτε:

i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$

ii) τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

113. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα

$$\vec{u}=(2,1)$$

και έχουν μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{u}$.

114. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(5,0) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-3,4)$$

να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

115. Δίνονται τα σημεία

$$A(0,1) \quad \text{και} \quad B(2,9).$$

Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $x'x$ για το οποίο ισχύει:

i) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AM}$ **ii)** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8.$

116. Δίνονται τα σημεία

$$A\left(0, \sqrt{3}\right), B(-1, 0) \quad \text{και} \quad \Gamma(1, 0).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

ii) Να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{\Gamma M} = \vec{0}.$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{M\Gamma}.$$

117. Δίνεται το τραπέζιο ΟΑΒΓ με

$$O(0, 0), A(x, 0), B(2, 8) \quad \text{και} \quad \Gamma(0, 8)$$

όπου x σταθερός θετικός αριθμός. Αν για το μέσο Μ της ΟΓ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $x = 8$ **ii)** $\overrightarrow{O\Gamma}^2 = 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}.$

118. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha} = \left(-\sqrt{3}, 3\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \left(1, \sqrt{3}\right).$$

119. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (2, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \left(\kappa, \sqrt{3}\right).$$

Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει:

i) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **ii)** $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

120. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$\left|\vec{\alpha}\right| = 2, \quad \left|\vec{\beta}\right| = 3 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Αν είναι $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε:

i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

121. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}.$$

Αν είναι $\vec{u} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να βρείτε:

i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$

iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

122. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1 + x, 1 - x),$$

όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αν $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία φ τέτοια, ώστε $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ να βρείτε:

i) το διάνυσμα $\vec{\beta}$

ii) τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

123. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \qquad \text{και} \qquad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2.$$

i) Να βρείτε τις γωνίες

$$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \qquad \text{και} \qquad (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}).$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

124. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{A\Gamma}| = 3 \qquad \text{και} \qquad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}) = \frac{\pi}{4}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

ii) $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii) $\overrightarrow{AB}^2$

iv) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.

125. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=1,\quad \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=2 \quad \text{και} \quad \left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

ii) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

iii) Έστω Μ το μέσον της ΒΓ και σημείο Ν τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{για κάποιο} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{MN}.$$

126. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία

$$A(2,\,3),\quad B(1,\,1) \quad \text{και} \quad \Gamma\left(2+2\sqrt{3},\,3-\sqrt{3}\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α

ii) $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

127. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$$

όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}|=1,\quad |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

ii) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΑΒΓΔ.

128. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|=1 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Αν είναι $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να βρείτε:

i) το $|\vec{\gamma}|$

ii) τις γωνίες $\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right)$ και $\left(\vec{\beta}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right)$.

129. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, -4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (0, 1)\,.$$

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{u} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 4\,.$$

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

130. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (-1, 2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (4, 7).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

131. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 - |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|$$

να αποδείξετε ότι

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 2.$$

132. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

iii) $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$ **iv)** $\vec{\gamma} = -3\vec{\alpha}.$

133. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$ **ii)** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\dfrac{1}{2}$

iii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -\dfrac{9}{2}$.

134. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -\dfrac{1}{2}$ **ii)** $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| = \sqrt{3}$.

135. **i)** Να αποδείξετε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2.$$

ii) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}.$$

136. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

iii) αν ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4,$$

τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

iv) αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ και ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0},$$

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

137. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0.$$

i) Να υπολογίσετε το $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

138. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=1 \qquad \text{και} \qquad \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=2.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2=\dfrac{5}{2}$ **β)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\dfrac{3}{4}$.

ii) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=1$

β) να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

139. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=1 \qquad \text{και} \qquad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Αν για το διάνυσμα $\vec{\delta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\left(\vec{\delta}-\vec{\beta}\right)//\vec{\alpha} \qquad \text{και} \qquad \left|\vec{\delta}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\delta}=-\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **β)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\delta}$.

140. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τρία μοναδιαία διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-3\,.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$ **ii)** $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=2$

iii) $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

141. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με

$$\mathrm{A}(0,3),\ \ \mathrm{B}(-9,0)\ \ \text{και}\ \ \Gamma(\gamma,0)$$

όπου γ σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός. Αν ισχύει η σχέση

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|,$$

τότε:

i) να βρείτε την τιμή του γ

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=3\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=2\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}}$$

iii) να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}\perp\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$.

142. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ με

$$\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(4,0),\mathrm{B}(4,\kappa)$$

και $\Gamma(0,\kappa)$, όπου κ σταθερός θετικός αριθμός. Θεωρούμε το σημείο Δ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}=3\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $\left(3,\dfrac{3\kappa}{4}\right)$

ii) αν Ε είναι το μέσον του ΟΑ και ισχύει η σχέση, $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}\perp\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$, τότε το ορθογώνιο ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο.

143. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με

$$\mathrm{A}(0,4),\ \ \mathrm{B}(2,0)\ \ \text{και}\ \ \Gamma(\alpha,\beta)$$

και τέτοιο, ώστε οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ να είναι κάθετες μεταξύ τους.
Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2+\beta^2=5\alpha-2\beta+4$ **ii)** $(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=5(\mathrm{B\Gamma})^2$.

144. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3, \quad \vec{\alpha} \perp \vec{x} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}\cdot\vec{x} + 2 = 0\,.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{x} \neq \vec{0}$

ii) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

iii) αν ισχύει η σχέση $\vec{x} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, τότε $\kappa + 3\lambda = 0$.

145. Έστω Α και Β δύο σημεία του επιπέδου τέτοια, ώστε

$$(AB) = 8.$$

i) Αν Κ είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MK}|^2 - 16\,.$$

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 9.$$

146. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x, y)$$

τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

i) Να αποδείξετε ότι $x = -3y$.

ii) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{u}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{και} \quad |\vec{u}| = \sqrt{20}.$$

147. **i)** Να αποδείξετε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

ii) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$x^2 + y^2 = 5\,,$$

να αποδείξετε ότι

$$|2x + y| \leq 5.$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 2y$.

148. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(5,4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(1,-1).$$

Να βρείτε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

149. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(4,6) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(x,x+6),$$

όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός τέτοια, ώστε

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=(2,3).$$

i) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

iii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

150. **i)** Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, να αποδείξετε ότι

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}.$$

ii) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων,

$$A(8,2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-1,4).$$

α) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

γ) Αν Δ είναι η προβολή του Α πάνω στην ΟΒ, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΟΔ}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha} \ \text{ και } \ \overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\beta}.$$

151. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}|^2 = 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}.$$

Αν για κάποιον πραγματικό αριθμό λ ισχύει η σχέση

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha},$$

να αποδείξετε ότι:

i) τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους

ii) $\lambda = 2$

iii) $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2$

iv) $2|\vec{\alpha}| \le \left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|$.

152. Έστω Ο η αρχή των αξόνων και Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{O\Gamma} = (-1, 2) \quad \text{και} \quad \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{O\Gamma} = (2, 1).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}.$$

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

153. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = 2\left|\vec{\beta}\right|.$$

Αν για κάποιον πραγματικό αριθμό λ ισχύει η σχέση

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right) = \frac{1}{\lambda}\vec{\alpha},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda = 2$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right) = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$

iii) $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}|$

iv) $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζουμε διάνυσμα;
2. Ποιο διάνυσμα λέγεται μηδενικό διάνυσμα;
3. Τι ονομάζουμε μέτρο ή μήκος ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;
4. Ποιο διάνυσμα λέγεται μοναδιαίο διάνυσμα;
5. Τι ονομάζουμε φορέα ενός μη μηδενικού διανύσματος;
6. Πώς ορίζουμε τον φορέα του μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$;
7. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά;
8. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα και πότε αντίρροπα;
9. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα;
10. Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα;
11. Τι ονομάζουμε γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;
12. Με τι ισούται η γωνία θ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όταν αυτά είναι ομόρροπα και με τι όταν αυτά είναι αντίρροπα;
13. Πότε λέμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ορθογώνια ή κάθετα;
14. Πώς προσθέτουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_\nu$;
15. Τι ονομάζουμε διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα ενός σημείου Μ ως προς ένα σταθερό σημείο αναφοράς Ο;
16. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
17. Να διατυπώσετε την τριγωνική ανισότητα στη γλώσσα των διανυσμάτων.
18. Να δώσετε τον ορισμό του γινομένου ενός πραγματικού αριθμού λ με ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
19. Τι ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

20. Αν Μ είναι το μέσο ενός τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

21. Τι ονομάζουμε άξονα με αρχή το Ο και μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$;

22. Τι ονομάζουμε τετμημένη ενός σημείο Μ που βρίσκεται σε έναν άξονα $x'x$;

23. Τι ονομάζουμε καρτεσιανό επίπεδο;

24. Τι ονομάζουμε συνιστώσες, τι τετμημένη και τι τεταγμένη ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ του καρτεσιανού επιπέδου;

25. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
- $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1, \lambda y_1),\ \lambda\in\mathbb{R}$

26. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x,y)$ είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

27. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

28. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

29. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

30. Τι ονομάζουμε ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$.

31. Τι ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$;

32. Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x\neq 0$;

33. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$.

34. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

35. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

36. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1.$$

37. Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_2^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

38. Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Τι ονομάζουμε προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$;

39. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{v}\neq\vec{0}$, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Στη Γεωμετρία το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Σ Λ

2. Μηδενικό διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα που η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν. Σ Λ

3. Αν ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται μοναδιαίο διάνυσμα. Σ Λ

4. Το μηδενικό διάνυσμα έχει άπειρους φορείς. Σ Λ

5. Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται φορέας του $\overrightarrow{AB}$. Σ Λ

6. Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά, αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο φορέα. Σ Λ

7. Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ομόρροπα, αν και μόνο αν έχουν την ίδια διεύθυνση. Σ Λ

8. Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα, αν και μόνο αν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Σ Λ

9. Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι ίσα, τότε είναι ομόρροπα. Σ Λ

10. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$. Σ Λ

11. Όλα τα μοναδιαία διανύσματα είναι ίσα μεταξύ τους. Σ Λ

12. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=\pm\vec{\beta}$. Σ Λ

13. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=0$. Σ Λ

14. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, τότε $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. Σ Λ

15. Δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, αν και μόνο αν έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Σ Λ

16. Αν δύο διανύσματα είναι αντίθετα, τότε είναι αντίρροπα. Σ Λ

17. Αν θ είναι η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων, τότε $0°\le\theta\le180°$. Σ Λ

18. Αν θ είναι η γωνία δύο μη μηδενικών και ομόρροπων διανυσμάτων, τότε $\theta=0$. Σ Λ

19. Ισχύει $\vec{0}\perp\vec{\alpha}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου. Σ Λ

20. Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$. Σ Λ

21. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του, μείον τη διανυσματική ακτίνα του πέρατός του. Σ Λ

22. Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$. Σ Λ

23. Για κάθε $\lambda\neq0$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, ισχύει $\lambda\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$. Σ Λ

24. Ισχύει η ισοδυναμία $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$. Σ Λ

25. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$. Σ Λ

26. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$, τότε $\lambda=\mu$. Σ Λ

27. Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ

28. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ

29. Αν Μ είναι το μέσο ενός τμήματος ΑΒ, τότε για κάθε σημείο Ο ισχύει

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2}.$$ Σ Λ

30. Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες. Σ Λ

31. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ είναι το μέσον του ΑΒ, τότε ισχύει

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{2}.$$ Σ Λ

32. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Σ Λ

33. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = x^2 + y^2$. Σ Λ

34. Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$ Σ Λ

35. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$. Σ Λ

36. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$. Σ Λ

37. Για τη γωνία φ που σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ ισχύει $0 \leq \varphi < 2\pi$. Σ Λ

38. Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $y \neq 0$ είναι $\lambda = \frac{x}{y}$. Σ Λ

39. Αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 τότε ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Σ Λ

40. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα Σ Λ

41. Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$. Σ Λ

42. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως. Σ Λ

43. Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως. Σ Λ

44. Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$. Σ Λ

45. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. Σ Λ

46. Υπάρχουν διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})\neq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$. Σ Λ

47. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta}$. Σ Λ

48. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$. Σ Λ

49. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. Σ Λ

50. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$. Σ Λ

51. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Σ Λ

52. Αν λ_1,λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=1$. Σ Λ

53. Αν θ είναι η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$. Σ Λ

54. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Σ Λ

55. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, τότε ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}.$$

Σ Λ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α₁. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1.$$

Α₂. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Α₃. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

β) Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει

$$\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}| + \left|\vec{\beta}\right|.$$

γ) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

δ) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

ε) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει

$$\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}\right).$$

Θέμα Β

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε το μέσο της ΒΓ και Ζ το μέσο της ΔΕ. Αν είναι

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta},$$

τότε:

Β1. να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Β2. να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}\right)$$

Β3. αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $\alpha = 4$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

Θέμα Γ

Δίνονται τα σημεία

$$A(5,3),\ \ B(3,1)$$

και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τέτοιο, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{\alpha}}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Να βρείτε:

Γ1. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{\alpha}$

Γ2. το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{\beta}=\overrightarrow{AB}-\vec{\alpha}$$

Γ3. το διάνυσμα $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{\beta}$

Γ4. τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $x'x$.

Θέμα Δ

Δίνονται τα σημεία

$$A(-2,x),\ \ B(0,2x) \ \text{ και } \ \Gamma(x,6) \ \text{ με } \ x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

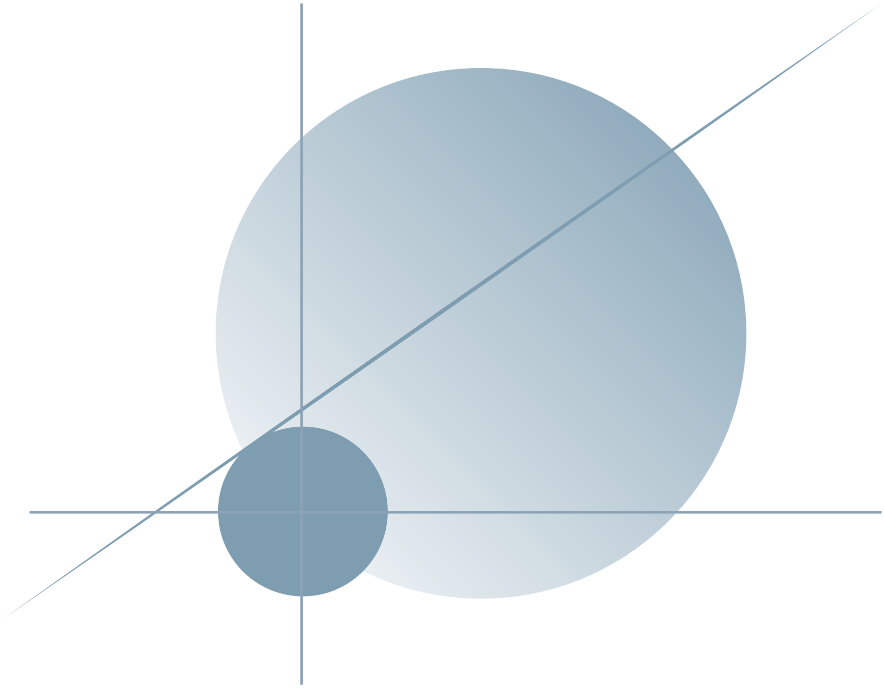
Δ2. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο ερώτημα **Δ1**, να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ.

Δ3. Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΑΓ, τότε:

α) να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων

β) να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{OA}$.

Η Ευθεία στο Επίπεδο



*«Η επιστήμη των καθαρών Μαθηματικών
μπορεί να διεκδικήσει τον τίτλο
της πιο πρωτότυπης δημιουργίας
του ανθρώπινου πνεύματος.»*

A. N. Whitehead

Alfred North Whitehead

(1861 – 1947)

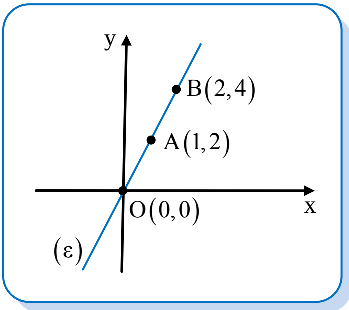
Ο Άλφρεντ Νορθ Γουάιτχεντ, Άγγλος μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε στις 18 Φεβρουαρίου 1861. Στην αρχή της σταδιοδρομίας του έγραψε κυρίως για τα μαθηματικά, τη λογική, και τη φυσική. Το πιο αξιοσημείωτο έργο σε αυτούς τους τομείς είναι το τρίτομο *Principia Mathematica* (1910-13), το οποίο συνέγραψε με τον πρώην μαθητή του Μπέρτραντ Ράσελ. Το *Principia Mathematica* θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά έργα του εικοστού αιώνα στη μαθηματική λογική.Στα τέλη του 1910 και στις αρχές της δεκαετίας του 1920, ο Γουάιτχεντ σταδιακά έστρεψε την προσοχή του από τα μαθηματικά στη φιλοσοφία της επιστήμης, και, τελικά στη μεταφυσική. Πέθανε στις 30 Δεκεμβρίου 1947.

Η Ευθεία

Ορισμός

Ονομάζουμε **λύση** μιας εξίσωσης $f(x, y) = 0$ με δύο αγνώστους x, y κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Παράδειγμα



Τα ζεύγη $(x, y) = (1, 2), (2, 4), (0, 0)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $y = 2x$. Βέβαια, τα παραπάνω ζεύγη αριθμών δεν είναι οι μόνες λύσεις της εξίσωσης $y = 2x$, αφού αυτή είναι φανερό ότι επαληθεύεται από άπειρα ζεύγη αριθμών. Αν τώρα σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρήσουμε όλα τα σημεία που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y = 2x$ θα προκύψει μια γραμμή η οποία όπως γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις είναι μια ευθεία (ε). Επίσης, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας (ε), οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x$. Δηλαδή, κάθε λύση της εξίσωσης $y = 2x$ αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο της ευθείας (ε) και, αντίστροφα, σε κάθε σημείο της ευθείας (ε) αντιστοιχεί μια λύση της εξίσωσης $y = 2x$. Αυτή η αντιστοιχία μας επιτρέπει να βλέπουμε την εξίσωση $y = 2x$ σαν την ευθεία (ε) και αντιστρόφως.

Από το παραπάνω, γενικεύοντας οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός

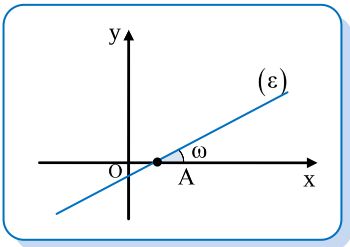
Μια εξίσωση $f(x, y) = 0$ με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C αν και μόνο αν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνον αυτές την επαληθεύουν.

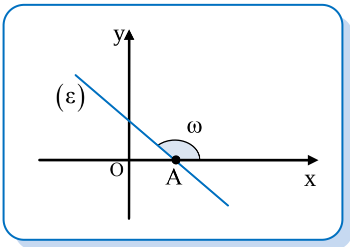
- Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι έχει επέλθει μία πλήρης Αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας. Πράγματι, κάθε σημείο του επιπέδου το βλέπουμε σαν ένα ζεύγος αριθμών, κάθε γραμμή C του επιπέδου τη βλέπουμε σαν μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και τα κοινά σημεία δύο γραμμών τα βλέπουμε ως λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους. Οπότε, μπορούμε να αντιμετωπίζουμε τα διάφορα προβλήματα της Γεωμετρίας με Αλγεβρικές μεθόδους. Αυτό ακριβώς είναι και το βασικό αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις απλούστερες γραμμές που είναι οι ευθείες.

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορισμός

Έστω μία ευθεία (ε) του καρτεσιανού επιπέδου η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α. Ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$**, τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία (ε). Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει μ' αυτόν γωνία $\omega = 0$.





- Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$0° \le \omega < 180° \quad \text{ή σε ακτίνα} \quad 0 \le \omega < \pi.$$

Ορισμός

Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας (ε) την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$. Για να παραστήσουμε τον συντελεστή διεύθυνσης, συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα λ. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\lambda = \varepsilon\varphi\omega}\,.$$

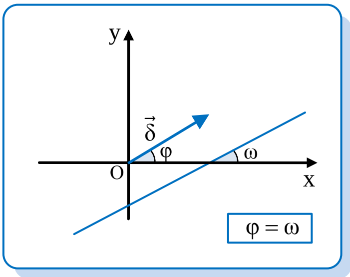
- Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ορίζεται αν και μόνο αν αυτή δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δηλαδή αν και μόνο αν σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega \ne \dfrac{\pi}{2}$.

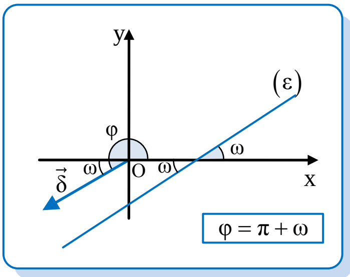
- Για τον συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας που σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$ ισχύουν:
  - $\lambda > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
  - $\lambda < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \omega < \pi$
  - $\lambda = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$.

Πρόταση

Αν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα μεταξύ τους και όχι κάθετα στον άξονα $x'x$, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Απόδειξη





Έστω ευθεία (ε) και διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλα μεταξύ τους. Έστω, επίσης, ω και φ οι γωνίες που σχηματίζουν η (ε) και το $\vec{\delta}$ με τον άξονα $x'x$. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi = \omega \quad \text{ή} \quad \varphi = \pi + \omega.$$

Οπότε,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega\,.$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_{\varepsilon}.$$

Πρόταση

Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε), αφού τα σημεία A και B είναι σημεία της ευθείας (ε). Οπότε,

$$\lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Παράδειγμα

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 5)$ και $B(3, 11)$ είναι

$$\lambda = \frac{11-5}{3-(-2)} = \frac{6}{5}.$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

Πρόταση

Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε

- $\boldsymbol{\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$
- $\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ τέτοια, ώστε

$$\vec{\delta}_1 // (\varepsilon_1) \quad \text{και} \quad \overleftarrow{\delta}_2 // (\varepsilon_2).$$

Οπότε, τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Επομένως, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

  και
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Εξίσωση Ευθείας

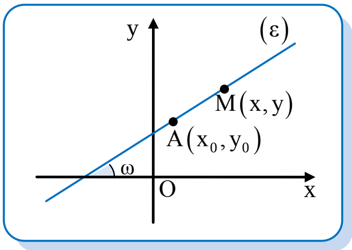
Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου είναι καλά ορισμένη όταν δίνονται ένα σημείο της και η κλίση της ή όταν δίνονται δύο σημεία της. Είναι λοιπόν λογικό να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας σε καθεμιά από αυτές τις δύο περιπτώσεις.

Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$\mathbf{y - y_0 = \lambda(x - x_0)}.$$

Απόδειξη



Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{AM} // (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{AM}} = \lambda.$$

Και επειδή

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0),$$

η παραπάνω ισότητα γράφεται

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

και τελικά

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$.

Παράδειγμα

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 4$ είναι $y - (-1) = 4(x - 3)$, δηλαδή $y = 4x - 13$.

Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).}$$

Απόδειξη

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι

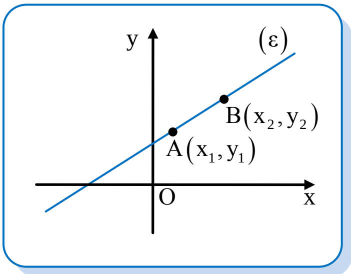
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Και επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

δηλαδή

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$



Παράδειγμα

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(3, 4)$ έχει εξίσωση

$$y - 1 = \frac{4-1}{3-2}(x-2) \Leftrightarrow y - 1 = 3(x-2) \Leftrightarrow y = 3x - 5.$$

Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ είναι

$$\mathbf{x = x_0}.$$

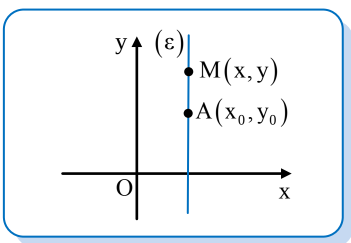
Απόδειξη

Κάθε σημείο $M(x, y)$ της ευθείας (ε), αφού αυτή είναι κατακόρυφη, έχει τετμημένη

$$x = x_0.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$x = x_0.$$



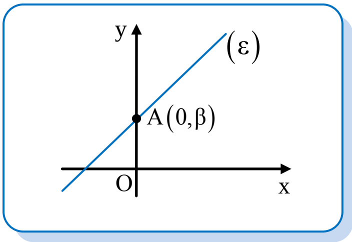
Ειδικές Περιπτώσεις

- Η εξίσωση της ευθείας (ε) που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$y-\beta=\lambda(x-0),$$

δηλαδή

$$\mathbf{y=\lambda x+\beta}.$$



Παράδειγμα

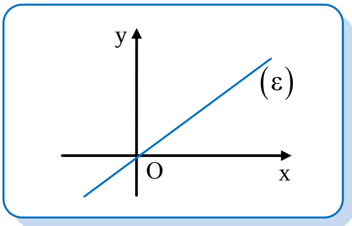
Η ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=3$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,5)$.

- Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$y-0=\lambda(x-0),$$

δηλαδή

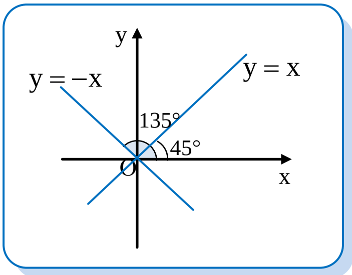
$$\mathbf{y=\lambda x}.$$



- Οι διχοτόμοι των γωνιών xOy και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις

$$\mathbf{y=x} \text{ και } \mathbf{y=-x}$$

αντιστοίχως.

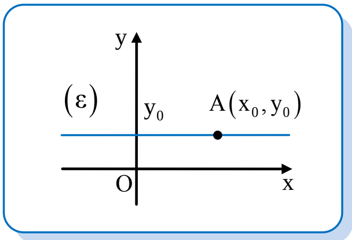


- Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι

$$y-y_0=0\cdot(x-x_0),$$

δηλαδή

$$\mathbf{y=y_0}.$$



Λυμένες Ασκήσεις

1. **Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης:**

i) **της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία**

$$\omega = \frac{2\pi}{3}$$

ii) **της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία**

$$A(3,1) \text{ και } B(-2,5)$$

iii) **της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ**

iv) **της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ.**

Λύση

i) Έχουμε

$$\lambda = \varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}.$$

Όμως,

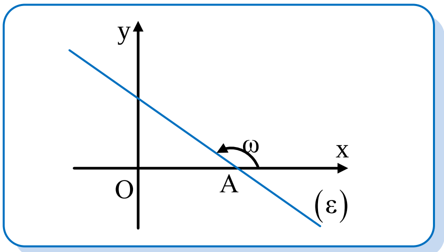
$$\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3} = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Επομένως,

$$\lambda = -\sqrt{3}.$$

ii) Έχουμε

$$\lambda_{AB} = \frac{5-1}{-2-3} = -\frac{4}{5}.$$



Σημειώσεις

- Συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας (ε) ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$. Δηλαδή,
$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega.$$
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία
$$A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2),$$
με $x_1 \neq x_2$ είναι
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

iii) Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι

$$\lambda_{AB}=-\frac{4}{5}.$$

Επομένως, ο ζητούμενος συντελεστής διεύθυνσης είναι

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_{AB}=-\frac{4}{5}.$$

Σημείωση

Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

iv) Έχουμε

$$\eta\perp\varepsilon.$$

Επομένως,

$$\lambda_\eta\cdot\lambda_\varepsilon=-1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_\eta\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-1$$

και τελικά

$$\lambda_\eta=\frac{5}{4}.$$

Σημείωση

Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε

$$\varepsilon_1\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

2. **Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:**

i) $A(0,3)$ **και** $B(4,7)$ **ii)** $A(\sqrt{3},3)$ **και** $B(1,\sqrt{3})$

iii) $A(2,-1)$ **και** $B(2,5)$ **iv)** $A(4,1)$ **και** $B(-2,1)$.

Λύση

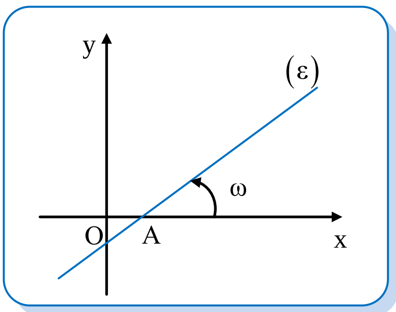
i) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{7-3}{4-0}=1.$$

Δηλαδή,

$$\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\omega=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad\kappa\in\mathbb{Z}.$$



Και επειδή

$$0 \le \omega < \pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\omega = \frac{\pi}{4}.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη γωνία ω που σχηματίζει μία ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ αρκεί να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε), εφόσον βέβαια αυτός ορίζεται, και να αξιοποιήσουμε τη σχέση

$$\varepsilon\varphi\omega = \lambda.$$

ii) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}-3}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.$$

Δηλαδή,

$$\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή

$$0 \le \omega < \pi$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\omega = \frac{\pi}{3}.$$

iii) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένη ίση με 2. Άρα, η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. Δηλαδή,

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Σημείωση

Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε $\omega = \frac{\pi}{2}$ και προφανώς δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

iv) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν τεταγμένη ίση με 1. Επομένως, η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Δηλαδή,

$$\omega = 0.$$

Σημείωση

Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε $\omega = 0$. Δηλαδή η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με μηδέν.

3. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και:**

i) **σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία**

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

ii) **είναι παράλληλη προς το διάνυσμα**

$$\vec{\delta} = (-1, 2)$$

iii) **είναι κάθετη στο διάνυσμα**

$$\vec{\delta} = (4, 0).$$

Λύση

i) Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνση

$$\lambda = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$y - 4 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = x + 3.$$

ii) Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ίσο με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$$\vec{\delta} = (-1, 2).$$

Δηλαδή,

$$\lambda = \frac{2}{-1} = -2.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$y - 4 = -2\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 6.$$

iii) Το διάνυσμα

$$\vec{\delta} = (4, 0)$$

είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Επομένως, η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. Και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ συμπεραίνουμε ότι έχει εξίσωση

$$x = 1.$$

Σημειώσεις

- Η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι
$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$
- Η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ είναι
$$x = x_0.$$

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία

$$\mathrm{A}(-1,3),\ \mathrm{B}(0,2)\ \text{και}\ \Gamma(4,5).$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση του ύψους ΑΔ

ii) την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς ΒΓ.

Λύση

i) Έχουμε

$$\mathrm{A}\Delta \perp \mathrm{B}\Gamma.$$

Άρα

$$\lambda_{\mathrm{A}\Delta}\cdot\lambda_{\mathrm{B}\Gamma}=-1$$

Όμως,

$$\lambda_{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{5-2}{4-0}=\frac{3}{4}.$$

Επομένως,

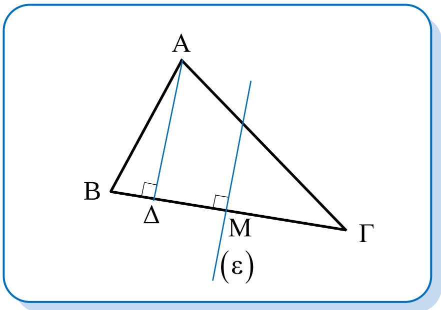
$$\lambda_{\mathrm{A}\Delta}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

δηλαδή

$$\lambda_{\mathrm{A}\Delta}=-\frac{4}{3}.$$

Άρα, η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι

$$y-3=-\frac{4}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}.$$



Σχόλιο

Όταν λέμε «εξίσωση του ύψους ΑΔ» εννοούμε «εξίσωση της ευθείας στην οποία βρίσκεται το ύψος ΑΔ».

ii) Η ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΒΓ, δηλαδή από το σημείο $\mathrm{M}\left(2,\frac{7}{2}\right)$. Επίσης, η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ και συνεπώς είναι παράλληλη στο ύψος ΑΔ. Άρα, έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\lambda_{\mathrm{A}\Delta}=-\frac{4}{3}.$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$y-\frac{7}{2}=-\frac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{37}{6}.$$

5. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία**

$$\mathbf{A(1,4),\quad B(0,-2)\quad \text{και}\quad \Gamma(4,0)}.$$

Να βρείτε:

i) **την εξίσωση της πλευράς ΑΒ**

ii) **την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.**

Λύση

i) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

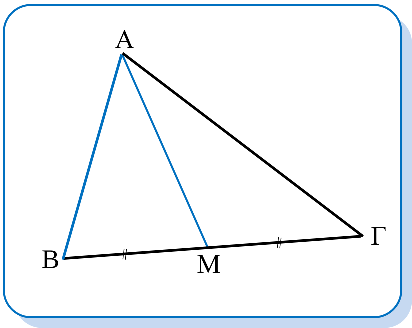
$$\lambda_{AB} = \frac{-2-4}{0-1} = 6.$$

Άρα, η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$$y - 4 = 6(x-1)$$

ή ισοδύναμα

$$y = 6x - 2.$$



ii) Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+0}{2}\right).$$

Δηλαδή,

$$M(2,-1).$$

Επομένως, η ευθεία ΑΜ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AM} = \frac{-1-4}{2-1} = -5.$$

Άρα, η ευθεία ΑΜ έχει εξίσωση

$$y - 4 = -5(x-1)$$

ή ισοδύναμα

$$y = -5x + 9.$$

6. **Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο**

$$K(3,2)$$

και εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ τις

$$y=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \quad \text{και} \quad y=-2x+2,$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) **τις συντεταγμένες του σημείου Α**
ii) **τις συντεταγμένες του σημείου Γ**
iii) **την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.**

Λύση

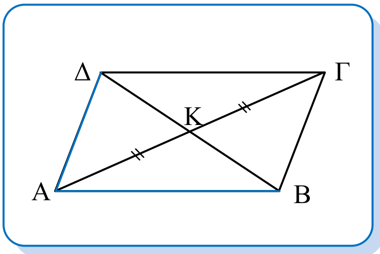
i) Οι συντελεστές του σημείου Α είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \\ y=-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x+10=2x-2 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$A(1,0).$$



Μεθοδολογία
Για να βρούμε το κοινό σημείο δύο ευθειών αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

ii) Το κέντρο Κ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ είναι μέσο του τμήματος ΑΓ. Επομένως, αν είναι

$$\Gamma(x,y),$$

τότε έχουμε

$$\frac{x+1}{2}=3 \quad \text{και} \quad \frac{y+0}{2}=2.$$

Δηλαδή,

$$x=5 \quad \text{και} \quad y=4.$$

Άρα,

$$\Gamma(5,4).$$

iii) Η ευθεία ΒΓ διέρχεται από το σημείο $\Gamma(5,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΔ. Επομένως,

$$\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = -2.$$

Άρα, η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση

$$y - 4 = -2(x - 5)$$

ή ισοδύναμα

$$y = -2x + 14.$$

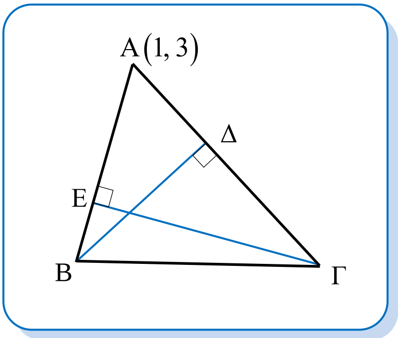
7. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1, 3)$ και τα ύψη ΒΔ και ΓΕ έχουν εξισώσεις**

$$\mathbf{y = -x - 1 \quad και \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}}$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ
ii) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ
iii) τις συντεταγμένες του σημείου Β
iv) το μήκος της πλευράς ΒΓ
v) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

Λύση



i) Έχουμε $AB \perp \Gamma E$. Επομένως,

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Gamma E} = -1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_{AB} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 4.$$

Άρα, η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

ή ισοδύναμα

$$y = 4x - 1.$$

ii) Έχουμε $ΑΓ \perp ΒΔ$. Επομένως,

$$\lambda_{ΑΓ} \cdot \lambda_{ΒΔ} = -1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_{ΑΓ} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΓ} = 1.$$

Άρα, η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση

$$y - 3 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

iii) Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΒ και ΒΔ, δηλαδή του συστήματος

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 = 4x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, $Β(0,-1)$.

iv) Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ και ΓΕ, δηλαδή του συστήματος

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Άρα, $Γ(-1, 1)$.

Επομένως,

$$(ΒΓ) = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}.$$

v) Αποδείξαμε ότι

$$Β(0,-1) \text{ και } Γ(-1,1).$$

Επομένως, η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{1-(-1)}{-1-0} = -2.$$

Άρα, η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση

$$y - (-1) = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x - 1.$$

8. **Δίνεται το σημείο $A(4,2)$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{y = x - 1.}$$

i) **Να βρείτε το σημείο Β της ευθείας (ε) για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις**

$$(AB) = 5(OB) = 5,$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

ii) **Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι η προβολή του σημείου**

$$\Gamma(-2,1)$$

πάνω στην ευθεία (ε).

Λύση

i) Έστω $B(x_1, y_1)$. Το σημείο Β ανήκει στην ευθεία (ε). Άρα,

$$y_1 = x_1 - 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις

$$(AB) = 5(OB) = 5.$$

Δηλαδή,

$$(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-4)^2 + (y_1-2)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow (x_1-4)^2 + (y_1-2)^2 = 25 \qquad \textbf{(2)}$$

και

$$(OB) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$$

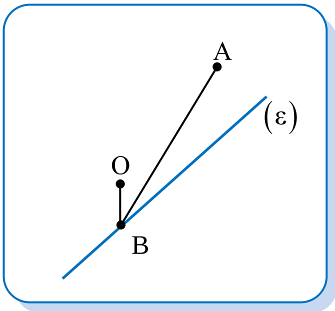
$$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις **(1), (2)** και **(3)** βρίσκουμε

$$x_1 = 0 \quad \text{και} \quad y_1 = -1.$$

Δηλαδή,

$$B(0,-1).$$



Σχόλιο

Εύρεση ενός σημείου Β σημαίνει εύρεση των συντεταγμένων του (x_1, y_1).

ii) Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_1 = 1.$$

Η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_2 = \frac{1-(-1)}{-2-0} = -1\,.$$

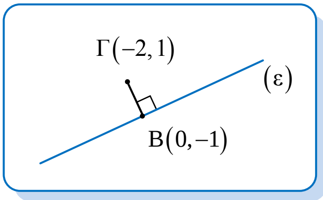
Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1\,,$$

δηλαδή

$$\text{ΒΓ} \perp (\varepsilon).$$

Και επειδή το σημείο Β ανήκει στην ευθεία (ε) συμπεραίνουμε ότι το Β είναι η προβολή του σημείου Γ πάνω στην ευθεία (ε).



Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι το σημείο Β της ευθείας (ε) είναι η προβολή του σημείου Γ πάνω στην (ε), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\text{ΒΓ} \perp (\varepsilon).$$

9. **Δίνεται η ευθεία**

$$\varepsilon: y = -x + 7$$

και το σημείο $A(5,8)$. Να βρείτε:

i) **την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)**

ii) **το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε).**

Λύση

i) Έχουμε $\zeta \perp \varepsilon$. Οπότε,

$$\lambda_\zeta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1.$$

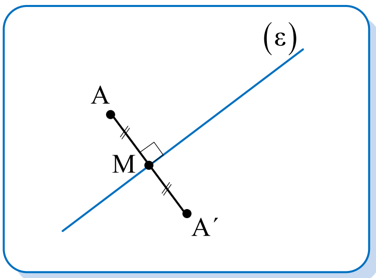
Άρα, η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$$y - 8 = 1\cdot(x-5) \Leftrightarrow y = x + 3.$$

ii) **α΄ τρόπος:**

Καταρχήν βρίσκουμε την προβολή Μ του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε), δηλαδή το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ). Οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$$



Επομένως, $M(2,5)$. Έστω λοιπόν $A'(x_1, y_1)$ το ζητούμενο σημείο. Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος AA'. Άρα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x_1+5}{2}=2 \quad \text{και} \quad \frac{y_1+8}{2}=5$$

από τις οποίες βρίσκουμε

$$x_1=-1 \quad \text{και} \quad y_1=2.$$

Δηλαδή,

$$A'(-1,2).$$

β΄ τρόπος:

Έστω $A'(x_1, y_1)$ το ζητούμενο σημείο. Έχουμε

$$AA' \perp (\varepsilon).$$

Επομένως,

$$\lambda_{AA'} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1-8}{x_1-5}\cdot(-1)=-1$$

$$\Leftrightarrow y_1-8=x_1-5$$

$$\Leftrightarrow y_1=x_1+3 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το μέσο του τμήματος Α, δηλαδή το σημείο

$$M\left(\frac{x_1+5}{2}, \frac{y_1+8}{2}\right)$$

είναι σημείο της ευθείας (ε). Επομένως, ισχύει

$$\frac{y_1+8}{2}=-\frac{x_1+5}{2}+7$$

$$\Leftrightarrow y_1+8=-(x_1+5)+14$$

$$\Leftrightarrow y_1=-x_1+1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

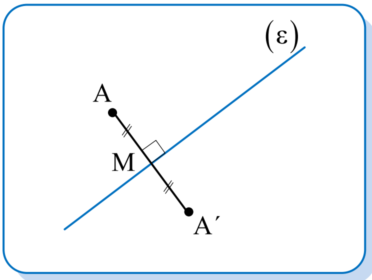
$$x_1=-1 \quad \text{και} \quad y_1=2.$$

Δηλαδή,

$$A'(-1,2).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το συμμετρικό A' ενός σημείου Α ως προς μία ευθεία (ε) βρίσκουμε αρχικά την προβολή Μ του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος $A'A$.



Μεθοδολογία

Έχουμε δύο αγνώστους x_1, y_1. Επομένως, χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις οι οποίες θα προκύψουν από ισάριθμες πληροφορίες. Οι πληροφορίες αυτές είναι:

- $AA' \perp (\varepsilon)$
- το μέσο Μ του AA' είναι σημείο της ευθείας (ε).

10. **Από σημείο P εξωτερικό ενός κύκλου (c) φέρουμε τις εφαπτόμενες ευθείες $(\varepsilon),(\zeta)$ και τη διακεντρική ευθεία (δ). Αν είναι**

$$\varepsilon:\ y=2x+1 \quad \text{και} \quad \delta: y=x+2,$$

να βρείτε:

i) **τις συντεταγμένες του σημείου P**

ii) **το σημείο τομής A της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$**

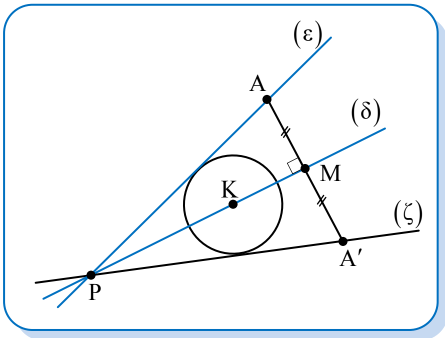
iii) **την εξίσωση της ευθείας (ζ).**

Λύση

i) Οι συντεταγμένες του σημείου P είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 2x+1=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Δηλαδή, $P(1,3)$.



ii) Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Δηλαδή, $A(0,1)$.

iii) Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία (δ) διχοτομεί τη γωνία των ευθειών (ε) και (ζ). Άρα, το συμμετρικό A' του σημείου $A(0,1)$ ως προς την ευθεία (δ) είναι σημείο της ευθείας (ζ). Έχουμε

$$AA' \perp \delta \Leftrightarrow \lambda_{AA'}\cdot\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \lambda_{AA'}=1$$

Οπότε,

$$AA':\ y-1=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+1.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών AA' και (δ) είναι η λύση του συστήματος

Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ένα σημείο P της ευθείας (ζ). Οπότε, για να βρούμε την εξίσωσή της αρκεί να βρούμε ακόμη ένα σημείο της. Παρατηρούμε ότι η διακεντρική ευθεία (δ), ως διχοτόμος της γωνίας των ευθειών (ε) και (ζ) είναι και άξονας συμμετρίας αυτής της γωνίας. Επομένως, το συμμετρικό κάθε σημείου της ευθείας (ε) ως προς την ευθεία (δ) είναι σημείο της ευθείας (ζ).

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-x+1 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-1 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Δηλαδή, $M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}.\right)$ Αν λοιπόν είναι $A'(x_0, y_0)$, τότε με βάση ότι το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος AA' έχουμε

$$\frac{x_0+0}{2}=-\frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{y_0+1}{2}=\frac{3}{2},$$

οπότε βρίσκουμε

$$x_0=-1 \qquad \text{και} \qquad y_0=2.$$

Επομένως, $A'(-1,2)$.

Η ζητούμενη ευθεία (ζ) διέρχεται από τα σημεία P και A'. Είναι λοιπόν,

$$\lambda_\zeta=\frac{2-3}{-1-1}=\frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\zeta: y-3=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y-3=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

11. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B(0,-2)$, ύψος $A\Delta: y=3x$ και εσωτερική διχοτόμο**

$$AE: y=-x+4.$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ΑΓ

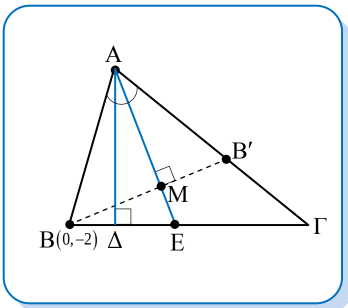
ii) τις συντεταγμένες τις κορυφής Γ.

Λύση

i) Αρχικά βρίσκουμε τις συντεταγμένες της κορυφής A που είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=3x \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 3x=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 4x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Δηλαδή, $A(1,3)$.



Στη συνέχεια βρίσκουμε το συμμετρικό $B'(x_0, y_0)$ του σημείου Β ως προς τη διχοτόμο ΑΕ. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το σημείο B' είναι σημείο της πλευράς ΑΓ. Έχουμε λοιπόν

$$BB' \perp AE \Leftrightarrow \lambda_{BB'} \cdot \lambda_{AE} = -1$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{BB'} \cdot (-1) = -1$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{BB'} = 1.$$

Οπότε, $BB': y + 2 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x - 2.$

Το σημείο τομής Μ των ευθειών BB' και ΑΕ έχει συντεταγμένες που είναι η λύση του συστήματος

Σχόλιο

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ αρκεί να βρούμε δύο σημεία της. Το ένα είναι το σημείο Α που προσδιορίζεται εύκολα, αφού είναι το σημείο τομής των γνωστών ευθειών ΑΔ και ΑΕ. Το δεύτερο σημείο είναι το συμμετρικό Β΄ του σημείου Β ως προς τη διχοτόμο ΑΕ.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Επομένως, $M(3,1)$. Και επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος BB' έχουμε

$$\frac{x_0 + 0}{2} = 3 \quad \text{και} \quad \frac{y_0 - 2}{2} = 1,$$

δηλαδή

$$x_0 = 6 \quad \text{και} \quad y_0 = 4.$$

Οπότε, $B'(6, 4)$.

Γνωρίζουμε λοιπόν δύο σημεία Α και B' της ευθείας ΑΓ. Επομένως,

$$\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB'} = \frac{4-3}{6-1} = \frac{1}{5}$$

και συνεπώς

$$A\Gamma: y - 3 = \frac{1}{5}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}.$$

ii) Έχουμε

$$B\Gamma \perp A\Delta \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{A\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{3}.$$

Επομένως,

$$B\Gamma: y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - 2.$$

Οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του συστήματος

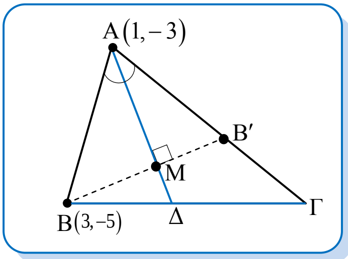
$$\begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5} \\ y=-\frac{1}{3}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5} \\ \frac{1}{5}x+\frac{14}{5}=-\frac{1}{3}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5} \\ 3x+42=-5x-30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5} \\ 8x=-72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-9 \end{cases}$$

Δηλαδή, $\Gamma(-9,1)$.

12. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,-3)$, $B(3,-5)$, $B\Gamma: y=-3x+4$ και η εσωτερική του διχοτόμος $A\Delta: y=-3$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.**

Λύση



Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το συμμετρικό $B'(x_0,y_0)$ του σημείου Β ως προς τη διχοτόμο ΑΔ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ. Έχουμε λοιπόν

$$BB' \perp A\Delta \Leftrightarrow BB' \perp x'x.$$

Οπότε

$$BB': x=3.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών BB' και ΑΔ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

Δηλαδή, $M(3,-3)$.

Και επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος BB' έχουμε

$$\frac{x_0+3}{2}=3 \quad \text{και} \quad \frac{y_0-5}{2}=-3$$

ή ισοδύναμα

$$x_0=3 \quad \text{και} \quad y_0=-1.$$

Δηλαδή, $B'(3,-1)$. Είναι λοιπόν

$$\lambda_{A\Gamma}=\lambda_{AB'}=\frac{-1+3}{3-1}=1.$$

Σχόλιο
Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΒΓ. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ, αφού η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι γνωστή.

Οπότε,

$$A\Gamma: \; y+3=1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=x-4 .$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-4 \\ x-4=-3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-4 \\ 4x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Επομένως,

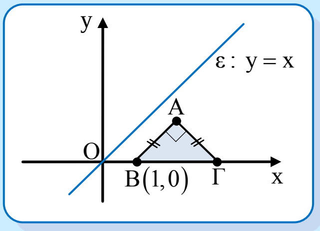
$$\Gamma(2,-2).$$

13. **Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, ισοσκελές, έχει εμβαδόν $E=1$ τ.μ. και η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: y=x$. Να βρείτε:**

i) **την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ**

ii) **τις συντεταγμένες του σημείου Γ**

iii) **τις συντεταγμένες του σημείου Α.**



Λύση

i) Έστω $(AB)=(A\Gamma)=\alpha$.

Έχουμε

$$E=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{2}$$

Οπότε, με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει

$$(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=4 .$$

Δηλαδή, $(B\Gamma)=2$.

Άρα, η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$L=(AB)+(A\Gamma)+(B\Gamma)=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2$$
$$=2\sqrt{2}+2.$$

Σχόλιο
Αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος α μιας από τις κάθετες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, αφού τότε με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.

ii) Έστω $\Gamma(\gamma,0)$ με $\gamma>1$. Αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** ότι

$$(B\Gamma)=2.$$

Επομένως,

$$\gamma-1=2 \Leftrightarrow \gamma=3.$$

Άρα, $\Gamma(3,0)$.

Παρατήρηση
Με βάση το σχήμα, το σημείο Γ βρίσκεται στον άξονα $x'x$ και δεξιά του σημείου Β. Οπότε,

$$\Gamma(\gamma,0) \text{ με } \gamma>1.$$

iii) Έχουμε $AB // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{\varepsilon} = 1$. Οπότε

$$AB: y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Επίσης,

$$A\Gamma \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -1$$

Οπότε,

$$A\Gamma: y - 0 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 3.$$

Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Δηλαδή, $A(2, 1)$.

Σχόλιο

Αρχικά βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθειών AB και ΑΓ. Πράγματι, γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ, ενώ εύκολα υπολογίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης. Οπότε, οι συντεταγμένες του A θα προκύψουν από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών AB και ΑΓ.

14. **Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{y = 2x.}$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τ.μ.

Λύση

Έστω (ζ) ζητούμενη ευθεία. Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: y = 2x.$$

Επομένως, η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση της μορφής

$$y = 2x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία (ζ) τέμνει τους άξονες στα σημεία

$$A\left(-\frac{\kappa}{2}, 0\right) \quad \text{και} \quad B(0, \kappa).$$

Άρα, η ευθεία (ζ) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2}\left|-\frac{\kappa}{2}\right| \cdot |\kappa| = \frac{\kappa^2}{4}.$$

Μεθοδολογία

Όταν ζητείται η εξίσωση μιας ευθείας για την οποία **γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ** αλλά **δεν γνωρίζουμε σημείο της,** εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας στη μορφή

$$y = \lambda x + \boldsymbol{\kappa}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος, υπολογίζουμε τον αριθμό κ.

Όμως,

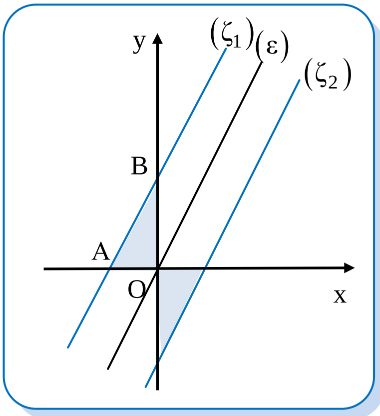
$$(OAB) = 4.$$

Επομένως,

$$\frac{\kappa^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \kappa^2 = 16 \Leftrightarrow \kappa = \pm 4.$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τις ευθείες

$$\zeta_1 : y = 2x + 4 \quad \text{και} \quad \zeta_2 : y = 2x - 4.$$



15. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και τέμνει τις ευθείες**

$$\varepsilon_1 : \ y = 3x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 3x - 10$$

στα σημεία A και B αντίστοιχα τέτοια, ώστε $(AB) = 9$.

Λύση

- Έστω ότι η ζητούμενη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Οπότε, εφόσον διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ η εξίσωσή της είναι $y = \lambda x$. Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ \lambda x = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ (\lambda - 3)x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-\lambda}{\lambda - 3} \\ x = \dfrac{-1}{\lambda - 3} \end{cases}.$$

Δηλαδή,

$$A\left(\frac{-1}{\lambda - 3}, \frac{-\lambda}{\lambda - 3}\right).$$

Οι συντεταγμένες του σημείου B είναι η λύση του συστήματος

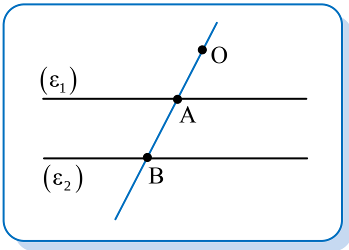
Μεθοδολογια

Όταν ζητείται η εξίσωση μιας ευθείας για την οποία **γνωρίζουμε ένα σημείο της $M(x_0, y_0)$** αλλά **δεν γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσής της,** εργαζόμαστε ως εξής:

- Αρχικά υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας στη μορφή
$$y - y_0 = \boldsymbol{\lambda}(x - x_0)$$
και αξιοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος υπολογίζουμε τον αριθμό λ.
- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ αποτελεί λύση του προβλήματος.

$$\begin{cases} y=\lambda x \\ y=3x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ \lambda x=3x-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ (\lambda-3)x=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-10\lambda}{\lambda-3} \\ x=\dfrac{-10}{\lambda-3} \end{cases}.$$



Δηλαδή, $B\left(\dfrac{-10}{\lambda-3}, \dfrac{-10\lambda}{\lambda-3}\right)$.

Επίσης,

$$(AB)=9 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{-10}{\lambda-3}+\frac{1}{\lambda-3}\right)^2+\left(\frac{-10\lambda}{\lambda-3}+\frac{\lambda}{\lambda-3}\right)^2}=9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{\lambda-3}\right)^2+\left(\frac{9\lambda}{\lambda-3}\right)^2=81$$

$$\Leftrightarrow \frac{81+81\lambda^2}{(\lambda-3)^2}=81 \Leftrightarrow 81+81\lambda^2=81(\lambda^2-6\lambda+9) \Leftrightarrow 1+\lambda^2=\lambda^2-6\lambda+9$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Άρα, η ευθεία $y=\dfrac{4}{3}x$ είναι λύση του προβλήματος.

- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και είναι κάθετη στον $x'x$, δηλαδή η ευθεία $x=0$, αποτελεί λύση του προβλήματος. Η εν λόγω ευθεία τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία $A(0,-1)$ και $B(0,-10)$ αντίστοιχα για τα οποία ισχύει

$$(AB)=\sqrt{0^2+(-10+1)^2}=\sqrt{9^2}=9.$$

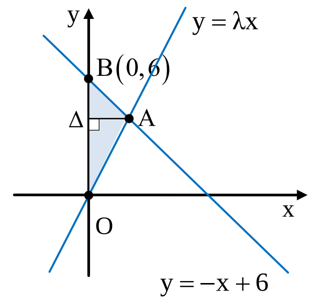
Επομένως, η ευθεία $x=0$ αποτελεί επίσης λύση του προβλήματος.

16. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και σχηματίζει με τις ευθείες**

$$\mathbf{x=0 \quad \text{και} \quad y=-x+6}$$

τρίγωνο εμβαδού $E=6$ τ.μ.

Λύση



Έστω $y=\lambda x$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Η ευθεία αυτή τέμνει την ευθεία $y=-x+6$ σε σημείο Α που οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\lambda x \\ y=-x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ \lambda x=-x+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ (\lambda+1)x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6\lambda}{\lambda+1} \\ x=\dfrac{6}{\lambda+1} \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$A\left(\frac{6}{\lambda+1}, \frac{6\lambda}{\lambda+1}\right).$$

Επίσης, η ευθεία $y=-x+6$ τέμνει την ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) στο σημείο $B(0,6)$. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E=6$ τ.μ. Δηλαδή

$$\frac{1}{2}(OB)\cdot(A\Delta)=6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}6\cdot\left|\frac{6}{\lambda+1}\right|=6$$

$$\Leftrightarrow |\lambda+1|=3 \Leftrightarrow \lambda+1=3 \;\; \text{ή} \;\; \lambda+1=-3$$

$$\Leftrightarrow \lambda=2 \;\; \text{ή} \;\; \lambda=-4.$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τις ευθείες

$$\varepsilon_1:\ y=2x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ y=-4x.$$

Σχόλιο

Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και συνεπώς (αφού δεν είναι η ευθεία $x=0$) έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$. Η εύρεση του συντελεστή διεύθυνσης λ θα προκύψει από την αξιοποίηση της σχέσης

$$E=6\text{ τ.μ.}$$

17. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο $M(3,0)$ και τέμνει τις ευθείες**

$$\eta: y=x \quad \text{και} \quad \zeta: y=-2x+3$$

στα σημεία Α και Β αντίστοιχα τέτοια, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Λύση

α΄ τρόπος (γενικός)

- Έστω ότι η ζητούμενη ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Εφόσον διέρχεται από το σημείο Μ(3, 0) η εξίσωσή της είναι

$$y-0=\lambda(x-3)\Leftrightarrow y=\lambda x-3\lambda .$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\lambda x-3\lambda \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda x-3\lambda=x \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (\lambda-1)x=3\lambda \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3\lambda}{\lambda-1} \\ y=\dfrac{3\lambda}{\lambda-1} \end{cases}$$

Επομένως $A\left(\dfrac{3\lambda}{\lambda-1},\dfrac{3\lambda}{\lambda-1}\right)$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\lambda x-3\lambda \\ y=-2x+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda x-3\lambda=-2x+3 \\ y=-2x+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (\lambda+2)x=3\lambda+3 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3\lambda+3}{\lambda+2} \\ y=-2\dfrac{3\lambda+3}{\lambda+2}+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3\lambda+3}{\lambda+2} \\ y=\dfrac{-3\lambda}{\lambda+2} \end{cases}$$

Επομένως $B\left(\dfrac{3\lambda+3}{\lambda+2},\dfrac{-3\lambda}{\lambda+2}\right)$.

Το σημείο Μ(3, 0) είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Οπότε έχουμε:

$$\frac{3\lambda}{\lambda-1}+\frac{3\lambda+3}{\lambda+2}=6 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$\frac{3\lambda}{\lambda-1}+\frac{-3\lambda}{\lambda+2}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η εξίσωση **(1)** ισοδύναμα γράφεται

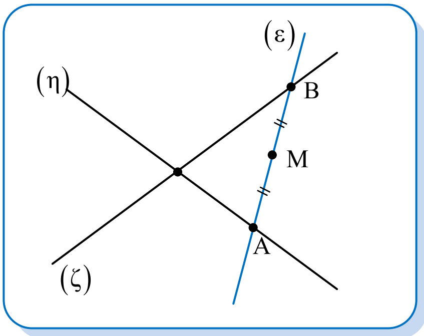
$$3\lambda(\lambda+2)+(\lambda-1)(3\lambda+3)=6(\lambda-1)(\lambda+2)$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda^2+6\lambda+3\lambda^2-3=6\lambda^2+6\lambda-12$$
$$\Leftrightarrow -3=-12 \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

Άρα, δεν υπάρχει ευθεία (ε) με εξίσωση της μορφής $y=\lambda x-3\lambda$ η οποία να είναι λύση του προβλήματος.

- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(3,0)$, δηλαδή η ευθεία
$$\varepsilon:\ x=3$$
είναι λύση του προβλήματος. Η εν λόγω ευθεία τέμνει τις ευθείες
$$\eta: y=x \quad \text{και} \quad \zeta:\ y=-2x+3$$
στα σημεία $A(3,3)$ και $B(3,-3)$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το μέσο του τμήματος ΑΒ είναι το σημείο (3, 0), δηλαδή το σημείο Μ.
Επομένως η ευθεία ε: x = 3 είναι η μόνη λύση του προβλήματος.

β΄ τρόπος (ειδικός)

Τα σημεία Α και Β είναι σημεία των ευθειών $\eta: y=x$ και $\zeta:\ y=-2x+3$ αντίστοιχα.
Οπότε τα σημεία αυτά έχουν τις μορφές $A(\alpha,\alpha)$ και $B(\beta,-2\beta+3)$, για κάποια $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Το σημείο $M(3,0)$ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Οπότε έχουμε:
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=3 \ \text{ και } \ \frac{\alpha-2\beta+3}{2}=0.$$
Δηλαδή
$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha-2\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=3\end{cases}.$$
Επομένως, $A(3,3)$ και $B(3,-3)$. Και επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία αυτά, τα οποία έχουν την ίδια τετμημένη $x=3$, συμπεραίνουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση της (ε) είναι η $x=3$.



Σχόλιο

Η ειδική λύση του β΄ τρόπου είναι μεν ελκυστική για τη συντομία της, χωρίς όμως να ανατρέπει τη βαρύτητα του πρώτου καθολικού τρόπου.

18. **Δίνονται τα σημεία**
$$\mathbf{A(1,0)\ \text{ και }\ B(-2,3)}.$$
Να βρείτε:

i) το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση
$$\mathbf{(MA)^2-(MB)^2=12}$$
ii) το σημείο Γ του παραπάνω γεωμετρικού τόπου, το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ ελάχιστη απόσταση.

Λύση

> **1η Μέθοδος Γεωμετρικών Τόπων**
>
> Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου που επαληθεύουν μία **εξίσωση** αρκεί να βρούμε μία εξίσωση με δύο αγνώστους x, y την οποία επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων M και μόνο αυτές.

i) Έστω $M(x, y)$. Οπότε,

$$(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$$

και

$$(MB)=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}.$$

Επομένως, η σχέση

$$(MA)^2-(MB)^2=12$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}\right)^2=12$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2-(x+2)^2-(y-3)^2=12$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-x^2-4x-4-y^2+6y-9=12$$

$$\Leftrightarrow -6x+6y-24=0 \Leftrightarrow -x+y-4=0 \Leftrightarrow y=x+4.$$

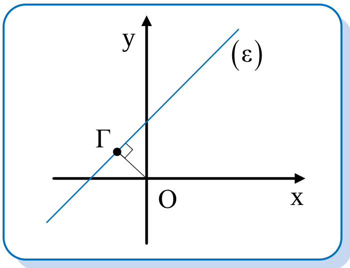
Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=x+4.$$

ii) ***α΄ τρόπος***

Από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι, το ζητούμενο σημείο είναι η προβολή του σημείου O πάνω στην ευθεία (ε). Δηλαδή, το σημείο Γ της ευθείας (ε) για το οποίο ισχύει

$$O\Gamma \perp (\varepsilon)$$



Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ βρίσκουμε αρχικά την εξίσωση της ευθείας ΟΓ. Έχουμε λοιπόν

$$\lambda_{O\Gamma}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{O\Gamma}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda_{O\Gamma}=-1$$

Άρα, η ευθεία ΟΓ έχει εξίσωση $y=-x$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=-x \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=-x \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$\Gamma(-2, 2).$$

β΄ τρόπος:

Η απόσταση τυχαίου σημείου $M(x, y)$ της ευθείας

$$\varepsilon : y = x + 4$$

από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι

$$\begin{aligned}(OM) &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x+4)^2}\\ &= \sqrt{2x^2 + 8x + 16} = \sqrt{2(x^2 + 4x + 4) + 8}\\ &= \sqrt{2(x+2)^2 + 8} \geq \sqrt{8} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -2$. Δηλαδή, η ελάχιστη τιμή της απόστασης (OM) είναι $\sqrt{8}$ και επιτυγχάνεται μόνο για

$$x = -2 \quad \text{και} \quad y = -2 + 4 = 2.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο $\Gamma(-2, 2)$.

19. **Έστω σημεία M, M' συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ και το σημείο $A(1,0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει η σχέση**

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = 0.$$

Λύση

Έστω $M(x,y)$, οπότε $M'(x,-y)$. Έχουμε λοιπόν

$$\overrightarrow{AM} = (x-1, y) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM'} = (x-1, -y)$$

Επομένως, η σχέση $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = 0$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-1) + y(-y) = 0\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2 - y^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ &(x-1-y)(x-1+y) = 0\\ \Leftrightarrow\ &x-1-y = 0 \quad \text{ή} \quad x-1+y = 0\\ \Leftrightarrow\ &y = x-1 \quad \text{ή} \quad y = -x+1.\end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σύνολο των σημείων των ευθειών

$$\varepsilon_1 : \ y = x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -x + 1.$$

Σχόλιο

Παριστάνουμε με (x, y) τις συντεταγμένες του σημείου Μ και βρίσκουμε την εξίσωση ή τις εξισώσεις με τις οποίες αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Για τον σκοπό αυτό μεταφράζουμε την πληροφορία που έχουμε για το σημείο Μ σε αλγεβρική γλώσσα.

20. **Δίνεται το σημείο $M(\lambda-1, 2\lambda+1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.**

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε ευθεία (ε).

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες.

Λύση

i) Έστω $M(x, y)$. Τότε έχουμε

$$x = \lambda - 1 \quad \text{και} \quad y = 2\lambda + 1.$$

Από την πρώτη σχέση παίρνουμε $\lambda = x + 1$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση έχουμε

$$y = 2(x+1) + 1$$

ή ισοδύναμα

$$y = 2x + 3.$$

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = 2x + 3.$$

2η Μέθοδος Γεωμετρικών Τόπων

Όταν οι συντεταγμένες x και y των σημείων $M(x, y)$ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου περιέχουν κάποια **παράμετρο λ**, προσπαθούμε να βρούμε την εξίσωση που συνδέει τα x και y απαλείφοντας την παράμετρο λ.

ii) Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία

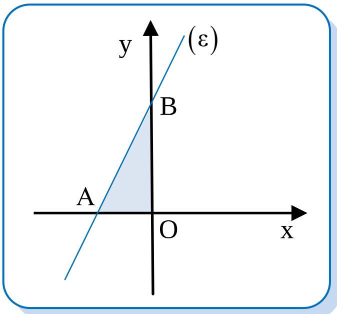
$$A\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \quad \text{και} \quad B(0, 3).$$

Επομένως,

$$(OA) = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad (OB) = |3| = 3.$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4} \quad \text{τ.μ.}$$



21. **Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$ και $B(5,8)$. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $x'x$, έτσι ώστε το άθροισμα**

$$\Sigma = (MA) + (MB)$$

να γίνεται ελάχιστο.

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A και B βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$. Οπότε, το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή το σημείο $A'(2,-4)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ και μάλιστα ισχύει

$$(MA)=(MA')$$

αφού ο άξονας $x'x$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AA'. Επομένως,

$$\Sigma=(MA)+(MB)=(MA')+(MB).$$

Άρα, το άθροισμα Σ γίνεται ελάχιστο ακριβώς τότε όταν τα σημεία A', M και B είναι συνευθειακά. Δηλαδή, το ζητούμενο σημείο M είναι το σημείο τομής της ευθείας $A'B$ με τον άξονα $x'x$.

Έχουμε λοιπόν

$$\lambda_{A'B}=\frac{8-(-4)}{5-2}=\frac{12}{3}=4.$$

Οπότε,

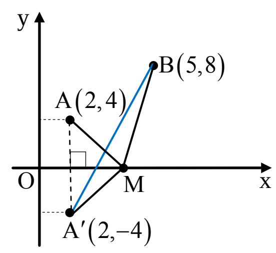
$$A'B: y-(-4)=4(x-2) \Leftrightarrow y=4x-12$$

και συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου M είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=4x-12 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=4x-12 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}.$$

Δηλαδή,

$$M(3,0).$$



Σχόλιο

Το πρόβλημα θα ήταν εύκολο αν τα σημεία A και B βρίσκονταν εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Στην περίπτωση αυτή το άθροισμα $\Sigma=(MA)+(MB)$ ελαχιστοποιείται όταν τα σημεία A, M και B είναι συνευθειακά. Τα παραπάνω οδηγούν τη σκέψη μας σε μια ωραία ιδέα. Να βρούμε ένα σημείο A' κάτω από τον άξονα $x'x$ τέτοιο, ώστε

$$(MA')=(MA).$$

Το σημείο A' προφανώς δεν είναι άλλο από το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης:

i) της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$A(1,7) \text{ και } B(2,-3)$$

ii) της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

iii) της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία AB.

2. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:

i) $A(1,3)$ και $B(5,7)$ **ii)** $A(-2,5)$ και $B(4,-1)$

iii) $A(8,-2)$ και $B(8,9)$ **iv)** $A(4,-7)$ και $B(-5,-7)$.

3. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,2),\ B(3,4) \text{ και } \Gamma(-4,7).$$

i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ.

ii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$ και:

i) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία

$$\omega = \frac{3\pi}{4}$$

ii) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\vec{\delta} = (1,3)$$

iii) είναι κάθετη προς το διάνυσμα

$$\vec{\delta} = (5,0).$$

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και:

i) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$

ii) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

iii) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(0,4)$

iv) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(4,0)$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,5)$ και:

i) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$

ii) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$

iii) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$

iv) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$

7. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία

$$A(2,4),\ \ B(0,-3)\ \text{ και }\ \Gamma(8,1)$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση του ύψους του ΑΔ

ii) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ

iii) την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με

$$A(2,7),\ B(1,3)\ \text{ και }\ \Gamma(5,1).$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία

$$A(0,4),\ \ B(-1,0),\ \Gamma(3,-2)\ \text{ και }\ \Delta(5,6)$$

i) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του ΑΒΓΔ.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι

$$AB: y = 3x + 1,\ A\Delta: y = x + 3 \ \text{ και } \ \Gamma(3, -2),$$

να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α

ii) την εξίσωση της ευθείας ΓΒ

iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

iv) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ

11. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με

$$AB: y = x - 1,\ \ A\Delta: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \ \text{ και } \ \Gamma(7, 3).$$

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α

ii) τις εξισώσεις των ευθειών ΓΒ και ΓΔ

iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

12. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο $K(4,1)$. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις

$$y = -x + 8 \quad \text{ και } \quad y = 2x - 7$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Α

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Γ

iii) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου τα ύψη ΒΔ και ΓΕ έχουν εξισώσεις

$$y = 2x - 15 \quad \text{ και } \quad y = 7x - 35$$

αντίστοιχα και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1,2)$. Να βρείτε:

i) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

iii) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου η μία διαγώνιος έχει εξίσωση

$$y=\frac{2}{3}x+4.$$

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις

$$y=x-2 \quad \text{και} \quad y=2x+4$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Α.

ii) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα διαγώνιος είναι η ΒΔ.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε

$$A(0,-4),\ B(4,-12) \text{ και } \Gamma(7,0).$$

Να βρείτε:

i) τις εξισώσεις των ευθειών ΔΑ και ΔΓ

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ

iii) την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα.

16. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις

$$y=-\frac{1}{2}x-2 \quad \text{και} \quad y=\frac{3}{2}x+2$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

ii) Αν η εξίσωση της μιας διαγωνίου του ΑΒΓΔ είναι

$$y=-\frac{5}{2}x+2,$$

να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Β

β) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

17. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία

$$A(-1,\alpha), \quad B(7,\beta) \quad \text{και} \quad \Gamma(1,3).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\beta = 12 - 3\alpha.$$

ii) Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ευθεία

$$\eta: y = 2x,$$

τότε:

α) να υπολογίσετε τις τιμές των α και β

β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

18. Δίνονται τα σημεία

$$A(-2,3), \quad B(0,1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2,-1)$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

ii) Να βρείτε την προβολή του σημείου $K(7,0)$ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

19. Δίνεται το σημείο $A(5,1)$ και η ευθεία

$$\varepsilon: y = 2x - 4.$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (ζ)

iii) την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε)

iv) το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε).

20. Δίνονται τα σημεία

$$A(-1,2), \quad B(2,3) \quad \text{και} \quad \Gamma(5,0).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

iii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με

$$\mathrm{A}(0,3),\ \mathrm{B}(7,0)\ \text{και}\ \Gamma(6,17).$$

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii) Να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΑΓ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(\mathrm{B}\Delta)=(\mathrm{B}\Gamma).$$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΒΓΔ.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(0,4)$, $\Gamma(9,1)$ και εσωτερική διχοτόμο ΒΔ την ευθεία με εξίσωση

$$y=x.$$

i) Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τη διχοτόμο ΒΔ;

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(2,8)$. Αν οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις

$$y=x \quad \text{και} \quad y=4$$

αντίστοιχα, να βρείτε:

i) το συμμετρικό A' του σημείου Α ως προς την ευθεία ΒΔ

ii) το συμμετρικό A'' του σημείου Α ως προς την ευθεία ΓΕ

iii) την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

24. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(2,5)$ και η μία διαγώνιος έχει εξίσωση

$$y=x-1.$$

i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα διαγώνιος είναι η ΒΔ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

iii) Να βρείτε το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

iv) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

25. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ με

$$\mathrm{A}(0,2) \quad \text{και} \quad \Gamma(4,0).$$

Η κορυφή Β βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Να βρείτε:

i) το κέντρο Κ του τετραγώνου ΑΒΓΔ

ii) την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ

iii) τις κορυφές Β και Δ

iv) το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

26. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A}(1,1)$ και $\Gamma(3,5)$.

Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ΒΔ

ii) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.

27. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1:\ y=x-1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ y=3x-1.$$

Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,4)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

28. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1:\ y=x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ y=\frac{1}{2}x-1.$$

Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(5,3)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1), (ε_2) στα σημεία Α, Β αντίστοιχα έτσι, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

29. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(1,4)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

30. Δίνεται το σημείο $K(2,3)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο K και σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραπάνω τριγώνου.

31. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \lambda x + \kappa$$

η οποία διέρχεται από τα σημεία

$$O(0,0) \quad \text{και} \quad A(2,1).$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = 16$ τ.μ.

32. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$y = x + 1$$

και

$$y = 2x - 1$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) το σημείο τομής M των ευθειών (ε_1) και (ε_2)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A και B, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του A και της τεταγμένης του B να είναι ίσο με 12.

33. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta : y = -2x$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ.

34. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3,4)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.

35. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(5,3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα τέτοια, ώστε η διαφορά της τετμημένης του σημείου Α από την τεταγμένη του σημείου Β να είναι ίση με 4.

36. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2,5)$ και τέμνει τις ευθείες

$$\varepsilon_1: y=-x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y=-x+1$$

στα σημεία Α και Β αντίστοιχα τέτοια, ώστε $(AB)=1$.

37. Δίνεται το σημείο $A(2,-1)$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να βρείτε:

i) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(AM)^2=3+(OM)^2$$

ii) το σημείο Β του παραπάνω γεωμετρικού τόπου το οποίο απέχει από το σημείο Ο ελάχιστη απόσταση.

38. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,0),\ \ B(0,-1) \ \text{ και } \ \Gamma(2,-1).$$

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$2(M\Gamma)^2=2+(MA)^2+(MB)^2$$

είναι μία ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο Α.

ii) Να βρείτε το συμμετρικό B' του σημείου Β ως προς την ευθεία (ε).

39. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $M(\lambda+5, 2\lambda+3)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι μία ευθεία (ε).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) και τέτοια, ώστε οι άξονες να αποκόπτουν από αυτή τμήμα μήκους $\sqrt{5}$.

40. Δίνονται τα σημεία

$$A(2,3) \text{ και } B(2\kappa+1, \kappa) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει σε σταθερή ευθεία.

ii) Να βρείτε την προβολή Μ του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε το συμμετρικό Γ του σημείου Α ως προς το σημείο Μ.

iv) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

v) Να υπολογίσετε την τιμή του κ, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο.

41. Έστω η ευθεία

$$\varepsilon : y = x$$

και το σημείο

$$M(2\lambda, \lambda+3), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αν Ν είναι το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς την ευθεία (ε) να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία Μ και Ν ανήκουν αντίστοιχα σε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2)

ii) οι ευθείες (ε), (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

42. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = x + 2\lambda \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 2x + \lambda,$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Μ των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μία σταθερή ευθεία (ε) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

Θεώρημα (Η Εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, με Α≠0 ή Β≠0)

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{Ax+By+\Gamma=0} \quad \text{με} \quad \mathbf{A\neq 0} \quad \text{ή} \quad \mathbf{B\neq 0}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία γραμμή.

Απόδειξη

- Έστω (ε) μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.
  - Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$, η οποία γράφεται
  $$\lambda x+(-1)y+\beta=0.$$
  - Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $P(x_0,y_0)$, τότε έχει εξίσωση $x=x_0$, η οποία γράφεται
  $$1\cdot x+0\cdot y+(-x_0)=0.$$

  Επομένως, σε κάθε περίπτωση η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής
  $$Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A\neq 0 \quad \text{ή} \quad B\neq 0$$

- Αντιστρόφως, θεωρούμε την εξίσωση
  $$Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A\neq 0 \quad \text{ή} \quad B\neq 0.$$
  - Αν $B\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B}$ που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Sigma\left(0,-\frac{\Gamma}{B}\right)$.
  - Αν $B=0$, τότε με βάση την υπόθεση είναι $A\neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x=-\frac{\Gamma}{A}$ που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο $P\left(-\frac{\Gamma}{A},0\right)$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση η εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0.$$

παριστάνει ευθεία.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $4x - 5y + 7 = 0$ παριστάνει ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{5}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Sigma\left(0, \frac{7}{5}\right)$.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

Πρόταση

Η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

- παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$
- κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$.

Απόδειξη

- Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
  - Αν $B \neq 0$, τότε η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$, ο οποίος ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$. Επομένως, $(\varepsilon) // \vec{u}$.
  - Αν $B = 0$, τότε η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και το ίδιο ισχύει για το διάνυσμα $\vec{u}$. Επομένως, $(\varepsilon) // \vec{u}$.
- Παρατηρούμε ότι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (B, -A) \cdot (A, B) = AB - AB = 0.$$

Οπότε, $\vec{u} \perp \vec{v}$. Και επειδή $(\varepsilon) // \vec{u}$, συμπεραίνουμε ότι $(\varepsilon) \perp \vec{v}$.

Παράδειγμα

Η ευθεία (ε) με εξίσωση $2x - 3y + 1 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-3, -2)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, -3)$.

Λυμένες Ασκήσεις

22. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

i) $(x+2y)^2-9=0$ **ii)** $x^2-2xy+y^2=0$

iii) $x^2+y^2+2xy-4x-4y+3=0$.

Λύση

i) Έχουμε

$$(x+2y)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2y-3)\cdot(x+2y+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-3=0 \quad ή \quad x+2y+3=0.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$x+2y-3=0 \text{ και } x+2y+3=0$$

αντίστοιχα.

Σημείωση
Κάθε εξίσωση της μορφής
$$Ax+By+\Gamma=0$$
με
$$A\neq 0 \quad ή \quad B\neq 0$$
παριστάνει ευθεία γραμμή.

ii) Έχουμε

$$x^2-2xy+y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x-y=0.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x-y=0.$$

iii) Έχουμε

$$x^2+y^2+2xy-4x-4y+3=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-4(x+y)+3=0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση β΄ βαθμού ως προς $x+y$ με διακρίνουσα

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4>0.$$

Επομένως,

$$x+y=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2}$$

Δηλαδή,

$$x+y=1 \quad ή \quad x+y=3.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$x+y-1=0 \quad \text{και} \quad x+y-3=0,$$

αντίστοιχα.

23. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\left(\mu^2-1\right)x+\left(\mu^2+\mu\right)y+\left(\mu^2+1\right)=0, \quad \mu\in\mathbb{R}.$$

i) **Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.**

ii) **Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη:**

α) στον άξονα $x'x$

β) στον άξονα $y'y$.

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν δεν ισχύουν

$$\begin{cases}\mu^2-1=0\\ \text{και}\\ \mu^2+\mu=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu=1 \quad \text{ή} \quad \mu=-1\\ \text{και}\\ \mu=0 \quad \text{ή} \quad \mu=-1\end{cases} \Leftrightarrow \mu=-1.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν $\mu\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

ii) Αποδείξαμε ότι για κάθε $\mu\neq-1$ η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε). Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$\vec{u}=\left(\mu^2+\mu,-\mu^2+1\right)$$

και επομένως:

α) $(\varepsilon)//x'x \Leftrightarrow \vec{u}//x'x$

$\Leftrightarrow -\mu^2+1=0$

$\Leftrightarrow \mu=1$, αφού $\mu\neq-1$.

β) $(\varepsilon)//y'y \Leftrightarrow \vec{u}//y'y$

$\Leftrightarrow \mu^2+\mu=0$

$\Leftrightarrow \mu=0$, αφού $\mu\neq-1$.

Σημείωση

Η εξίσωση

$$Ax+By+\Gamma=0$$

παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν ισχύει

$$A\neq0 \quad \text{ή} \quad B\neq0$$

δηλαδή αν και μόνο αν δεν ισχύει

$$A=0 \quad \text{και} \quad B=0.$$

Σημείωση

Η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$Ax+By+\Gamma=0$$

είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$\vec{u}=(B,-A)$$

και κάθετη στο διάνυσμα

$$\vec{v}=(A,B).$$

24. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με**

$$\mathbf{B(0,-2)}.$$

Αν το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση

$$\mathbf{2x+3y-17=0}$$

και η διάμεσος ΑΜ έχει εξίσωση

$$\mathbf{4x+y-9=0},$$

να βρείτε:

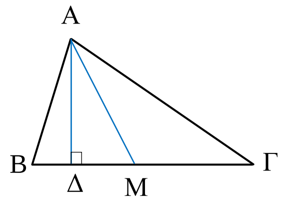
i) **τις συντεταγμένες της κορυφής Α**

ii) **την εξίσωση της ευθείας ΒΓ**

iii) **τις συντεταγμένες του σημείου Μ**

iv) **την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.**

Λύση



i) Το σημείο Α είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΔ και ΑΜ. Άρα, οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases}2x+3y-17=0\\4x+y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3(-4x+9)-17=0\\y=-4x+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5.\end{cases}$$

Δηλαδή,

$$A(1,5).$$

ii) Έχουμε

$$B\Gamma\perp A\Delta.$$

Οπότε,

$$\lambda_{B\Gamma}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{B\Gamma}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1\Leftrightarrow\lambda_{B\Gamma}=\frac{3}{2}.$$

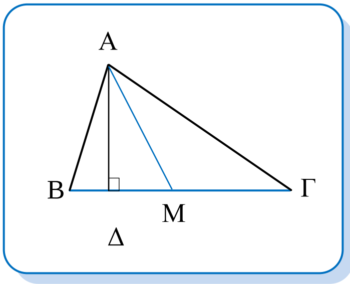
Άρα, η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση

$$y-(-2)=\frac{3}{2}(x-0)$$

δηλαδή

$$y=\frac{3}{2}x-2\Leftrightarrow 3x-2y-4=0.$$

iii) Το σημείο Μ είναι το κοινό σημείο των ευθειών ΑΜ και ΒΓ. Άρα, οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος



$$\begin{cases} 4x+y-9=0 \\ y=\dfrac{3}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4x+9 \\ -4x+9=\dfrac{3}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2. \end{cases}$$

Δηλαδή, $M(2,1)$.

iv) Γνωρίζουμε ότι $A(1,5)$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τις συντεταγμένες (x_1,y_1) του σημείου Γ. Προς τούτο, παρατηρούμε ότι το σημείο $M(2,1)$ είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ. Επομένως, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x_1+0}{2}=2 \quad \text{και} \quad \frac{y_1+(-2)}{2}=1$$

από τις οποίες βρίσκουμε $x_1=4$ και $y_1=4$. Δηλαδή, $\Gamma(4,4)$.

Έχουμε λοιπόν

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{4-5}{4-1}=-\frac{1}{3}.$$

Άρα, η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση

$$y-5=-\frac{1}{3}(x-1)$$

δηλαδή

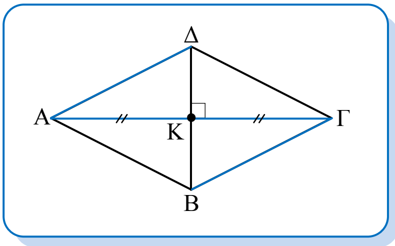
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3} \Leftrightarrow x+3y-16=0.$$

25. **Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ τέτοιος, ώστε**

$$\mathbf{A\Delta : x+2y=9, \quad B\Gamma : x+2y=3 \quad \text{και} \quad A\Gamma : y=x.}$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ.

Λύση



- Οι συντεταγμένες του Α είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x=9 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3. \end{cases}$$

Δηλαδή, $A(3,3)$.

- Οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x=3 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Δηλαδή, $\Gamma(1,1)$.

- Το κέντρο Κ του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.

Επομένως,

$$K\left(\frac{3+1}{2},\frac{3+1}{2}\right), \text{ δηλαδή } K(2,2).$$

Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

Οπότε

$$\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}=-1$$

Άρα,

$$B\Delta: y-2=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+4.$$

Σχόλιο

- Αρχικά βρίσκουμε εύκολα τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ, αφού αυτές είναι σημεία τομής γνωστών ευθειών, δηλαδή ευθειών που γνωρίζουμε τις εξισώσεις τους.
- Στη συνέχεια, για να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ αξιοποιούμε μία βασική πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. «Οι διχοτόμοι του ρόμβου διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα».

- Οι συντεταγμένες του Β είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x+2(-x+4)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=5 \end{cases}.$$

Δηλαδή, $B(5,-1)$.

- Οι συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x+2(-x+4)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

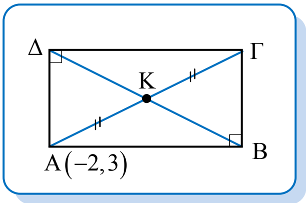
Δηλαδή, $\Delta(-1,5)$.

26. **Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $A(-2,3)$,**

$$ΑΓ: 3x+4y-6=0 \quad \text{και} \quad ΒΔ: x=0.$$

i) Να βρείτε το κέντρο Κ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ.
iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



i) Το κέντρο Κ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Οπότε, οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=0 \\ 3x+4y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$K\left(0,\frac{3}{2}\right).$$

ii)
- Έστω $Γ(x_1,y_1)$. Το σημείο Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Επομένως,

$$\frac{x_1-2}{2}=0 \quad \text{και} \quad \frac{y_1+3}{2}=\frac{3}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$x_1=2 \quad \text{και} \quad y_1=0.$$

Επομένως, $Γ(2,0)$.

- Τα σημεία Β και Δ είναι σημεία της ευθείας $x=0$. Οπότε έχουν συντεταγμένες της μορφής $(0,y_2)$ και συνεπώς

$$\overrightarrow{BA}=(-2,3-y_2) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BΓ}=(2,-y_2)$$

Όμως,

$$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BΓ} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BΓ}=0$$
$$\Leftrightarrow -2\cdot 2+(3-y_2)(-y_2)=0$$
$$\Leftrightarrow y_2^2-3y_2-4=0 \Leftrightarrow y_2=-1 \quad \text{ή} \quad y_2=4.$$

Άρα,

$$B(0,-1) \quad \text{και} \quad Δ(0,4)$$

ή

$$B(0,4) \quad \text{και} \quad Δ(0,-1)$$

Σημείωση
Κέντρο ενός ορθογωνίου και γενικότερα ενός παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Σημείωση
Το κέντρο Κ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.

Παρατήρηση
Για τα σημεία Β και Δ έχουμε την ίδια πληροφορία. Είναι σημεία της ευθείας $x=0$ και βλέπουν τη διαγώνιο ΑΓ υπό ορθή γωνία. Οπότε, στην προσπάθειά μας να βρούμε τις συντεταγμένες του Β βρίσκουμε κατ' ανάγκη και τις συντεταγμένες του Δ.

iii) Υποθέτοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $B(0,-1)$ και $\Delta(0,4)$ έχουμε

$$(AB)=\sqrt{(0+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}$$

και

$$(A\Delta)=\sqrt{(0+2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}.$$

Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι

$$E=(AB)\cdot(A\Delta)=\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}=10 \text{ τ.μ.}$$

Σχόλιο
Βρίσκουμε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΔ. Οπότε, το ζητούμενο εμβαδό είναι
$$E=(AB)\cdot(A\Delta).$$

27. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B(4,1)$, το ύψος του $A\Delta: 3x-4y+29=0$ και η διχοτόμος του $\Gamma Z: x+2y-11=0$. Να βρείτε:**

i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

ii) Την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

Λύση

i) Έχουμε

$$\Gamma B \perp A\Delta.$$

Οπότε,

$$\lambda_{\Gamma B}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma B}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\Gamma B}=-\frac{4}{3}.$$

Επομένως,

$$\Gamma B: y-1=-\frac{4}{3}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 3(y-1)=-4(x-4)$$

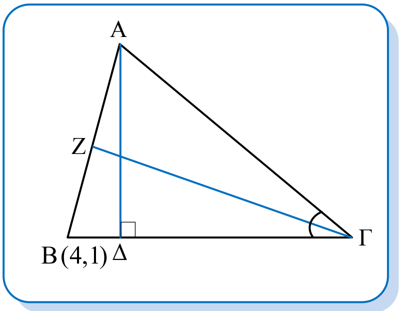
$$\Leftrightarrow 4x+3y-19=0.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x+2y-11=0 \\ 4x+3y-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+11 \\ 4(-2y+11)+3y=19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+11 \\ -5y=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$$

Άρα, $\Gamma(1,5)$.

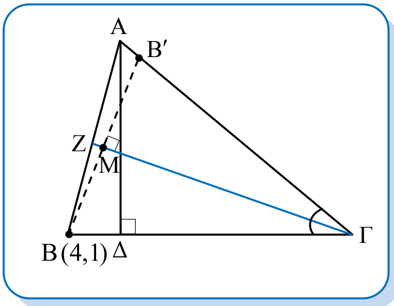


Σχόλιο
Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΓΖ και ΓΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΓΖ είναι γνωστή, ενώ η εξίσωση της ευθείας ΓΒ εύκολα μπορεί να βρεθεί. Πράγματι, γνωρίζουμε το σημείο της $B(4,1)$ και ότι
$$\Gamma B \perp A\Delta.$$

ii) Έστω $B'(x_1, y_1)$ το συμμετρικό του σημείου Β ως προς τη διχοτόμο ΓΖ. Γνωρίζουμε ότι το σημείο B' είναι σημείο της ευθείας ΑΓ και ότι το μέσο Μ του τμήματος BB' είναι σημείο της ΓΖ. Έχουμε λοιπόν

$$BB' \perp \Gamma Z \Leftrightarrow \lambda_{BB'} \cdot \lambda_{\Gamma Z} = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{BB'} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BB'} = 2$$



Οπότε,

$$BB' : y - 1 = 2(x-4) \Leftrightarrow y = 2x - 7$$

Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ x + 2(2x-7) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 5x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Δηλαδή $M(5,3)$. Και επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο του BB' έχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + 4}{2} = 5 \\ \dfrac{y_1 + 1}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 = 10 \\ y_1 + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 5 \end{cases}$$

Δηλαδή, $B'(6,5)$. Οπότε,

$$\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{B'\Gamma} = \frac{5-5}{1-6} = 0.$$

Και συνεπώς η εξίσωση της ευθείας ΑΓ είναι η $y = 5$.

Σχόλιο

Γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας ΑΓ, το σημείο $\Gamma(1,5)$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε ακόμη ένα σημείο αυτής της ευθείας. Για τον σκοπό αυτό, αξιοποιούμε την πληροφορία ότι η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Οπότε, το συμμετρικό του σημείου Β ως προς τη διχοτόμο ΓΖ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ.

28. **Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών**

$$\varepsilon_1 : x + 3y = \lambda \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2x + 7y = 5\lambda - 1, \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ανήκει σε σταθερή ευθεία.

Λύση

- Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} x+3y=\lambda \\ 2x+7y=5\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+\lambda \\ 2(-3y+\lambda)+7y=5\lambda-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+\lambda \\ -6y+2\lambda+7y=5\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+\lambda \\ y=3\lambda-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3(3\lambda-1)+\lambda \\ y=3\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8\lambda+3 \\ y=3\lambda-1 \end{cases}$$

Δηλαδή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(-8\lambda+3,\, 3\lambda-1)$.

- Για να βρούμε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει το σημείο Μ θέτουμε $M(x,y)$, οπότε

$$x=-8\lambda+3 \text{ και } y=3\lambda-1.$$

Από την πρώτη σχέση βρίσκουμε

$$\lambda=\frac{-x+3}{8}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει

$$y=3\cdot\frac{-x+3}{8}-1 \Leftrightarrow 8y=3(-x+3)-8$$

$$\Leftrightarrow 8y=-3x+9-8 \Leftrightarrow 3x+8y-1=0.$$

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon:\ 3x+8y-1=0.$$

Σχόλιο

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους. Οι συντεταγμένες αυτές είναι προφανώς εξαρτημένες από την παράμετρο λ. Πράγματι, βρίσκουμε

$$M(-8\lambda+3,\, 3\lambda-1).$$

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$M(x,y),$$

οπότε

$$x=-8\lambda+3,\ y=3\lambda-1$$

και προσπαθούμε να συνδέσουμε τα x, y με μία εξίσωση, απαλείφοντας την παράμετρο λ.

29. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\alpha(x+y+1)=3x+y-5 \qquad (1)$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.**

ii) **Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

iii) **Να βρείτε εκείνη την ευθεία της εξίσωσης (1) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta: y-2x+2$.**

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση **(1)** ισοδύναμα γράφεται

$$\alpha(x+y+1)=3x+y-5$$
$$\Leftrightarrow \alpha x+\alpha y+\alpha=3x+y-5$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3)x+(\alpha-1)y+(\alpha+5)=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η εξίσωση **(2)** είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με

$$A=\alpha-3, \quad B=\alpha-1 \quad \text{και} \quad \Gamma=\alpha+5.$$

Παρατηρούμε ότι:

- $A=0 \Leftrightarrow \alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha=3$
- $B=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

Άρα, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

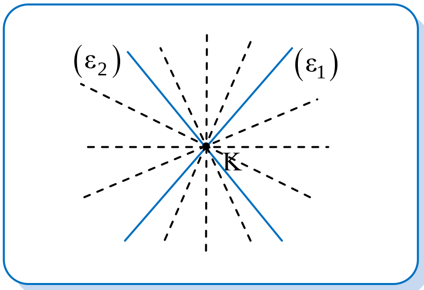
Επομένως, οι εξισώσεις **(2)** και **(1)** παριστάνουν ευθεία.

ii)
- Από την εξίσωση **(1)** για $\alpha=0$ και $\alpha=1$ προκύπτουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$3x+y-5=0$$

και

$$x+y+1=3x+y-5$$
$$\Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$$



- Το σημείο τομής K των (ε_1) και (ε_2) έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=3 \\ 3x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\cdot 3+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$$

Επομένως $K(3,-4)$.

- Θέτοντας στην εξίσωση **(1)** $x=3$ και $y=-4$ παίρνουμε

$$\alpha(3-4+1)=3\cdot 3-4-5$$
$$\Leftrightarrow \alpha\cdot 0=0$$

που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι άπειρες ευθείες (μέλη μιας παραμετρικής οικογένειας ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο, εργαζόμαστε ως εξής:

- Δίνουμε δύο τιμές στην παράμετρο και παίρνουμε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2).
- Βρίσκουμε το σημείο τομής K των παραπάνω δύο ευθειών.
- Αποδεικνύουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο K.

Άρα, οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση **(1)** για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και συνεπώς όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται από το ίδιο σημείο $K(3,-4)$.

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών (ε) που ορίζονται από την εξίσωση **(2)** είναι

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{\alpha-3}{\alpha-1} = \frac{3-\alpha}{\alpha-1}, \text{ εφόσον } \alpha \neq 1.$$

Οπότε, έχουμε

$$(\varepsilon)//(\eta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow \frac{3-\alpha}{\alpha-1} = -2$$
$$\Leftrightarrow 3-\alpha = -2\alpha+2 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Άρα η ευθεία της εξίσωσης (1) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta: y=-2x+2$ είναι η ευθεία με εξίσωση

$$-(x+y+1) = 3x+y-5$$
$$\Leftrightarrow 4x+2y-4=0$$
$$\Leftrightarrow y=-2x+2.$$

30. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\left(\lambda^2+\lambda\right)x+\left(-4\lambda^2+\lambda+1\right)y-\left(5\lambda+1\right)=0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) **Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία $\left(\varepsilon_\lambda\right)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.**

ii) **Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $\left(\varepsilon_0\right)$ και $\left(\varepsilon_1\right)$ που οι εξισώσεις τους προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση για $\lambda=0$ και $\lambda=1$ αντίστοιχα.**

iii) **Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\lambda\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

Λύση

i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda^2+\lambda \neq 0 \qquad \text{ή} \qquad -4\lambda^2+\lambda+1 \neq 0.$$

Προς τούτο, υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$\lambda^2+\lambda = 0 \qquad \text{και} \qquad -4\lambda^2+\lambda+1=0.$$

Όμως, το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων είναι αδύνατο, αφού καμία από τις ρίζες της πρώτης εξίσωσης δεν επαληθεύει τη δεύτερη. Επομένως, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda^2 + \lambda \neq 0 \quad \text{ή} \quad -4\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0 .$$

ii) Οι ευθείες (ε_0) και (ε_1) έχουν εξισώσεις

$$y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

αντίστοιχα. Άρα, το σημείο τομής K των ευθειών (ε_0) και (ε_1) έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Δηλαδή, $K(4,1)$.

iii) **α΄ τρόπος:**

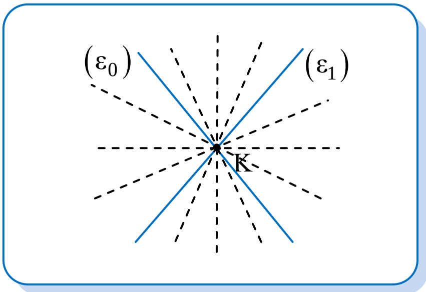
Το μόνο σημείο από το οποίο είναι πιθανό να διέρχονται όλες οι ευθείες (ε_λ) είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε_0) και (ε_1) που βρήκαμε στο ερώτημα **ii)**. Δηλαδή, το σημείο $K(4,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(\lambda^2 + \lambda\right) \cdot 4 + \left(-4\lambda^2 + \lambda + 1\right) \cdot 1 - (5\lambda + 1)$$

$$= 4\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda + 1 - 5\lambda - 1 = 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα, όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $K(4,1)$.



Παρατήρηση

Δύο ευθείες (ε_0) και (ε_1), μέλη της οικογένειας των ευθειών (ε_λ) τέμνονται στο σημείο K. Επομένως, αν όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο αυτό δεν θα είναι άλλο από το σημείο K.

β΄ τρόπος:

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $K(x_0, y_0)$ από το οποίο διέρχονται όλες τις ευθείες (ε_λ). Δηλαδή

$$\left(\lambda^2 + \lambda\right)x_0 + \left(-4\lambda^2 + \lambda + 1\right)y_0 - (5\lambda + 1) = 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα

$$\left(x_0-4y_0\right)\lambda^2+\left(x_0+y_0-5\right)\lambda+y_0-1=0 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο

$$P(\lambda)=(x_0-4y_0)\lambda^2+(x_0+y_0-5)\lambda+y_0-1$$

έχει τιμή 0 για όλες τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. Επομένως, το $P(\lambda)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Δηλαδή,

$$\begin{cases} x_0-4y_0=0 \\ x_0+y_0-5=0 \\ y_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=4 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

Άρα, όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $K(4,1)$.

31. **Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις**

$$y=\frac{1}{2}x \quad \text{και} \quad y=(\lambda+2)x+1$$

αντίστοιχα.

i) **Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα διανύσματα**

$$\vec{\alpha}=(\kappa,\lambda) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(1,\kappa+1)$$

να είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα.

ii) **Να βρείτε την αμβλεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

i) Έχουμε

$$\vec{\alpha}/\!/\varepsilon_1 \quad \text{και} \quad \vec{\beta}/\!/\varepsilon_2.$$

Επομένως,

$$\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_1 \quad \text{και} \quad \lambda_{\vec{\beta}}=\lambda_2.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\lambda}{\kappa}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\kappa+1}{1}=\lambda+2.$$

ή ισοδύναμα

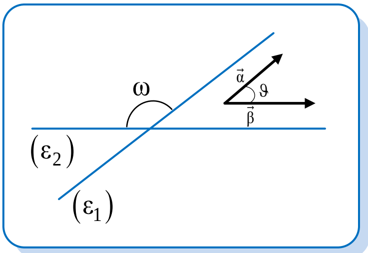
$$\kappa=2\lambda \quad \text{και} \quad \kappa+1=\lambda+2.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε

$$\kappa=2 \quad \text{και} \quad \lambda=1.$$

Σχόλιο

Η παραλληλία ενός διανύσματος και μιας ευθείας, που δεν είναι κάθετα στον άξονα $x'x$, μεταφράζεται σε ισότητα των συντελεστών διεύθυνσης.



ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει ότι τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(2,1) \text{ και } \vec{\beta}=(1,3)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Επομένως, η αμβλεία γωνία ω των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας ϑ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Όμως

Μεθοδολογία
Για να βρούμε την **οξεία** ή την **αμβλεία γωνία ω** δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) αρκεί να βρούμε τη γωνία θ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα οποία είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Προφανώς

$$\omega=\vartheta \quad \text{ή} \quad \omega=\pi-\vartheta.$$

$$\text{συν}\vartheta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{2\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Δηλαδή,

$$\text{συν}\theta=\text{συν}\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4},$$

εφόσον

$$0\le\theta\le\pi.$$

Άρα η ζητούμενη αμβλεία γωνία είναι

$$\omega=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

32. **Δίνονται οι ευθείες**

$$\varepsilon_1:\ (\kappa-1)x+(\kappa+1)y-4=0$$

και

$$\varepsilon_2:\ x+(2-2\kappa)y-3\kappa=0,$$

όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) **Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες μεταξύ τους.**

ii) **Για $\kappa=2$, να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία

$$Ax+By+\Gamma=0$$

είναι το

$$\vec{\delta}=(B,-A).$$

Επομένως, τα διανύσματα

$$\vec{\delta_1}=(\kappa+1,1-\kappa)$$

και

$$\vec{\delta_2}=(2-2\kappa,-1)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 &\Leftrightarrow \vec{\delta_1}\perp\vec{\delta_2}\\ &\Leftrightarrow \vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=0\\ &\Leftrightarrow (\kappa+1)(2-2\kappa)-(1-\kappa)=0\\ &\Leftrightarrow -2\kappa^2+\kappa+1=0\\ &\Leftrightarrow \kappa=1 \text{ ή } \kappa=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Σχόλιο

- Η πρώτη σκέψη είναι να αξιοποιήσουμε τη συνθήκη καθετότητας
$$\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$
Όμως, οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών (ε_1) και (ε_2) δεν ορίζονται για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.
- Για τον λόγο αυτό κάνουμε μια δεύτερη σκέψη. Αν $\vec{\delta_1}$, $\vec{\delta_2}$ είναι δύο διανύσματα παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες
$$\begin{aligned}\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 &\Leftrightarrow \vec{\delta_1}\perp\vec{\delta_2}\\ &\Leftrightarrow \vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=0\end{aligned}$$

ii) Για $\kappa=2$ έχουμε τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(3,-1)$ και $\vec{\delta_2}=(-2,-1)$. Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων αυτών, τότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}$$

Παρατήρηση

Για $\kappa=1$ έχουμε τις ευθείες

ε_1: $y=2$ και ε_2: $x=3$.

Οι ευθείες αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους.

Όμως

$$\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=3(-2)+(-1)(-1)=-5,$$

$$|\vec{\delta_1}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10} \quad \text{και} \quad |\vec{\delta_2}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

Οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}.$$

Επομένως, $\theta=\frac{3\pi}{4}$, αφού $0\le\theta\le\pi$. Άρα, η ζητούμενη οξεία γωνία ω των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι $\omega=\frac{\pi}{4}$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

43. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x+(\alpha-1)y-4\alpha+5=0,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

44. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha+2)x+(\alpha^2-9)y+\alpha^2-3\alpha+2=0,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία:

α) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

β) είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

45. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2-1)x+(\alpha^2+\alpha)y+(\alpha-11)=0\ .$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει:

i) ευθεία

ii) ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

iii) ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$

iv) ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο P(1, 1).

46. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$\lambda x+(\lambda-\mu)y+(\lambda+\mu-4)=0$$

όπου λ, μ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\lambda\neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ii) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την ευθεία (η) με εξίσωση $y=2x$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $3\lambda=2\mu$

β) να υπολογίσετε τους λ και μ έτσι, ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

47. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με εξισώσεις

$$x+y-9=0 \quad \text{και} \quad 3x-2y-2=0$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Αν (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x+2y-4=0,$$

να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη προς την ευθεία (ε)

β) το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει από το σημείο Α ελάχιστη απόσταση.

48. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

i) $y^2-xy=0$

ii) $xy-2x=y-2$

iii) $(x+y)^2-4=0$

iv) $x^2-2y^2+xy=0$.

49. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με εξισώσεις

$$x-2y-2=0 \quad \text{και} \quad 2x+3y-11=0$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Δίνεται επίσης η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$\alpha x+(1-\alpha)y+\beta=0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στην ευθεία (η) με εξίσωση

$$3x+y+1=0.$$

β) Να υπολογίσετε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία (ε) να είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$\vec{u}=(-1,4).$$

50. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$2x-7y+6=0.$$

i) Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας (ε) το οποίο ισαπέχει από τα σημεία

$$A(2,-1) \text{ και } B(1,0).$$

ii) Αν το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς την ευθεία $y=x$ ανήκει στην ευθεία (η) με εξίσωση

$$2x-\alpha y+\alpha^2+2\alpha=3,$$

να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=1$

β) η ευθεία ΟΑ είναι κάθετη στην ευθεία (η), όπου $O(0,0)$.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(4,7)$ και οι εξισώσεις των υψών του

$$BE: y=x \quad \text{και} \quad ΓZ: x+2y-14=0.$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

52. Σ’ ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $y=5x+2$, το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση $y=-3x+10$ και το ύψος ΒΕ έχει εξίσωση $5x-3y+6=0$.

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

iii) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

iv) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(0,4)$ και οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ έχουν εξισώσεις

$$x-5y+2=0 \quad \text{και} \quad 4x+7y-10=0$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Γ

iii) την εξίσωση του ύψους ΑΖ του τριγώνου ΑΒΓ

iv) το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει από την κορυφή Α τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma(1,0)$, η διάμεσός του $AM: 4x+13y+41=0$ και η διχοτόμος του $AZ: x+2y+4=0$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ΑΒ

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

55. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: \ x+2y-5=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: \ x-3y+4=0.$$

i) Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα.

ii) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

56. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1: y=\frac{1}{5}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x+3y+5=0.$$

57. Να βρείτε την αμβλεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1: x-2y+3=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 3x-y+1=0.$$

58. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (η) με εξισώσεις

$$y=\sqrt{3}x+1 \quad \text{και} \quad y=-\sqrt{3}x+4$$

αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=\left(1,\sqrt{3}\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=\left(1,-\sqrt{3}\right)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε) και (η) αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε) και (η).

59. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+xy-6y^2=0 \ .$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2).

ii) Να βρείτε την αμβλεία γωνία ω των ευθείων (ε_1) και (ε_2).

60. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$\mu x+(2-\mu)y+4=0$$

και

$$(\mu-2)x+3y-2=0$$

όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του μ για την οποία οι ευθείες (ε_1), (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1), (ε_2) είναι μεταξύ τους κάθετες.

iv) Για $\mu=3$, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες (ε_1), (ε_2) και τον άξονα $x'x$.

61. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: \kappa x+(\kappa-1)y+(4-\kappa)=0$$

και

$$\varepsilon_2: (\kappa-3)x+\kappa y+(\kappa+1)=0$$

όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός. Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους:

i) παράλληλες

ii) κάθετες.

62. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha : \left(\alpha^2+1\right)x+\left(\alpha+1\right)y-\alpha^2-2\alpha-3=0,\ \ \alpha\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $O\left(0,0\right)$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ παράλληλη στον άξονα $x'x$

iii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

63. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha^2+2\alpha+2\right)x+\left(\alpha^2+\alpha-1\right)y-\left(3\alpha^2+4\alpha\right)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε εκείνη την ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση **(1)** και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta : y=-x$.

64. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha+1\right)x+\left(\alpha-3\right)y+2\alpha-2=0\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή $\left(\varepsilon_\alpha\right)$.

ii) Να βρείτε την ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $P\left(3,-1\right)$.

iii) Να βρείτε την ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία σχηματίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες Ox' και Oy' τρίγωνο εμβαδού $\frac{8}{3}$ τ.μ..

iv) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών που βρήκατε στα ερωτήματα **ii)** και **iii)**.

v) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

65. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha^2+\alpha+2\right)x+\left(\alpha-3\right)y-\left(3\alpha^2+5\alpha\right)=0, \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$.

iii) Να βρείτε ποια από τις ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία

$$\eta:\ x+2y+5=0.$$

66. Σημείο Ρ του επίπεδου έχει τετμημένη α και ανήκει στην ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=x+1.$$

i) Να βρείτε τις προβολές Α και Β του σημείου Ρ πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ με εξίσωση

$$-\alpha x+\left(\alpha+1\right)y-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=0$$

είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

iv) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

67. Δύο σημεία

$$A\left(\alpha,0\right) \text{ και } B\left(0,\beta\right)$$

κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ii) Αν ισχύει η σχέση

$$\left(OA\right)+\left(OB\right)=2,$$

να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$\alpha x+\left(\alpha-2\right)y+4-4\alpha=0$$

β) η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\alpha>0$.

68. Δύο σημεία

$$A(\alpha, 0) \text{ και } B(0,\beta) \text{ με } \alpha\beta \neq 0$$

κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

ii) αν ισχύει η σχέση

$$\frac{5}{\alpha}+\frac{7}{\beta}=1,$$

τότε η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο.

69. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$x+y+\lambda-3=0$$

και

$$2x-y-4\lambda=0$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Μ των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μία σταθερή ευθεία (ε) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

70. Δίνεται το σημείο $K(3,1)$ και τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ τα οποία κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{KB}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta = 10 - 3\alpha$

ii) το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ κινείται στο εσωτερικό ενός ευθυγράμμου τμήματος.

71. Δίνονται οι ευθείες

$$ε: 3x + y + α = 0$$

και

$$η: x + βy - 5 = 0$$

με $α, β \in \mathbb{R}$, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β

ii) το σημείο τομής Β των ευθειών (ε) και (η)

iii) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$(AM)^2 - (BM)^2 = 2.$$

72. Δίνονται τα σημεία

Α(0, 2) και Β(2, 4).

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM'} = 8,$$

όπου Μ' είναι το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς τον άξονα $x'x$, είναι το σύνολο των σημείων των ευθειών

$$ε_1: y = -x \quad \text{και} \quad ε_2: y = x - 2.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $(ε_1)$ και $(ε_2)$ και από το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Εμβαδόν Τριγώνου

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Πρόταση

Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι

$$\mathbf{d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

Παράδειγμα

Η απόσταση του σημείου $M(2, -3)$ από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 9$ είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3.$$

Υπολογισμός Εμβαδού

Πρόταση

Το εμβαδό οποιουδήποτε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|}.$$

Παράδειγμα

Αν είναι $A(1,2), B(3,8)$ και $\Gamma(0,4)$ οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε

$$\overrightarrow{AB} = (2,6) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (-1,2).$$

Οπότε, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|4 + 6| = 5 \text{ τ.μ.}$$

Λυμένες Ασκήσεις

33. **Δίνεται το σημείο $A(-1, 0)$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$x - y - 1 = 0.$$

i) Να βρείτε το σημείο Β του άξονα $y'y$ που ισαπέχει από το σημείο Α και την ευθεία (ε).

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη προς την (ε).

Λύση

i) Έστω $B(0, y_1)$. Το σημείο Β ισαπέχει από το σημείο Α και την ευθεία (ε). Δηλαδή, ισχύει η σχέση

$$(BA) = d(B, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-1-0)^2 + (0-y_1)^2} = \frac{|0 - y_1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + y_1{}^2} = \frac{|y_1 + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + y_1^2}\right)^2 = |y_1 + 1|^2$$

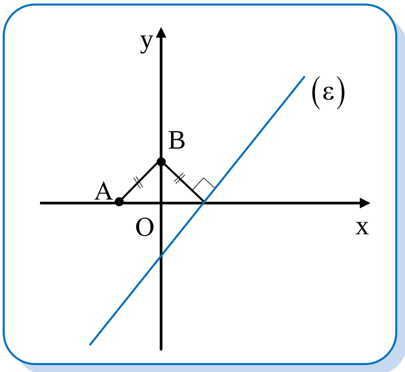
$$\Leftrightarrow 2(1 + y_1^2) = (y_1 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2y_1^2 = y_1^2 + 2y_1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 - 2y_1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1.$$

Επομένως, $B(0, 1)$.



Σημείωση

Έστω (ε) μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

και ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ εκτός αυτής. Η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε) είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_{AB} = \frac{1-0}{0-(-1)} = 1 = \lambda_\varepsilon.$$

Άρα, η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε).

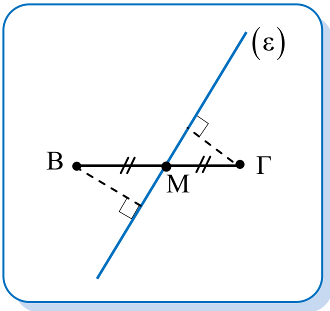
34. **Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$ και ισαπέχει από τα σημεία $B(0,2)$ και $\Gamma(4,0)$. Αν η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία ω, τότε:**

i) να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε)

ii) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε)

iii) να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσο του ΒΓ.

Λύση



i) Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε). Επομένως, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$y-(-1)=\lambda(x-0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda x-y-1=0.$$

Η ευθεία (ε) ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

Δηλαδή,

$$d(B,\varepsilon)=d(\Gamma,\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-2-1|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\frac{|\lambda\cdot 4-0-1|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow |-3|=|4\lambda-1|$$

$$\Leftrightarrow 3=|4\lambda-1| \Leftrightarrow 4\lambda-1=\pm 3 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Όμως,

$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega>0,$$

αφού η γωνία ω είναι οξεία. Άρα, $\lambda=1$.

ii) Αποδείξαμε ότι η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως, έχει εξίσωση

$$x-y-1=0.$$

iii) Το μέσο του τμήματος ΒΓ είναι το σημείο $M\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+0}{2}\right)$, δηλαδή $M(2,1)$.

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), αφού $2-1-1=0$. Άρα, η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ.

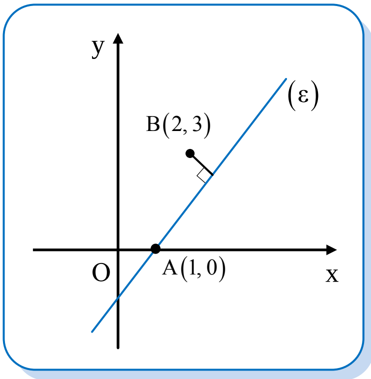
35. **Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και απέχει από το σημείο $B(2,3)$ απόσταση ίση με 1.**

i) Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και απέχουν από το σημείο Β απόσταση ίση με 1.

Λύση



i) Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$y-0=\lambda(x-1)$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda x-y-\lambda=0.$$

Όμως,

$$d(B,\varepsilon)=1.$$

Δηλαδή,

$$\frac{|\lambda\cdot 2-3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=1 \Leftrightarrow |\lambda-3|=\sqrt{\lambda^2+1}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda-3|^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-3)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+9=\lambda^2+1$$

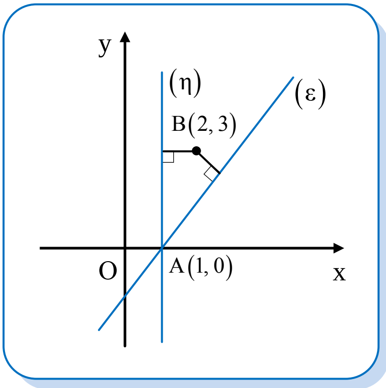
$$\Leftrightarrow -6\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{3}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{4}{3}$. Επομένως, έχει εξίσωση

$$\frac{4}{3}x-y-\frac{4}{3}=0$$

ή ισοδύναμα

$$4x-3y-4=0.$$



iii) Αποδείξαμε ότι από όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν συντελεστή διεύθυνσης, μία μόνο απέχει από το σημείο Β απόσταση ίση με 1. Εξετάζουμε λοιπόν, αν η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή η ευθεία (η) με εξίσωση $x=1$, απέχει από το Β απόσταση ίση με 1. Έχουμε

$$d(B,\eta)=\frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο ευθείες, οι ευθείες (ε) και (η), οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α και απέχουν από το σημείο Β απόσταση ίση με 1.

36. **Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις**

$$\alpha x-4y+2=0 \quad \text{και} \quad x+2y+5=0$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε:

i) **να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$**

ii) **να βρείτε την απόσταση d των ευθειών (ε_1) και (ε_2).**

iii) **να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας (ε) των ευθειών (ε_1) και (ε_2)**

Λύση

i) Έχουμε $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$. Άρα,

$$\lambda_1=\lambda_2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=-2.$$

ii) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση

$$-2x-4y+2=0$$

ή ισοδύναμα

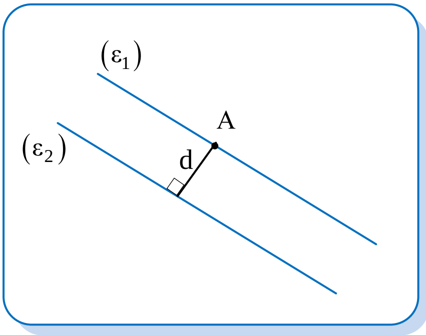
$$x+2y-1=0.$$

Από την παραπάνω εξίσωση για $y=0$ βρίσκουμε

$$x=1.$$

Δηλαδή, ένα σημείο της (ε_1) είναι το σημείο $A(1,0)$. Επομένως, η ζητούμενη απόσταση είναι

$$d=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|1+2\cdot 0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{2}.$$



Παρατήρηση

Η απόσταση d δύο παράλληλων ευθειών είναι η απόσταση ενός σημείου της μίας ευθείας από την άλλη.

iii) **α΄ τρόπος:**

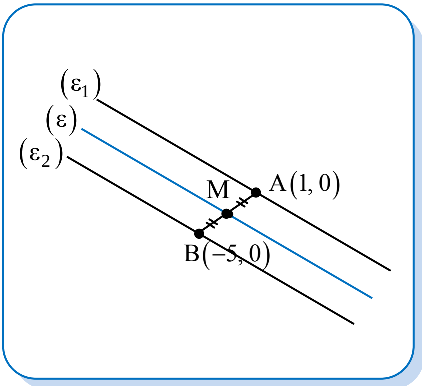
Το $B(-5,0)$ είναι προφανώς σημείο της (ε_2). Η μεσοπαράλληλη (ε) των ευθειών (ε_1) και (ε_2) διέρχεται από το μέσο του τμήματος AB, δηλαδή από το σημείο $M(-2,0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{2}.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$y-0=-\frac{1}{2}(x+2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-1$$

$$\Leftrightarrow 2y=-x-2\ \Leftrightarrow x+2y+2=0.$$



β΄ τρόπος:

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε). Έχουμε

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|x+2y+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow |x+2y-1|=|x+2y+5|$$

Σημείωση

Χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε σημείου της μεσοπαράλληλης είναι ότι ισαπέχει από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). Δηλαδή, η ζητούμενη ευθεία είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

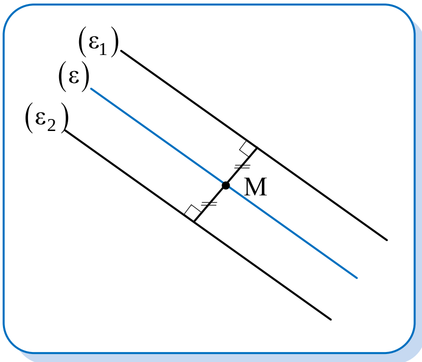
$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2).$$

$$\Leftrightarrow x+2y-1=\pm(x+2y+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=x+2y+5, \ \text{αδύνατη} \\ \text{ή} \\ x+2y-1=-x-2y-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x+4y+4=0$$

$$\Leftrightarrow x+2y+2=0.$$



37. **Δίνεται το διάνυσμα**

$$\vec{\delta}=(4,3).$$

i) **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$.**

ii) **Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) και απέχουν από αυτή απόσταση ίση με 2 μονάδες.**

Λύση

i) Η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(4,3)$ και συνεπώς έχει εξίσωση της μορφής

$$4x+3y+\kappa=0, \qquad \kappa\in\mathbb{R}.$$

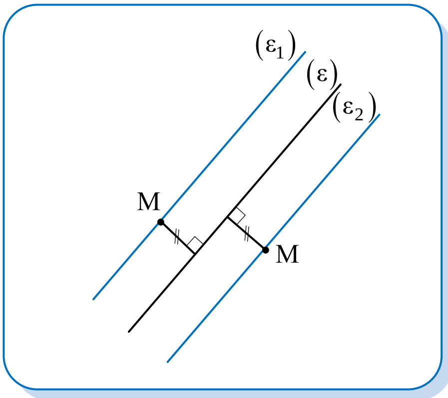
Επίσης, η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$. Επομένως,

$$4\cdot1+3\cdot(-1)+\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=-1.$$

Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$4x+3y-1=0.$$

ii) Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο ζητούμενης ευθείας. Έχουμε



$$d(M, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |4x+3y-1| = 10$$

$$\Leftrightarrow 4x+3y-1 = \pm 10$$

Δηλαδή,

$$4x+3y-11=0$$

ή

$$4x+3y+9=0.$$

Άρα, οι ζητούμενες ευθείες είναι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$4x+3y-11=0 \quad \text{και} \quad 4x+3y+9=0$$

αντίστοιχα.

38. **Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις**

$$\mathbf{x+2y+1=0 \quad και \quad 2x+y=0}$$

αντίστοιχα.

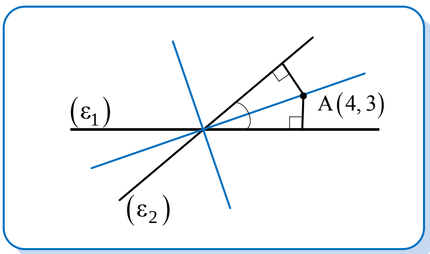
i) **Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(4, 3)$ ανήκει σε κάποια από τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2).**

ii) **Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$d(A, \varepsilon_1) = d(A, \varepsilon_2).$$



Έχουμε

$$d(A, \varepsilon_1) = \frac{|4+2\cdot 3+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

και

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}.$$

Επομένως,

$$d(A, \varepsilon_1) = d(A, \varepsilon_2).$$

Σημείωση

Ένα σημείο ανήκει στη διχοτόμο μιας γωνίας αν και μόνο αν ισαπέχει από τις πλευρές της.

ii) Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο ζητούμενης διχοτόμου. Έχουμε

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2x + y|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + 1| = |2x + y|$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 2x + y \quad ή \quad x + 2y + 1 = -2x - y$$

$$\Leftrightarrow -x + y + 1 = 0 \quad ή \quad 3x + 3y + 1 = 0.$$

Παρατήρηση

Οι ζητούμενες ευθείες είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

Άρα, οι ζητούμενες εξισώσεις είναι

$$-x + y + 1 = 0 \quad και \quad 3x + 3y + 1 = 0.$$

39. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2xy - 5x + 5y + 6 = 0}$$

i) **Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

ii) **Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

i) Έχουμε

$$x^2 + y^2 - 2xy - 5x + 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 - 5(x - y) + 6 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς $x - y$ με διακρίνουσα

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0.$$

Επομένως,

$$x - y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x - y = 2 \quad ή \quad x - y = 3.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - y = 2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x - y = 3.$$

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού

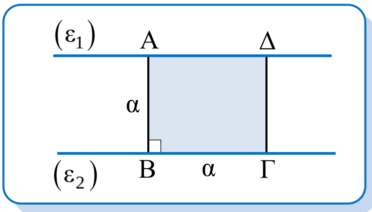
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

ii) Το σημείο $A(2,0)$ προφανώς ανήκει στην ευθεία (ε_1). Επομένως, η απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2), δηλαδή η πλευρά α του τετραγώνου για το οποίο γίνεται λόγος, είναι

$$\alpha = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2-0-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \alpha^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{τ.μ.}$$



Σημείωση
Το ζητούμενο εμβαδό είναι
$$E = \alpha^2$$
όπου α η πλευρά του τετραγώνου. Η πλευρά α είναι ίση με την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2).

40. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(0,2)$, $B(3,0)$ και τέτοιο, ώστε**

$$\overrightarrow{B\Gamma} = (1,1).$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

i) Έστω $\Gamma(x, y)$. Έχουμε

$$\overrightarrow{B\Gamma} = (1,1).$$

Δηλαδή,

$$(x-3, y-0) = (1,1)$$

ή ισοδύναμα

$$x - 3 = 1 \quad \text{και} \quad y = 1$$

και τελικά

$$x = 4 \quad \text{και} \quad y = 1.$$

Επομένως,

$$\Gamma(4,1).$$

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = (3-0,\, 0-2) = (3,\, -2)$$

και

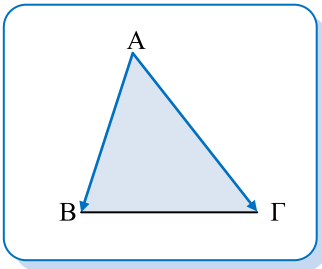
$$\overrightarrow{A\Gamma} = (4-0,\, 1-2) = (4,\, -1)$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|.$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|-3+8| = \frac{5}{2} \text{ τ.μ.}$$



Σημείωση

Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|.$$

41. **Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(0, -1)$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{x + y - 1 = 0.}$$

Ένα σημείο $\Gamma(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i) Να αποδείξετε ότι $x_0 > 1$.

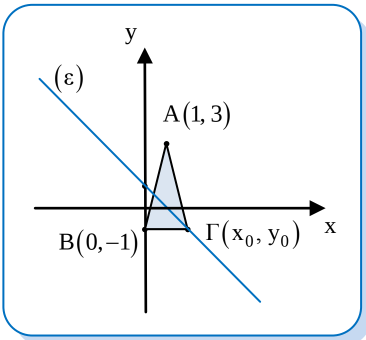
ii) Αν το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με 4 τ.μ., να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Λύση

i) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία (ε). Επομένως, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή, ισχύει η σχέση

$$x_0 + y_0 - 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο Γ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Δηλαδή, $y_0 < 0$.



Η τελευταία σχέση λόγω της σχέσης **(1)** γράφεται

$$1-x_0<0 \Leftrightarrow x_0>1.$$

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=(0-1,-1-3)=(-1,-4)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_0-1,\, y_0-3).$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\begin{aligned}(AB\Gamma)&=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1 & -4\\ x_0-1 & y_0-3\end{vmatrix}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|-1\cdot(y_0-3)-(-4)\cdot(x_0-1)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|4x_0-y_0-1\right|\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}\left|5x_0-2\right|.\end{aligned}$$

Όμως,

$$(AB\Gamma)=4.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2}\left|5x_0-2\right|=4 \Leftrightarrow 5x_0-2=\pm 8 \Leftrightarrow x_0=2 \quad \text{ή} \quad x_0=-\frac{6}{5}.$$

Και επειδή $x_0>1$ συμπεραίνουμε ότι $x_0=2$. Επίσης, από τη σχέση **(1)** προκύπτει

$$y_0=1-x_0=1-2=-1.$$

Δηλαδή,

$$\Gamma(2,-1).$$

42. **Δίνεται η ευθεία**

$$\boldsymbol{\varepsilon : y = 2x}$$

και σημείο της $\mathbf{A}$ το οποίο βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\mathbf{x'x}$. Αν η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία

$$\boldsymbol{\zeta : x - y - 1 = 0}$$

είναι ίση με $\sqrt{2}$, τότε:

i) **να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α**

ii) **να βρείτε το σημείο τομής Β των ευθειών (ε) και (ζ)**

iii) **να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία $\mathbf{y = x}$.**

Λύση

i) Έστω (x_0, y_0) οι ζητούμενες συντεταγμένες. Το σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία

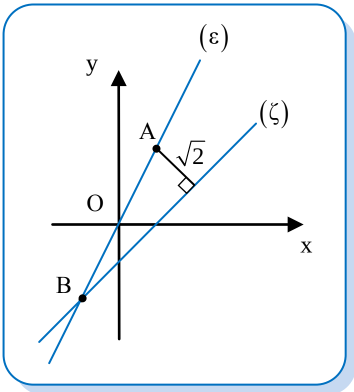
$$\varepsilon : y = 2x.$$

Επομένως, ισχύει η σχέση

$$y_0 = 2x_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης,

$$d(A, \zeta) = \sqrt{2}.$$



Δηλαδή,

$$\frac{|x_0 - y_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x_0 - y_0 - 1| = 2.$$

Και επειδή

$$y_0 = 2x_0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$|x_0 - 2x_0 - 1| = 2 \Leftrightarrow |-x_0 - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow -x_0 - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = -3 \qquad \textbf{(2)}$$

Όμως, το σημείο $A(x_0, y_0)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Δηλαδή,

$$y_0 > 0.$$

Επομένως, από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι

$$x_0 = 1 \text{ και } y_0 = 2.$$

Δηλαδή, $A(1, 2)$.

ii) Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι η λύση του συστήματος

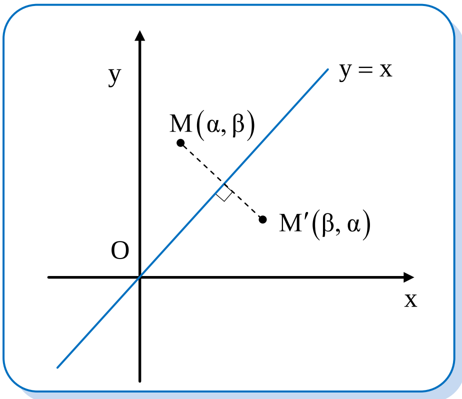
$$\begin{cases} y = 2x \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -1. \end{cases}$$

Δηλαδή, $B(-1, -2)$.

iii) Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του σημείου $A(1, 2)$ ως προς την ευθεία

$$y = x.$$

Επομένως, $\Gamma(2, 1)$.



Έχουμε λοιπόν

$$\overrightarrow{AB} = (-1-1, -2-2) = (-2, -4)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (2-1, 1-2) = (1, -1).$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\begin{aligned}(AB\Gamma) &= \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}|2+4| = 3 \text{ τ.μ.}\end{aligned}$$

Σημείωση

Το συμμετρικό ενός σημείου

$$M(\alpha, \beta)$$

ως προς την ευθεία

$$y = x$$

είναι το σημείο

$$M'(\beta, \alpha).$$

43. **Οι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία**

$$\mathrm{A}(1,0),\ \mathrm{B}(2,3)\ \ \text{και}\ \ \Gamma(4,7).$$

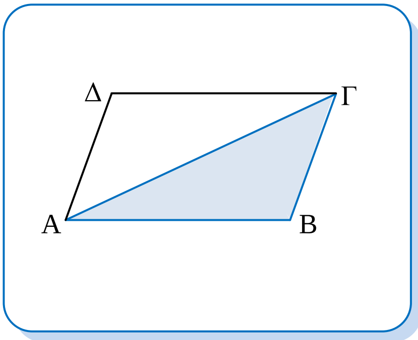
Να βρείτε:

i) **το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ**

ii) **τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση**

$$(\mathrm{AM\Gamma}) = 3(\mathrm{AB\Gamma\Delta}).$$

Λύση



i) Η διαγώνιος ΑΓ χωρίζει το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΑ και συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 2(\mathrm{AB\Gamma}) \qquad \textbf{(1)}$$

Έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-1,\, 3-0) = (1,\, 3)$$

και

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (4-1,\, 7-0) = (3,\, 7)$$

Επομένως η σχέση **(1)** γράφεται

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 2\cdot\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})|$$

$$= \left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right| = |7-9| = 2 \text{ τ.μ.}$$

Σημείωση

Κάθε διαγώνιος χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα, άρα και ισεμβαδικά τρίγωνα.

ii) Έστω Μ(x, y). Τότε, έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (x-1,\, y) \ \text{ και } \ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (3,\, 7).$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΓ είναι

$$(\mathrm{AM\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x-1 & y \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|7(x-1) - 3y| = \frac{1}{2}|7x - 3y - 7|.$$

Όμως

$$(\mathrm{AM\Gamma}) = 3(\mathrm{AB\Gamma\Delta}).$$

Επομένως

$$\frac{1}{2}|7x-3y-7|=3\cdot 2 \Leftrightarrow |7x-3y-7|=12$$

ή ισοδύναμα

$$7x-3y-7=12 \quad ή \quad 7x-3y-7=-12$$

και τελικά

$$7x-3y-19=0 \quad ή \quad 7x-3y+5=0.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) είναι το σύνολο των σημείων των ευθειών

$$\varepsilon: 7x-3y-19=0 \quad και \quad \eta: 7x-3y+5=0.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

73. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(7,-5)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση:

i) $3x+4y+9=0$ **ii)** $x+2y+1=0$.

74. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$4x-3y-11=0 \quad και \quad -8x+6y+7=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (ε_1) με την ευθεία $x=2$.

iii) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

75. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$y=2x-2 \quad και \quad y=2x-6.$$

Να βρείτε:

i) το σημείο του άξονα $x'x$ το οποίο ισαπέχει από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2)

ii) των εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

76. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : (\alpha - 1)x + 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : (3 - \alpha)x + 2y = 0$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση d των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

iii) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

77. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$3x + 4y + 7 = 0$$

η οποία είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2 μονάδες.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Ένα σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $y = x$ και βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις συνταγμένες του Μ έτσι, ώστε αυτό να απέχει από κάποια από τις ευθείες (ε_1), (ε_2) απόσταση ίση με 2 μονάδες.

78. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3 μονάδες.

79. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$3x + 4y = 0.$$

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 4 μονάδες.

ii) Ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο ερώτημα **i)** βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $A(-3, 2)$;

80. Δίνονται το σημείο $A(0,1)$ και η ευθεία

$$\eta : x+2y-7=0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη προς την (η) και απέχει από το σημείο Α απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

81. Δίνονται το σημείο $A(-1,-3)$ και η ευθεία

$$\varepsilon : x+y+2=0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη προς την (ε) και ισαπέχει από το σημείο Α και την ευθεία (ε).

82. Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(4,7)$ και ισαπέχει από τα σημεία $B(1,5)$ και $\Gamma(3,1)$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

ii) Αν η ευθεία (ε) σχηματίζει οξεία γωνία ω με τον άξονα $x'x$, τότε:

α) να βρείτε την $\varepsilon\varphi\omega$

β) να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ.

83. Δίνεται το σημείο $A(-5,5)$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και :

α) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$

β) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

ii) τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α και απέχουν από το σημείο $B(-3,4)$ απόσταση ίση με 1 μονάδα.

84. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (η) με εξισώσεις

$$x+y-3=0 \qquad \text{και} \qquad x-4y+2=0$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών (ε) και (η)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και:

α) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$

β) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

iii) τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α και απέχουν από την αρχή των αξόνων Ο απόσταση ίση με 2 μονάδες.

85. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και απέχει από το σημείο $B(3,1)$ απόσταση ίση με 2.

86. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P(1,3)$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(-9,1)$ και $B(9,-17)$.

87. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η η οποία διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(3,1)$.

88. Μία ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ, διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$ και σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες

ii) την εξίσωση της ευθείας (ε) αν είναι γνωστό ότι αυτή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $E=2$ τ.μ..

89. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (η) με εξισώσεις

$$x-2y+1=0 \qquad \text{και} \qquad 3x-4y+21=0$$

i) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας (ε), τα οποία απέχουν από την ευθεία (η) απόσταση ίση με 4.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων που βρήκατε στο ερώτημα **i).**

90. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$12x-5y+10=0 \quad \text{και} \quad 3x+4y-8=0\,.$$

Να βρείτε:

i) το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2)

ii) τα σημεία του άξονα $x'x$ τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2)

iii) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2).

91. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$12x-5y+36=0.$$

Να βρείτε:

i) τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα

ii) το σημείο Γ του θετικού ημιάξονα Oy, το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων Ο και την ευθεία (ε)

iii) την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $O\widehat{A}B$..

92. Δίνονται τα σημεία

$$A(-1,0),\quad B(2,-1)\quad \text{και}\quad \Gamma(4,3)$$

i) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο να υπολογίσετε το εμβαδό του.

93. Δίνονται τα σημεία $A(1,5)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(4,0)$.

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

94. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,-4)$, $B(2,1)$ το οποίο έχει εμβαδό $E=8$τ.μ. Να βρείτε το σημείο Γ αν είναι γνωστό ότι αυτό βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: y=-2x$ και οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί.

95. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με

$$A(3,1)\quad \text{και}\quad B(1,-3).$$

Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon:\ y=x$ και βρίσκεται κάτω από την ευθεία $\eta:\ y=4$.

Αν το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E=3$ τ.μ., τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ

ii) να αποδείξετε ότι $A\Gamma\perp(\varepsilon)$.

96. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $(AB)=(A\Gamma)$ έχει κορυφές τα σημεία

$$A(x_0,y_0),\ B(0,-1)\ \text{και}\ \Gamma(2,5).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$x_0+3y_0-7=0.$$

ii) Αν το σημείο Α ανήκει στην ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=x+5,$$

να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Α

β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

97. Δίνονται τα σημεία

$$A(-1,0),\ B(3,0)\ \text{και}\ \Gamma(1,\kappa)\ \text{με}\ \kappa>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=4\kappa$

β) τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii) Αν το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E=4\sqrt{3}\ \text{τ.μ.},$$

τότε:

α) να βρείτε την τιμή του κ

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

98. Ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ οι κορυφές Α και Β έχουν συντεταγμένες $(-4,1)$ και $(6,0)$ αντίστοιχα. Το κέντρο του ΑΒΓΔ είναι το σημείο $K(3,2)$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του ΑΒΓΔ.

99. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(2,1)$. Η κορυφή Β ανήκει στην ευθεία $x=4$ και η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση

$$x-2y+15=0.$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

ii) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του ΑΒΓΔ.

100. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $A(-1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

i) Να βρείτε το κέντρο Κ του ρόμβου ΑΒΓΔ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ.

iii) Αν η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $y=3x-11$, να βρείτε:

α) τις κορυφές Β και Δ

β) το εμβαδό του ρόμβου ΑΒΓΔ.

101. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x+y-7=0$$

και τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(5,-8)$.

i) Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας (ε) το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΜΑΒ.

102. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(7,6)$.

i) Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $x'x$ για το οποίο το εμβαδό του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσο με 12 τ.μ.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ.

103. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,0) \quad \text{και} \quad B(5,1)$$

Να αποδείξετε ότι:

i) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(MAB)=2$$

είναι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες

ii) η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

104. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,1) \text{ και } B(5,3).$$

Να βρείτε:

i) το σημείο Γ του θετικού ημιάξονα Ox, για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(AB\Gamma)=5 \text{ τ.μ.}$$

ii) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(ABM)=2(OAB),$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

105. Ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ και σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda<0.$$

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

iii) Να υπολογίσετε συναρτήσει του λ, το εμβαδό $E(\lambda)$ του τριγώνου ΟΑΒ.

iv) Να αποδείξετε ότι

$$E(\lambda)\geq 4 \text{ για κάθε } \lambda<0.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

v) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) έτσι, ώστε το εμβαδό $E(\lambda)$ να είναι ελάχιστο.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και (ε) μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α. Τι ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$; Πώς ορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε);

2. Να αποδείξετε ότι αν μία ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα μεταξύ τους και όχι κάθετα στον άξονα $x'x$, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής **(1)** παριστάνει ευθεία γραμμή.

5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Κάθε ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω για την οποία ισχύει $0 \leq \omega < \pi$. Σ Λ

2. Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι αρνητικός αριθμός Σ Λ

3. Κάθε ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ

4. Αν μία ευθεία είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα που δεν είναι κάθετο στον άξονα $x'x$, τότε η ευθεία και το διάνυσμα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ

5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $y_1 \neq y_2$ είναι $\lambda = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Σ Λ

6. Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = 1$. Σ Λ

7. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$ Σ Λ

8. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ είναι $y = y_0$. Σ Λ

9. Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x + \beta$. Σ Λ

10. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x$. Σ Λ

11. Οι διχοτόμοι των γωνιών $x\widehat{O}y$ και $y\widehat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντίστοιχα. Σ Λ

12. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $y'y$ είναι $y = y_0$. Σ Λ

13. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Σ Λ

14. Κάθε ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$. Σ Λ

15. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$ Σ Λ

16. Το εμβαδό κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right).$$ Σ Λ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

είναι:

α) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

β) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

Α2. Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης μια ευθείας (ε);

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας (ε) που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία ω είναι αρνητικός.

β) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ είναι $y = y_0$.

γ) Για κάθε A, B, $\Gamma \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

παριστάνει ευθεία.

δ) Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon:\ Ax + By + \Gamma = 0$ είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

ε) Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|.$$

Θέμα Β

Δίνονται τα σημεία

$$A(4\lambda+1, 5\lambda-2), \quad B(1,3) \quad \text{και} \quad \Gamma(2,4)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}-\{5\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει σε σταθερή ευθεία.

B2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{5\}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό 2 τ.μ.

B3. Για $\lambda = 0$, να βρείτε:

α) την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς ΑΒ.

Θέμα Γ

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x-\lambda y-2=0 \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(1)}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση **(1)** είναι κάθετη προς το διάνυσμα

$$\vec{v} = (4-\lambda^2, \lambda).$$

Γ4. Για $\lambda = 0$, να βρείτε την οξεία γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) της εξίσωσης **(1)** με την ευθεία

$$\eta: x-2y+7=0.$$

Θέμα Δ

Δίνεται η ευθεία (ε_1) με εξίσωση

$$\varepsilon_1 : y = 2x + 1.$$

Να βρείτε:

Δ1. Την εξίσωση της ευθείας (ε_2) η οποία είναι παράλληλη προς την (ε_1) και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $P(p,0)$ και $Q(0,q)$ τέτοια, ώστε

$$6p + q = 18.$$

Δ2. Την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας (ε) των παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Δ3. Το συμμετρικό του σημείου $P(p,0)$ ως προς την ευθεία (ε).

Δ4. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Κωνικές Τομές

«Τα Μαθηματικά
είναι η βασίλισσα των επιστημών.»

J. Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777 – 1855)

Ο Γιόχαν Καρλ Φρίντριχ Γκάους, ο σημαντικότερος γερμανός μαθηματικός, γεννήθηκε στις 30 Απριλίου του 1777. Συνεισέφερε σε πολλά ερευνητικά πεδία της επιστήμης του, όπως η θεωρία αριθμών, η στατιστική, η μαθηματική ανάλυση, η διαφορική γεωμετρία, αλλά και συναφών επιστημών, όπως η γεωδαισία, η αστρονομία και η φυσική (ηλεκτροστατική, οπτική, γεωμαγνητισμός). Ο Γκάους χαρακτηρίστηκε ως «ο πρίγκιπας των μαθηματικών» και «ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών μετά τον Αρχιμήδη». Πέθανε στο Γκέτινγκεν στις 23 Φεβρουαρίου 1855.

Κύκλος

Ορισμός (Κύκλου)

Έστω ένα σημείο Κ και ένας θετικός αριθμός ρ. Ονομάζεται **κύκλος** με **κέντρο** το σημείο Κ και **ακτίνα** ρ ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MK)=\rho$.

Πρόταση

Ο κύκλος (c) με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\mathbf{x^2+y^2=\rho^2}\ .$$

Απόδειξη

Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο (c) αν και μόνο αν ισχύει

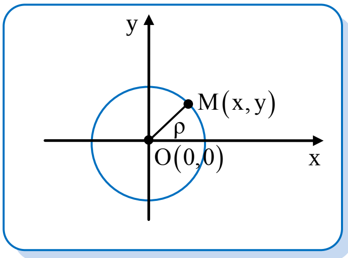
$$(MO)=\rho$$

ή ισοδύναμα

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$$

και τελικά

$$x^2+y^2=\rho^2.$$



Παράδειγμα

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=4$ έχει εξίσωση

$$x^2+y^2=16.$$

- Ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ ονομάζεται **μοναδιαίος κύκλος.**

Εφαπτομένη Κύκλου

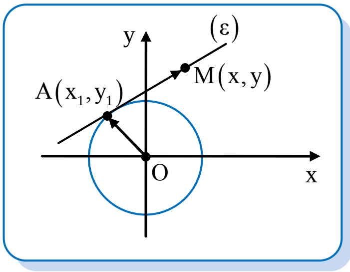
Πρόταση

Η εφαπτομένη (ε) του κύκλου $c: x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\mathbf{xx_1+yy_1=\rho^2}\ .$$

Απόδειξη

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ζητούμενης εφαπτομένης (ε). Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το σημείο M ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν ισχύει



$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM}$$

δηλαδή

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1).$$

Επομένως, η σχέση **(1)** γράφεται

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2, \quad \text{αφού} \quad x_1^2 + y_1^2 = \rho^2.$$

Παράδειγμα

Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του $A(4,-3)$ έχει εξίσωση

$$x \cdot 4 + y \cdot (-3) = 25$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$4x - 3y - 25 = 0.$$

Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

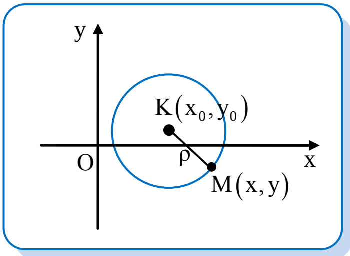
Πρόταση

Ο κύκλος (c) με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 .$$

Απόδειξη

Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο (c) αν και μόνο αν ισχύει η σχέση



$$(MK) = \rho$$

Δηλαδή

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$

ή ισοδύναμα

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Παράδειγμα

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(4,-2)$ και ακτίνα $\rho=7$ έχει εξίσωση

$$(x-4)^2+(y+2)^2=49.$$

Πρόταση

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0} \quad \text{με} \quad \mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}\ .$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο.

Απόδειξη

- Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=\rho^2$$

δηλαδή

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+\left(x_0^2+y_0^2-\rho^2\right)=0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$. Επίσης ισχύει

$$A^2+B^2-4\Gamma=4x_0^2+4y_0^2-4\left(x_0^2+y_0^2-\rho^2\right)=4\rho^2>0.$$

- Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

γράφεται

$$\left(x^2+Ax\right)+\left(y^2+By\right)=-\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4} \qquad \textbf{(1)}$$

Οπότε:

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση **(1)** παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση **(1)** είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου που να την επαληθεύουν.

Παράδειγμα

Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x+4\lambda y+(4\lambda^2+2\lambda-1)=0,$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές του αριθμού λ.

Λύση

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

με

$$A=-2\lambda,\quad B=4\lambda \quad \text{και} \quad \Gamma=4\lambda^2+2\lambda-1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A^2+B^2-4\Gamma &= 4\lambda^2+16\lambda^2-4(4\lambda^2+2\lambda-1)\\ &=4\lambda^2-8\lambda+4=4(\lambda^2-2\lambda+1)\\ &=4(\lambda-1)^2 \quad \text{για κάθε } \lambda\in R. \end{aligned}$$

Επομένως:

- Αν $\lambda\neq 1 \Leftrightarrow 4(\lambda-1)^2>0$, τότε $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

  Οπότε, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή το σημείο $K(\lambda,-2\lambda)$ και ακτίνα

  $$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4(\lambda-1)^2}}{2}=\frac{2\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2}=|\lambda-1|.$$

- Αν $\lambda=1 \Leftrightarrow 4(\lambda-1)^2=0$, τότε $A^2+B^2-4\Gamma=0$.

  Οπότε, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει μόνο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή το σημείο $K(1,-2)$.

Λυμένες Ασκήσεις

1. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

i) **Όταν διέρχεται από το σημείο $A(4,-3)$.**

ii) **Όταν εφάπτεται στην ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$12x+5y-26=0.$$

Λύση

i) Η ακτίνα του κύκλου είναι

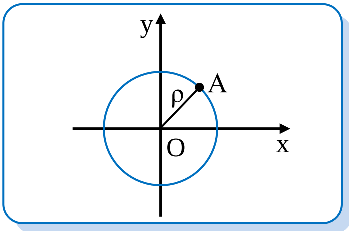
$$\rho=(OA)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$x^2+y^2=5^2$$

δηλαδή

$$x^2+y^2=25.$$



Σημείωση

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

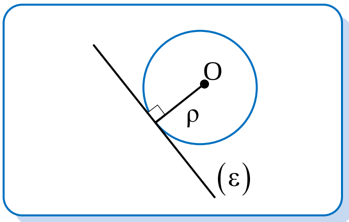
$$x^2+y^2=\rho^2.$$

ii) Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία (ε). Επομένως, η ακτίνα ρ του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου του από την ευθεία (ε). Δηλαδή,

$$\rho=d(O,\varepsilon)=\frac{|12\cdot 0+5\cdot 0-26|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{26}{13}=2.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$x^2+y^2=4.$$



Σημείωση

Μια ευθεία (ε) εφάπτεται σε έναν κύκλο (c) αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου (c) από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα του.

2. **Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση**

$$\mathbf{x^2+y^2=9}$$

και το σημείο $\mathbf{M(2,1)}$.

i) **Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (c).**

ii) **Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ του κύκλου (c) η οποία έχει μέσο το σημείο Μ.**

iii) **Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.**

Λύση

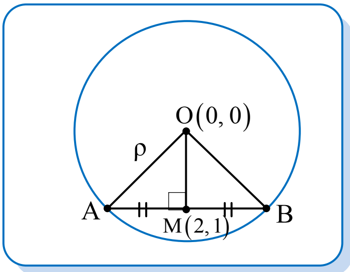
i) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$. Έχουμε

$$(OM)=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}<3.$$

Δηλαδή,

$$(OM)<\rho.$$

Άρα, το σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (c).



Παρατήρηση

Για να αποδείξουμε ότι το σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (c), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(OM)<\rho.$$

ii) Από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το ΟΜ είναι το απόστημα της χορδής ΑΒ. Δηλαδή,

$$OM\perp AB.$$

Επομένως,

$$\lambda_{OM}\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\frac{1-0}{2-0}\cdot\lambda_{AB}=-1$$

$$\Leftrightarrow\lambda_{AB}=-2.$$

Άρα, η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι

$$y-1=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+5.$$

Σημείωση

Αν το σημείο Μ είναι το μέσο μιας χορδής ΑΒ τότε

$$OM\perp AB.$$

iii) Το τρίγωνο ΟΜΑ είναι ορθογώνιο στο Μ. Άρα, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$(AM)^2+(OM)^2=(OA)^2.$$

Όμως,

$$(OM)=\sqrt{5}$$

και

$$(OA)=\rho=3.$$

Επομένως,

$$(AM)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=3^2 \Leftrightarrow (AM)^2=4 \Leftrightarrow (AM)=2.$$

Και επειδή το Μ είναι το μέσο του ΑΒ συμπεραίνουμε ότι

$$(AB)=2(AM)=4.$$

3. **Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση**

$$\mathbf{x^2+y^2=10.}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) **Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{y=3x+7}.$$

ii) **Όταν διέρχεται από το σημείο $A(10,0)$.**

Λύση

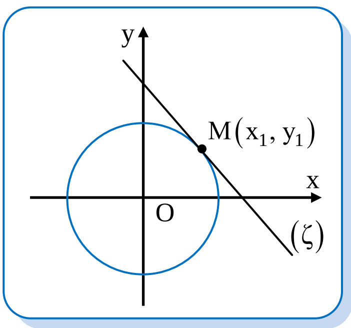
i) ***α΄ τρόπος:***

Έστω $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (ζ). Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι

$$xx_1+yy_1=10.$$

Όμως,

$$(\zeta)//(\varepsilon).$$



Επομένως,

$$\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -\frac{x_1}{y_1} = 3 \Leftrightarrow x_1 = -3y_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου (c). Άρα, ισχύει η σχέση

$$x_1^2 + y_1^2 = 10 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

$$(x_1, y_1) = (-3, 1) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (3, -1).$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$-3x + y = 10 \quad \text{και} \quad 3x - y = 10.$$

Σημείωση

Η εφαπτομένη (ζ) του κύκλου

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2.$$

β΄ τρόπος:

Η ζητούμενη εφαπτομένη (ζ) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και συνεπώς έχει εξίσωση της μορφής

$$y = 3x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, η ευθεία (ζ) εφάπτεται στον κύκλο (c) ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$. Επομένως

$$d(O, \zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 0 - 0 + \kappa|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |\kappa| = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa = \pm 10.$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

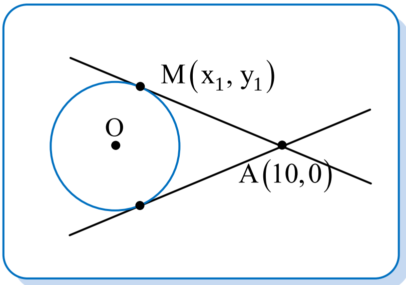
$$y = 3x + 10 \quad \text{και} \quad y = 3x - 10.$$

ii) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης ευθείας (ζ). Η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = 10.$$

Και επειδή η ευθεία (ζ) διέρχεται από το σημείο $A(10, 0)$ έχουμε

$$10 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 = 10 \Leftrightarrow x_1 = 1. \qquad \textbf{(1)}$$



Επίσης, το σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου (c).

Άρα, ισχύει η σχέση

$$x_1^2 + y_1^2 = 10 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

$$(x_1, y_1) = (1, 3) \quad ή \quad (x_1, y_1) = (1, -3)$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$x + 3y = 10 \quad και \quad x - 3y = 10.$$

Σχόλιο

Η εύρεση της εφαπτομένης ενός κύκλου ανάγεται στην εύρεση του σημείου επαφής $M(x_1, y_1)$.

4. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

i) **Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία**

$$\mathbf{A(5, -1)} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{B(-1, 7)}.$$

ii) **Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(1, 2)$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε) με εξίσωση $4x + 3y + 5 = 0$.**

Λύση

i) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το μέσο της διαμέτρου AB. Δηλαδή, το σημείο

$$K(2, 3).$$

Η ακτίνα του κύκλου (c) είναι

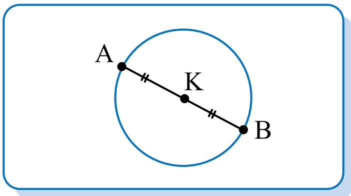
$$\rho = (AK) = \sqrt{(2-5)^2 + (3+1)^2} = 5.$$

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

ή ισοδύναμα

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$



Σημειώσεις

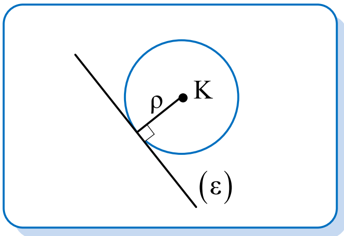
- Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$
- Το μέσο κάθε διαμέτρου ενός κύκλου συμπίπτει με το κέντρο του.

ii) Ο κύκλος (c) εφάπτεται στην ευθεία (ε). Επομένως, η ακτίνα ρ του κύκλου (c) είναι ίση με την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε). Δηλαδή

$$\rho = d(K, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3.$$

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$



Παρατήρηση

Για τον υπολογισμό της ακτίνας του κύκλου αξιοποιούμε τη γνωστή συνθήκη επαφής κύκλου και ευθείας
$$\rho = d(K, \varepsilon).$$

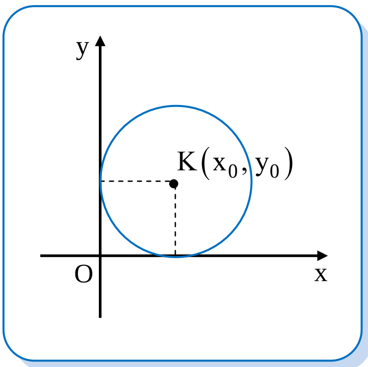
5. **Ένας κύκλος (c) με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho > 0$ εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy.**

i) Να αποδείξετε ότι
$$x_0 = \rho \quad \text{και} \quad y_0 = \rho.$$

ii) Αν ο κύκλος (c) διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$, να βρείτε την εξίσωσή του.

Λύση

i) Ο κύκλος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις
$$d(K, x'x) = \rho \quad \text{με} \quad y_0 > 0.$$
και
$$d(K, y'y) = \rho \quad \text{με} \quad x_0 > 0$$
Ισοδύναμα
$$|y_0| = \rho \quad \text{με} \quad y_0 > 0.$$
και
$$|x_0| = \rho \quad \text{με} \quad x_0 > 0$$
Επομένως,
$$x_0 = \rho \quad \text{και} \quad y_0 = \rho.$$



ii) Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(\rho, \rho)$ όπου ρ η ακτίνα του. Άρα, έχει εξίσωση

$$(x-\rho)^2+(y-\rho)^2=\rho^2.$$

Και επειδή ο κύκλος (c) διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ συμπεραίνουμε ότι

$$(2-\rho)^2+(1-\rho)^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2-6\rho+5=0 \Leftrightarrow \rho=1 \quad \text{ή} \quad \rho=5.$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τους κύκλους με εξισώσεις

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \qquad \text{και} \qquad (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

6. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\mathbf{x^2+y^2-2x-6y+6=0.}$$

i) **Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).**

ii) **Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c).**

iii) **Αν το σημείο $A(\mu, 3)$ με $\mu<0$ ανήκει στον κύκλο (c), τότε:**

α) **να υπολογίσετε την τιμή του μ**

β) **να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) στο σημείο Α.**

Λύση

i) Έχουμε

$$A=-2, \quad B=-6 \quad \text{και} \quad \Gamma=6.$$

Επομένως

$$A^2+B^2-4\Gamma=4+36-24=16>0.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).

ii) Το κέντρου του κύκλου (c) είναι το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή το σημείο $K(1,3)$. Η ακτίνα του κύκλου (c) είναι

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2.$$

Σημείωση

Η εξίσωση

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$A^2+B^2-4\Gamma>0.$$

Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το σημείο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}.$$

iii) α) Το σημείο $A(\mu, 3)$ ανήκει στον κύκλο (c). Επομένως

$$\mu^2 + 3^2 - 2\mu - 6 \cdot 3 + 6 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \mu = -1 \quad \text{ή} \quad \mu = 3.$$

Και επειδή $\mu < 0$ συμπεραίνουμε ότι $\mu = -1$

β) ***α΄ τρόπος:***

Από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία KA. Και επειδή

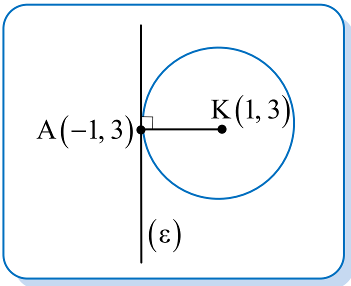
$$KA \,//\, x'x$$

συμπεραίνουμε ότι

$$(\varepsilon) \perp x'x.$$

Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$x = -1.$$



Σημείωση
Η εφαπτομένη ενός κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα του που καταλήγει στο σημείο επαφής.

β΄ τρόπος:

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε). Από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το σημείο M ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM}.$$

Δηλαδή,

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$$\overrightarrow{KA} = (-1-1, 3-3) = (-2, 0)$$

και

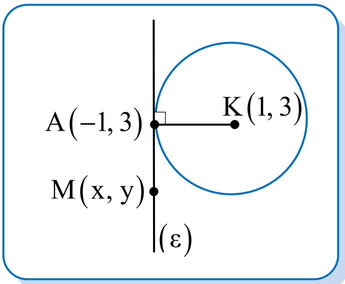
$$\overrightarrow{AM} = (x+1, y-3).$$

Επομένως, η σχέση **(1)** ισοδύναμα γράφεται

$$-2(x+1) + 0 \cdot (y-3) = 0 \Leftrightarrow -2(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$x = -1.$$



Σημείωση
Η εφαπτομένη (ε) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση
$$\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM}.$$

7. **Δίνονται τα σημεία**

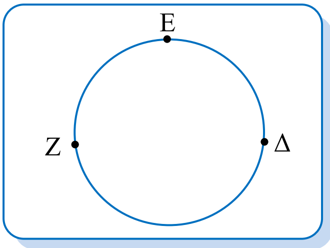
$$\Delta(1,1),\quad E(0,2)\quad \text{και}\quad Z(-1,1).$$

i) **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) ο οποίος διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.**

ii) **Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (c) εφάπτεται στον άξονα $x'x$.**

Λύση

i) **α΄ τρόπος:**



Έστω

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

η ζητούμενη εξίσωση. Τα σημεία Δ, Ε και Ζ ανήκουν στον κύκλο (c). Επομένως, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή του. Δηλαδή,

$$\begin{cases}1^2+1^2+A+B+\Gamma=0\\ 0^2+2^2+0+2B+\Gamma=0\\ (-1)^2+1^2-A+B+\Gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B+\Gamma=-2\\ 2B+\Gamma=-4\\ -A+B+\Gamma=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ B=-2\\ \Gamma=0\end{cases}$$

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$x^2+y^2-2y=0.$$

Σχόλιο

Για να βρούμε την εξίσωση ενός κύκλου, από κάποιες πληροφορίες που έχουμε γι' αυτόν, αποφασίζουμε πρώτα για τη μορφή της ζητούμενης εξίσωσης. Δηλαδή, για το αν θα αναζητήσουμε εξίσωση της μορφής

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

ή εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0.$$

β΄ τρόπος:

Έστω $K(x_0,y_0)$ το κέντρο και $\rho>0$ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου (c). Η εξίσωση του κύκλου (c) είναι

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

Επειδή τα σημεία Δ, Ε και Ζ ανήκουν στον κύκλο (c), οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή του. Δηλαδή,

$$(1-x_0)^2+(1-y_0)^2=\rho^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$(0-x_0)^2+(2-y_0)^2=\rho^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(-1-x_0)^2+(1-y_0)^2=\rho^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις **(1)**, **(2)** και **(3)** βρίσκουμε

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad \rho = 1.$$

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

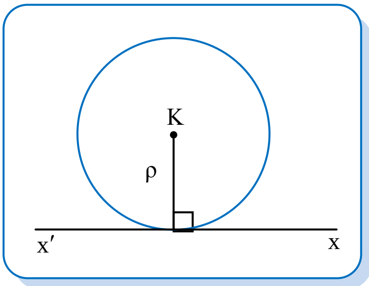
γ΄ τρόπος:

Βρίσκουμε το κέντρο Κ του ζητούμενου κύκλου (c) ως σημείο τομής των μεσοκάθετων ευθειών των τμημάτων ΔΕ και ΔΖ. Στη συνέχεια βρίσκουμε την ακτίνα $\rho = (K\Delta)$ του κύκλου (c).

ii) **α΄ τρόπος:**

Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή το σημείο $K(0,1)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1.$$



Παρατηρούμε ότι

$$d(K, x'x) = |1| = 1 = \rho.$$

Άρα, ο κύκλος (c) εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

β΄ τρόπος:

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων του κύκλου (c) με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις των συστήματος

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{(διπλή ρίζα).}$$

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος (c) και ο άξονας $x'x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το σημείο $O(0,0)$. Άρα, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία, ο κύκλος (c) εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

8. **Ένας κύκλος (c) εφάπτεται στην ευθεία**

$$\varepsilon: x+y-3=0$$

στο σημείο $M(1,2)$ και διέρχεται από το σημείο $N(-1,0)$. Να βρείτε:

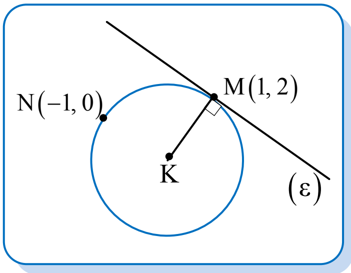
i) **την εξίσωση του κύκλου (c)**

ii) **την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) στο σημείο N**

iii) **τα σημεία τομής Δ και E του κύκλου (c) με τον άξονα $y'y$**

iv) **το εμβαδό του τριγώνου $N\Delta E$.**

Λύση



i) Έστω

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

η ζητούμενη εξίσωση. Τα σημεία

$$M(1,2) \quad \text{και} \quad N(-1,0)$$

ανήκουν στον κύκλο (c) και συνεπώς οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή του. Δηλαδή,

$$1^2+2^2+A+2B+\Gamma=0 \Leftrightarrow A+2B+\Gamma=-5 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$(-1)^2+0^2-A+B\cdot 0+\Gamma=0 \Leftrightarrow -A+\Gamma=-1 \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης, ο κύκλος (c) εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon: x+y-3=0$$

στο σημείο M. Επομένως, ισχύει η σχέση $KM \perp (\varepsilon)$ όπου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ το κέντρο του κύκλου (c). Έχουμε λοιπόν

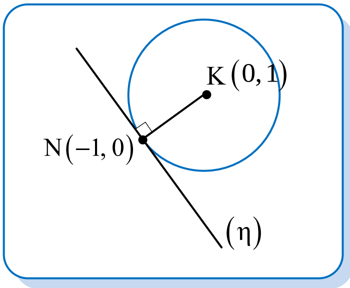
$$\lambda_{KM}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \frac{2+\frac{B}{2}}{1+\frac{A}{2}}\cdot(-1)=-1 \Leftrightarrow 2+\frac{B}{2}=1+\frac{A}{2} \Leftrightarrow B=A-2 \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις **(1),** **(2)** και **(3)** βρίσκουμε $A=0,\ B=-2$ και $\Gamma=-1$.

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$x^2+y^2-2y-1=0.$$

ii) Αναζητούμε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο $N(-1,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία KN όπου $K(0,1)$ το κέντρο του κύκλου (c). Έχουμε λοιπόν



$$\lambda_{KN}\cdot\lambda_{\eta}=-1\Leftrightarrow\frac{0-1}{-1-0}\cdot\lambda_{\eta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\eta}=-1.$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας (η) είναι

$$y-0=-1(x+1)\Leftrightarrow y=-x-1.$$

iii) Οι συντεταγμένες των σημείων τομής του κύκλου (c) με τον άξονα $y'y$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases}x=0\\x^2+y^2-2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y^2-2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

Άρα, τα σημεία τομής του κύκλου (c) με τον άξονα $y'y$ είναι

$$\Delta\left(0,1-\sqrt{2}\right)\quad\text{και}\quad E\left(0,1+\sqrt{2}\right).$$

iv) Έχουμε

$$\overrightarrow{N\Delta}=\left(0-(-1),1-\sqrt{2}-0\right)=\left(1,\ 1-\sqrt{2}\right)$$

και

$$\overrightarrow{NE}=\left(0-(-1),1+\sqrt{2}-0\right)=\left(1,\ 1+\sqrt{2}\right).$$

Επομένως, το εμβαδό του τριγώνου $N\Delta E$ είναι

$$E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{N\Delta},\overrightarrow{NE}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 1-\sqrt{2}\\1 & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\quad\text{τ.μ.}$$

9. **Δίνεται κύκλος (c) ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $M(0,3)$ και $N(1,6)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: y=2x$.**

i) **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c).**

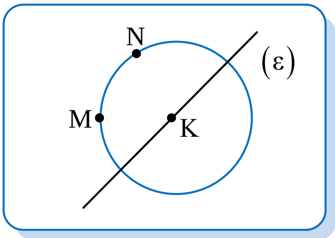
ii) **Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (c).**

iii) **Να βρείτε το σημείο του κύκλου (c) το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$:**

α) **ελάχιστη απόσταση**

β) **μέγιστη απόσταση.**

Λύση



i) Έστω

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

η εξίσωση του κύκλου (c). Ο κύκλος (c) διέρχεται από τα σημεία $M(0,3)$ και $N(1,6)$.

Επομένως, ισχύουν οι σχέσεις

$$0^2+3^2+A\cdot 0+B\cdot 3+\Gamma=0 \Leftrightarrow 3B+\Gamma=-9 \quad \textbf{(1)}$$

και

$$1^2+6^2+A\cdot 1+B\cdot 6+\Gamma=0 \Leftrightarrow A+6B+\Gamma=-37 \quad \textbf{(2)}$$

Επίσης, το κέντρο του κύκλου (c), δηλαδή το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y=2x$.

Επομένως,

$$-\frac{B}{2}=2\cdot\left(-\frac{A}{2}\right) \Leftrightarrow B=2A \quad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις **(1)**, **(2)** και **(3)** βρίσκουμε

$$A=-4,\ B=-8 \ \text{ και } \ \Gamma=15.$$

Άρα, ο κύκλος (c) έχει εξίσωση

$$x^2+y^2-4x-8y+15=0.$$

ii) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή το σημείο $K(2,4)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}.$$

Έχουμε

$$(OK)=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}>\sqrt{5}=\rho.$$

Άρα, το σημείο O είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (c).

Σχόλιο
Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο είναι εξωτερικό κάποιου κύκλου, αρκεί να αποδείξουμε ότι απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση μεγαλύτερη από την ακτίνα του.

iii) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(2,4)$.

Από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία τομής Δ και Ε της διακεντρικής ευθείας ΟΚ με τον κύκλο (c).

Όμως, η ευθεία ΟΚ είναι η δοθείσα ευθεία

$$\varepsilon: y=2x.$$

Άρα, οι συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2-4x-8y+15=0. \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης γράφεται

$$x^2+(2x)^2-4x-8(2x)+15=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-20x+15=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$

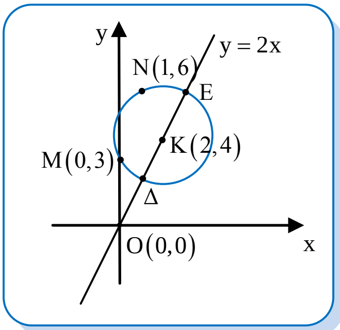
$$\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=3$$

Δηλαδή,

$$(x,y)=(1,2) \quad ή \quad (x,y)=(3,6).$$

Επομένως,

$$\Delta(1,2) \quad και \quad E(3,6).$$



Σημείωση
Τα σημεία του κύκλου που απέχουν από το σημείο Ο ελάχιστη-μέγιστη απόσταση είναι τα σημεία τομής του με την διακεντρική ευθεία ΟΚ.

Παρατηρούμε ότι

$$(O\Delta)=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5} \quad και \quad (OE)=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{40}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

α) το σημείο $\Delta(1,2)$ είναι το σημείο του κύκλου (c) το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ ελάχιστη απόσταση.

β) το σημείο $E(3,5)$ είναι το σημείο του κύκλου (c) το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ μέγιστη απόσταση.

10. **Δύο ίσοι κύκλοι $(c_1),(c_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $A(0,1)$. Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο το σημείο $K(-1,0)$. Να βρείτε:**

i) **την εξίσωση του κύκλου (c_1)**

ii) **την εξίσωση του κύκλου (c_2).**

Λύση

i) Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο το σημείο $K(-1,0)$ και ακτίνα

$$\rho_1=(KA)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Άρα, η εξίσωση του κύκλου (c_1) είναι

$$c_1:(x+1)^2+y^2=2.$$

ii) Έστω $\Lambda(x_0,y_0)$ το κέντρο του κύκλου (c_2). Το σημείο επαφής $A(0,1)$ των δύο κύκλων βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο $K\Lambda$. Και επειδή οι δύο κύκλοι είναι ίσοι συμπεραίνουμε ότι

$$\rho_1=\rho_2 \Leftrightarrow (KA)=(\Lambda A).$$

Δηλαδή, το σημείο Α είναι το μέσο του τμήματος $K\Lambda$.

Οπότε έχουμε

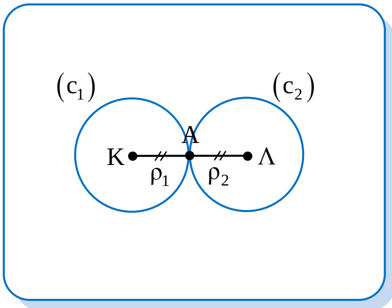
$$\frac{-1+x_0}{2}=0 \quad \text{και} \quad \frac{0+y_0}{2}=1$$

και συνεπώς

$$x_0=1 \quad \text{και} \quad y_0=2.$$

Άρα, ο κύκλος (c_2) έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(1,2)$ ακτίνα $\rho_2=\rho_1=\sqrt{2}$ και εξίσωση

$$c_1:(x-1)^2+(y-2)^2=2.$$



Σημείωση
Δύο κύκλοι είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

Σημείωση
Από την Ευκλείδεια γεωμετρία είναι γνωστό ότι δύο κύκλοι (K,ρ_1) και (Λ,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος $\delta=(K\Lambda)$ είναι ίση με το άθροισμα των δύο ακτίνων. Δηλαδή, αν και μόνο αν

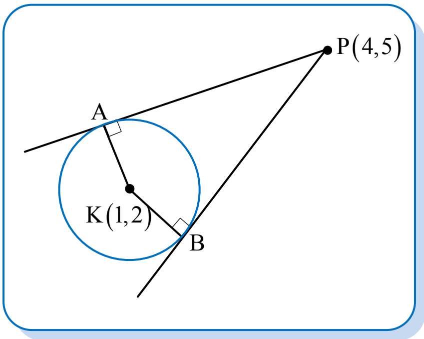
$$\delta=\rho_1+\rho_2.$$

11. **Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου**

$$c:(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

που άγονται από το σημείο $P(4,5)$.

Λύση



Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=3$.

- Αρχικά υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

  Οπότε, η εξίσωσή της είναι
  $y-5=\lambda(x-4)\Leftrightarrow \lambda x-y+5-4\lambda=0$

  Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο (c) αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{aligned} d(K,\varepsilon)=\rho &\Leftrightarrow \frac{|\lambda-2+5-4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=3\\ &\Leftrightarrow |3-3\lambda|=3\sqrt{\lambda^2+1}\\ &\Leftrightarrow |1-\lambda|^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2=\lambda^2+1\\ &\Leftrightarrow 1-2\lambda+\lambda^2=\lambda^2+1\\ &\Leftrightarrow \lambda=0. \end{aligned}$$

  Άρα, η ευθεία $\varepsilon: y=5$ είναι λύση του προβλήματος.

- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η ευθεία που διέρχεται από το σημείο P και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δηλαδή η ευθεία $\zeta: x=4 \Leftrightarrow x-4=0$ αποτελεί λύση του προβλήματος. Έχουμε λοιπόν

$$d(K,\zeta)=\frac{|1-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|-3|=3=\rho.$$

  Επομένως, η ευθεία $\zeta: x=4$ είναι επίσης λύση του προβλήματος.

12. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: y = x+1$ και εφάπτεται στην ευθεία**

$$\eta: y = \frac{1}{2}x$$

στο σημείο $A(4, 2)$.

Λύση

Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου (c). Το σημείο K ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon: y = x+1.$$

Οπότε,

$$y_0 = x_0 + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, η ευθεία (η) εφάπτεται του κύκλου (c) στο σημείο Α. Επομένως,

$$KA \perp (\eta) \Leftrightarrow \lambda_{KA} \cdot \lambda_\eta = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0 - 2}{x_0 - 4} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow y_0 - 2 = -2(x_0 - 4)$$

$$\Leftrightarrow y_0 = -2x_0 + 10 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** έχουμε

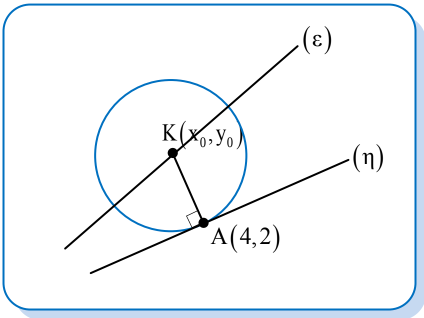
$$\begin{cases} y_0 = x_0 + 1 \\ x_0 + 1 = -2x_0 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 + 1 \\ 3x_0 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Δηλαδή, $K(3,4)$ και συνεπώς

$$\rho = (KA) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5.$$



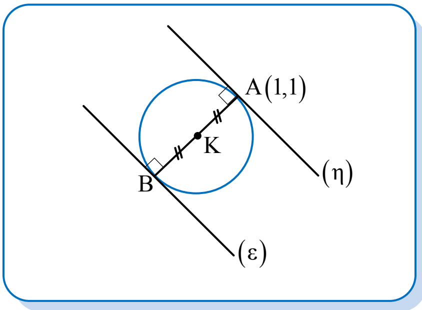
Σχόλιο

Αρκεί να βρούμε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ του ζητούμενου κύκλου. Έχουμε λοιπόν δύο αγνώστους x_0, y_0, οπότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την αξιοποίηση δύο πληροφοριών:

- Το σημείο K είναι σημείο της ευθείας (ε).
- $KA \perp (\eta)$ αφού η ευθεία (η) εφάπτεται στον κύκλο (c) στο σημείο Α.

13. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x+2y+7=0$ και στην ευθεία $\eta: x+2y-3=0$ στο σημείο της $A(1,1)$.**

Λύση



Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = -\frac{1}{2}$$

και συνεπώς $(\varepsilon)//(\eta)$.

Οπότε, αν Β είναι το σημείο επαφής της ευθείας (η) με τον ζητούμενο κύκλο (c), το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου (c). Είναι λοιπόν

$$AB \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 2.$$

Επομένως,

$$AB: y-1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x-1.$$

Οι συντεταγμένες του Β είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2x-1 \\ x+2y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ x+2(2x-1)=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 5x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Άρα, $B(-1,-3)$.

Οπότε, το κέντρο του κύκλου (c), δηλαδή το μέσο της διαμέτρου ΑΒ είναι το σημείο $K\left(\frac{1-1}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$, δηλαδή $K(0,-1)$. Επομένως, η ακτίνα του κύκλου (c) είναι

$$\rho = (KA) = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

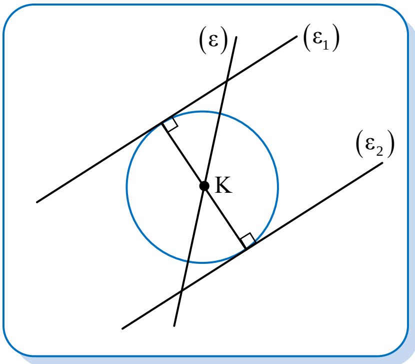
και η εξίσωσή του

$$x^2 + (y+1)^2 = 5.$$

14. **Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) που έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: y = 5x + 1$ και εφάπτεται στις ευθείες**

$$\varepsilon_1 : 4x - 3y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 4x - 3y + 8 = 0.$$

Λύση



Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο και $\rho > 0$ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου (c). Το σημείο K ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = 5x + 1$ και επομένως,

$$y_0 = 5x_0 + 1 \quad \textbf{(1)}$$

Επίσης, ο κύκλος (c) εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) και (ε_2). Οπότε,

$$d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = \rho$$

και συνεπώς

$$\frac{|4x_0 - 3y_0 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4x_0 - 3y_0 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |4x_0 - 3y_0 - 2| = |4x_0 - 3y_0 + 8|$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 - 3y_0 = 2 = \pm(4x_0 - 3y_0 + 8)$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 - 3y_0 - 2 = -4x_0 + 3y_0 - 8$$

$$\Leftrightarrow 8x_0 - 6y_0 = -6$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 - 3y_0 = -3 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** έχουμε

$$\begin{cases} y_0 = 5x_0 + 1 \\ 4x_0 - 3(5x_0 + 1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 5x_0 + 1 \\ -11x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Σχόλιο

Αρχικά βρίσκουμε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ του ζητούμενου κύκλου. Έχουμε λοιπόν δύο αγνώστους οπότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την αλγεβροποίηση δυο γεωμετρικών πληροφοριών:

- Η πρώτη μας λέει ότι το σημείο K ανήκει στην ευθεία (ε)
- Η δεύτερη μας λέει ότι ο κύκλος (c) εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Δηλαδή,

$$K(0,1) \quad \text{και} \quad \rho = d(K, \varepsilon_1) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 1.$$

Άρα,

$$c:\ x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

15. **Δίνεται η γραμμή (c) με εξίσωση**

$$x^2+y^2+4\lambda^2=4\lambda(x+y),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

i) **Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η γραμμή (c) είναι κύκλος. Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου (c);**

ii) **Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία. Ποια είναι η εξίσωση αυτής της ευθείας;**

iii) **Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στον άξονα $x'x$ και στον άξονα $y'y$.**

Λύση

i) Η εξίσωση της γραμμής (c) ισοδύναμα γράφεται

$$x^2+y^2-4\lambda x-4\lambda y+4\lambda^2=0.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$A^2+B^2-4\Gamma>0$$

$$\Leftrightarrow(-4\lambda)^2+(-4\lambda)^2-4\left(4\lambda^2\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 16\lambda^2>0\Leftrightarrow\lambda\in\mathbb{R}^*.$$

Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(2\lambda,2\lambda)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{16\lambda^2}}{2}=2|\lambda|\quad \text{για κάθε}\quad \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

ii) Αποδείξαμε ότι τα κέντρα των κύκλων (c) είναι τα σημεία $K(2\lambda,2\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Θέτοντας $K(x,y)$ έχουμε $x=2\lambda$ και $y-2\lambda$. Παρατηρούμε ότι $y=x$. Άρα, τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση

$$y=x.$$

iii) Έχουμε

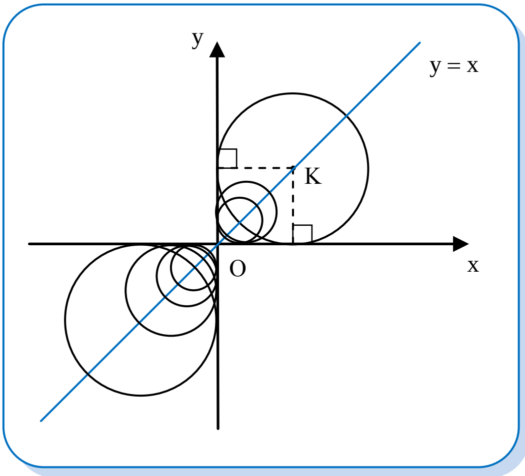
$$d(K, x'x) = |2\lambda| = 2|\lambda| = \rho.$$

Άρα, οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στον άξονα $x'x$.

Επίσης,

$$d(K, y'y) = |2\lambda| = 2|\lambda| = \rho.$$

Άρα, οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται και στο άξονα $y'y$.



16. **Δίνεται η εξίσωση**

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 6\lambda x - 8\lambda y = 0,} \qquad \mathbf{(1)}$$

όπου λ σταθερός μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.
Να αποδείξετε ότι:

i) **η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και να βρείτε ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου αυτού**

ii) **όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο**

iii) **όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) εφάπτονται στην ευθεία**

$$\mathbf{\varepsilon : 3x + 4y = 0.}$$

Λύση

i) Η εξίσωση **(1)** είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

με

$$A = -6\lambda, \quad B = -8\lambda \quad \text{και} \quad \Gamma = 0.$$

Έχουμε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36\lambda^2 + 64\lambda^2 - 0 = 100\lambda^2 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Επομένως, η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή το σημείο $K(3\lambda, 4\lambda)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{100\lambda^2} = \frac{10}{2}\sqrt{\lambda^2} = 5|\lambda|.$$

ii) ● Από την εξίσωση **(1)** για $\lambda = -1$ και $\lambda = 1$ προκύπτουν οι κύκλοι

$$c_1 : x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

και

$$c_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

● Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των (c_1) και (c_2) και βρίσκουμε τα κοινά σημεία των δύο κύκλων. Από τις παραπάνω εξισώσεις, αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$12x + 16y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3x}{4}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου (c_1) έχουμε

$$x^2 + \frac{9x^2}{16} + 6x - 8\frac{3x}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, $x = 0$ και $y = \frac{3 \cdot 0}{4} = 0$, οπότε οι κύκλοι $(c_1), (c_2)$ έχουν κοινό σημείο το $O(0,0)$.

● Διαπιστώνουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν και την εξίσωση **(1)**. Επομένως όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την **(1)** διέρχονται από το ίδιο σημείο $O(0,0)$.

iii) Παρατηρούμε ότι η απόσταση των κέντρων $K(3\lambda, 4\lambda)$ από την ευθεία

$$\varepsilon : 3x + 4y = 0$$

είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|3 \cdot 3\lambda + 4 \cdot 4\lambda|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25|\lambda|}{5} = 5|\lambda| = \rho.$$

Άρα, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την **(1)** εφάπτονται στην ευθεία

$$\varepsilon : 3x + 4y = 0.$$

17. **Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία το τετράγωνο της απόστασής τους από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι διπλάσιο από την απόστασή τους από τον άξονα $x'x$.**

Λύση

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Έχουμε

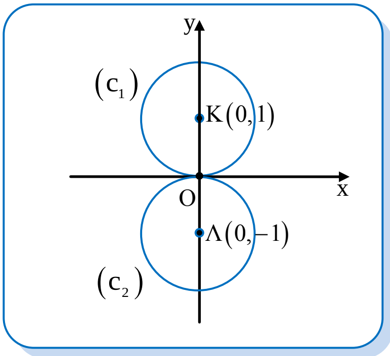
$$(OM)^2 = 2d(M, x'x) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2|y|$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 2|y|$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2y \\ \text{ή} \\ x^2+y^2 = -2y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y+1 = 1 \\ \text{ή} \\ x^2+y^2+2y+1 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 1 \\ \text{ή} \\ x^2+(y+1)^2 = 1. \end{cases}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σύνολο των σημείων των κύκλων

$$c_1: \ x^2+(y-1)^2 = 1$$

και

$$c_2: \ x^2+(y+1)^2 = 1.$$



18. **Δίνεται η εξίσωση**

$$(\lambda x + y)(x - \lambda y) = 2\lambda x + 2y, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) **η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους**

ii) **το σημείο τομής των δύο ευθειών ανήκει σε σταθερό κύκλο (c) για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.**

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}(\lambda x+y)(x-\lambda y)=2(\lambda x+y) &\Leftrightarrow (\lambda x+y)(x-\lambda y)-2(\lambda x+y)=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda x+y)(x-\lambda y-2)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda x+y=0 \quad \text{ή} \quad x-\lambda y-2=0.\end{aligned}$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει τις ευθείες

$$\varepsilon_1: \ \lambda x+y=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x-\lambda y-2=0.$$

Οι ευθείες αυτές είναι κάθετες στα διανύσματα

$$\vec{\delta}_1=(\lambda,1) \quad \text{και} \quad \vec{\delta}_2=(1,-\lambda) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Παρατηρούμε ότι $\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=\lambda-\lambda=0$. Οπότε, $\vec{\delta}_1\perp\vec{\delta}_2$ και συνεπώς $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

ii) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases}\lambda x+y=0\\ x-\lambda y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda x+y=0\\ x-\lambda y=2, \quad \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2-1\neq 0 \quad \text{για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}}{-\lambda^2-1}=\frac{0-2}{-\lambda^2-1}=\frac{2}{\lambda^2+1}.$$

$$y=\frac{Dy}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{-\lambda^2-1}=\frac{2\lambda-0}{-\lambda^2-1}=\frac{-2\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Δηλαδή, για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M\left(\frac{2}{\lambda^2+1},\frac{-2\lambda}{\lambda^2+1}\right)$. Για να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο Μ, θέτουμε $M(x,y)$, οπότε

$$x=\frac{2}{\lambda^2+1} \quad \text{και} \quad y=\frac{-2\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Επομένως, διαιρώντας κατά μέλη (είναι $x \neq 0$) προκύπτει

$$\frac{y}{x} = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{y}{x}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $x = \dfrac{2}{\lambda^2 + 1}$ έχουμε

$$x = \frac{2}{\left(-\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \text{ αφού } x \neq 0$$

Δηλαδή,

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $c:\left(x-1\right)^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το σημείο $K\left(1,0\right)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν διέρχεται από το σημείο $A\left(-2, 1\right)$.

ii) Όταν εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon:\ 4x - 3y + 10 = 0.$$

2. Δίνεται ο κύκλος $\left(c\right)$ με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 100\,.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\left(c\right)$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $\left(\varepsilon\right)$ με εξίσωση

$$8x - 6y + 7 = 0.$$

ii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{25}{2}, 0\right)$.

3. Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και ο κύκλος (c) με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (c).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (c) που άγονται από το σημείο Α.

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon:\ x + \kappa y = 10$ και ο κύκλος $c:\ x^2 + y^2 = \kappa^2 + 1$ όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του κ, την απόσταση του κέντρου του κύκλου (c) από την ευθεία (ε).

ii) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία (ε):

α) εφάπτεται στον κύκλο (c)

β) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο (c).

5. Δίνεται ο κύκλος (c) ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και αποκόπτει από την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y - 5 = 0$ χορδή μήκους $d = 4$.

Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου (c)

ii) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) η οποία ορίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο εμβαδού

$$E = \frac{25}{4} \text{ τ.μ.}$$

6. Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1$$

και το σημείο του $P(x_1, y_1)$ με $x_1 > 0$ και $y_1 > 0$.

i) Να βρείτε τα σημεία Α και Β στα οποία η εφαπτομένη (ε) του κύκλου (c) στο σημείο Ρ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ, όπου $O(0, 0)$, είναι

$$E = \frac{1}{2x_1y_1}$$

iii) Να αποδείξετε ότι $E \geq 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

iv) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) έτσι, ώστε το εμβαδό Ε να είναι ελάχιστο.

7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(5,3)$.

ii) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(7,1)$ και $B(-3,5)$.

8. Ένας κύκλος (c) εφάπτεται στους θετικούς άξονες Ox και Oy.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του συναρτήσει της ακτίνας του ρ.

ii) Αν ο κύκλος (c) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x-y-\sqrt{2}=0$, να βρείτε την εξίσωσή του.

9. Ένας κύκλος (c) με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho>0$ εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon: x+2y-3=0$$

στο σημείο $A(1,1)$.

i) Να αποδείξετε ότι $y_0=2x_0-1$.

ii) Αν ο κύκλος (c) διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την εξίσωσή του.

10. Ένας κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και εφάπτεται στις ευθείες:

$$\varepsilon: -x+y-1=0 \quad \text{και} \quad n: x-y-7=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $x_0-y_0=3$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c), αν είναι γνωστό ότι αυτός διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$ και το κέντρο του έχει θετική τετμημένη.

11. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (η), με εξισώσεις

$$3x-4y-1=0 \quad \text{και} \quad 3x-4y-31=0$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας (ζ) των παραπάνω ευθειών

ii) το σημείο τομής K της ευθείας (ζ) με την ευθεία $y=-1$

iii) την απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε)

iv) την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο το σημείο K και αποκόπτει από την ευθεία (ε) χορδή μήκους 8 μονάδων.

12. Δίνεται ο κύκλος

$$c_1 : (x-7)^2 + (y-3)^2 = 20.$$

i) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ_1 του κύκλου (c_1).

ii) Ένας κύκλος (c_2) έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(x_0, y_0)$ και εφάπτεται στον κύκλο (c_1) στο σημείο του $A(3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$x_0 - 2y_0 = 1.$$

β) Αν ο κύκλος (c_2) διέρχεται από το σημείο $B(0,2)$, να βρείτε τους x_0, y_0 και την εξίσωση του κύκλου (c_2).

13. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων (c_1) και (c_2) όταν:

i) $c_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $c_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$

ii) $c_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ και $c_2 : (x-4)^2 + (y-6)^2 = 1.$

14. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων (c_1) και (c_2) όταν:

i) $c_1 : x^2 + (y+1)^2 = 9$ και $c_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1$

ii) $c_1 : x^2 + y^2 = 36$ και $c_2 : (x-5)^2 + y^2 = 1.$

15. Δίνεται ο κύκλος (c_1) ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(4, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $M(6,1)$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου (c_1)

ii) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (c_1) στο σημείο M

iii) την εξίσωση του κύκλου (c_2) ο οποίος είναι ομόκεντρος του κύκλου (c_1) και αποκόπτει από την ευθεία (ε) χορδή AB μήκους $(AB) = 4$.

16. Δίνεται ο κύκλος (c_1) με εξίσωση

$$(x-7)^2 + y^2 = 4.$$

Να βρείτε:

i) το σημείο A του κύκλου (c_1) το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων O ελάχιστη απόσταση

ii) την εξίσωση του κύκλου (c_2) ο οποίος εφάπτεται του κύκλου (c_1) στο σημείο A και διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$.

17. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$, έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

18. Ένα σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: 5x - 12y + 23 = 0$ και ένα σημείο Ν βρίσκεται στον κύκλο

$$c: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

i) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου (c).

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης (ΜΝ).

19. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1: x^2 + y^2 = 4 \quad \text{και} \quad c_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) βρίσκονται ο καθένας εξωτερικά του άλλου.

ii) Αν ένα σημείο Μ βρίσκεται στον κύκλο (c_1) και ένα σημείο Ν βρίσκεται στον κύκλο (c_2), να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της απόστασης (MN).

20. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x - 3$ και ο κύκλος

$$c: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8.$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου (c) και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)

ii) το σημείο Α του κύκλου (c) το οποίο απέχει από την ευθεία (ε) τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

21. Δίνεται σημείο $M(x_0, y_0)$ με $y_0 \neq x_0$ και έστω Ν το συμμετρικό του σημείο ως προς την ευθεία $\varepsilon: y = x$.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΜΝ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι $E = \frac{1}{2}\left|x_0^2 - y_0^2\right|$.

ii) Αν το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $c: (x-2)^2 + y^2 = 1$ να αποδείξετε ότι:

α) $E = x_0^2 - 2x_0 + \frac{3}{2}$ **β)** υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $E = 1$.

22. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι εξίσωση κύκλου. Ποιο είναι το κέντρο και ποια είναι η ακτίνα του κάθε κύκλου;

i) $x^2+y^2-2x-4y-9=0$ **ii)** $x^2+y^2-6x+5=0$

iii) $4x^2+4y^2+8y+3=0$ **iv)** $x^2+y^2-2\lambda x+4\lambda y-5=0$.

23. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου (c).

ii) Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου (c);

iii) Να βρείτε το σημείο τομής Α του κύκλου (c) με τον θετικό ημιάξονα Οx.

iv) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου του Α στον κύκλο (c).

24. Δίνεται το σημείο $A(7,7)$ το οποίο ανήκει στον κύκλο (c) με εξίσωση

$$x^2+y^2-4\alpha x-3\alpha y=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

ii) Να βρείτε το αντιδιαμετρικό του σημείου Α.

25. Ένας κύκλος (c) διέρχεται από τα σημεία

$$A(-2,0),\quad B(1,-1)\quad \text{και}\quad \Gamma(6,4).$$

Να βρείτε:

i) την εξίσωση του κύκλου (c)

ii) το αντιδιαμετρικό A' του σημείου Α

iii) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) στο σημείο του A'.

26. Δίνεται ο κύκλος (c) ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(5,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία

$$\varepsilon: y=x-2\ .$$

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c).

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3$ εφάπτεται στον κύκλο (c). Ποιο είναι το σημείο επαφής;

27. Δίνεται ο κύκλος (c) ο οποίος έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$ και εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$$

στο σημείο $A(0,1)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c).

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του θετικού αριθμού μ έτσι, ώστε το σημείο $B(\mu - 3, \mu)$ να είναι σημείο του κύκλου (c).

28. Ένας κύκλος (c) διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(2,3)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία

$$\varepsilon: y = 3x.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c).

ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (c) εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η ευθεία $\eta: y = \lambda x$ να εφάπτεται στον κύκλο (c).

29. Δίνεται το σημείο $M(5,0)$ και ο κύκλος (c) με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0\,.$$

i) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου (c).

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (c).

iii) Από το σημείο Μ φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες στον κύκλο (c) και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΜΑ και ΜΒ.

iv) Να αποδείξετε ότι το ΚΑΜΒ είναι τετράγωνο.

30. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,0)$.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(MA)^2 + (MB)^2 = 16.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία (η) με εξίσωση

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0.$$

iii) Ποιο από τα σημεία Μ του ερωτήματος **i)** βρίσκεται πιο κοντά στην ευθεία (η);

31. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,1),\quad B(-3,-1)\ \text{και}\ \Gamma(2,0).$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=22.$$

32. Δίνονται τα σημεία

$$P(-2,4)\quad \text{και}\quad Q(1,-2).$$

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία P και Q ισούται με 2, είναι κύκλος ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του παραπάνω κύκλου στο σημείο $O(0,0)$.

33. Δίνεται το σημείο $P(1,0)$ και η ευθεία

$$\varepsilon: x-2=0.$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(PM)^2=2d(M,\varepsilon).$$

34. Δίνεται ο κύκλος (c_1) με εξίσωση

$$x^2+y^2=1$$

και δύο αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β.

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$$

είναι κύκλος (c_2) ομόκεντρος με τον κύκλο (c_1).

ii) Να παραστήσετε γραφικά το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ για τα οποία ισχύει

$$1<\sqrt{x^2+y^2}<2.$$

35. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \ x+y-4=0$ και ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ τέτοιο, ώστε

$$x_0^2+y_0^2-4x_0-4y_0 \neq 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η προβολή Α του σημείου Μ πάνω στην ευθεία (ε) έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{x_0-y_0+4}{2}, \ \frac{y_0-x_0+4}{2}\right).$$

ii) Αν Β και Γ είναι οι προβολές του σημείου Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά.

iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία το εμβαδό του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $E=2$.

iv) Να βρείτε ποιο από τα σημεία του γεωμετρικού τόπου που βρήκατε στο ερώτημα **iii)** απέχει ελάχιστη και ποιο απέχει μέγιστη απόσταση από το σημείο $\Delta(7,2)$.

36. Δίνονται ο κύκλος (c_1) με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{5}$ και ο κύκλος (c_2) με εξίσωση

$$x^2+y^2-6x-12y+25=0.$$

i) Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ_2 του κύκλου (c_2).

ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) εφάπτονται εξωτερικά.

iii) Αν Α είναι το σημείο επαφής των κύκλων (c_1) και (c_2), τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OK}=3\overrightarrow{OA}$.

β) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

37. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-6y+5=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c).

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(\mu, 1-\mu)$ ανήκει στον κύκλο (c).

iv) Για $\mu=-2$, να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου (c) στο σημείο Α.

38. Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 .$$

Να βρείτε:

i) το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου (c)

ii) την εξίσωση της ευθείας OK, όπου O η αρχή των αξόνων

iii) τα σημεία A και B του κύκλου (c) τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων ελάχιστη και μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

39. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \lambda - 2 = 0$$

όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).

ii) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου (c).

iii) Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 1$ εφάπτεται στον κύκλο (c), τότε:

α) να αποδείξετε ότι

$$\lambda^2 = 4\lambda + 4\mu - 4$$

β) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) έτσι, ώστε το κέντρο του να βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

40. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* .$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$

ii) τα κέντρα των κύκλων (c_λ) είναι συνευθειακά σημεία

iii) όλοι οι κύκλοι (c_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο A

iv) όλοι οι κύκλοι (c_λ) εφάπτονται στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

41. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+\lambda x+y=1-\lambda\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή του λ για την οποία ο παραπάνω κύκλος:

α) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

42. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x+6\lambda y+\left(9\lambda^2-1\right)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία.

iii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση **(1)** και εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon: 4x+3y-15=0.$$

43. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x+\left(4-2\lambda\right)y=0 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παραπάνω κύκλων.

iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των παραπάνω κύκλων.

44. Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2+y^2-2\lambda x=0 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$x^2+y^2-8\lambda x+12\lambda^2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

με $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παραπάνω κύκλων.

iii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** και οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση **(2)** εφάπτονται εξωτερικά για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

iv) Να βρείτε το σημείο επαφής Μ των παραπάνω κύκλων και την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο σημείο αυτό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

45. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6\lambda x - 4y + 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(1)}$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ενώ για $\lambda = 0$ παριστάνει ένα μόνο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

α) τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε σταθερή ευθεία.

β) όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ) όλοι οι κύκλοι εφάπτονται στον άξονα $y'y$.

46. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2(\text{συν}\theta + 1)x - 2(\text{ημ}\theta)y + (2\text{συν}\theta + 1) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_θ) για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$

ii) τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν επίσης σε κύκλο

iii) όλοι οι κύκλοι (c_θ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

47. Δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ διαφορετικά μεταξύ τους και οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ τέτοιοι, ώστε

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma \quad \text{και} \quad x_2^2 + y_2^2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma > 0$

ii) $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le \alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma.$

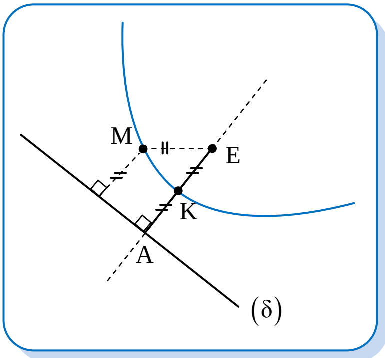
Η Παραβολή

Ορισμός (παραβολής)

Έστω μια ευθεία (δ) και ένα σημείο Ε εκτός της (δ). Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία (δ) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το σημείο Ε και την ευθεία (δ).
Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$(\mathrm{ME})=d(\mathrm{M},\delta).$$

- Αν Α είναι η προβολή της εστίας Ε στη διευθετούσα (δ), τότε το μέσο Κ του ΕΑ είναι, με βάση τον ορισμό, σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.
- Η κάθετη ευθεία από την εστία Ε προς τη διευθετούσα δ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.



Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, η οποία έχει εστία το σημείο $\mathrm{E}(0,1)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: y+1=0$.

Λύση

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής. Έχουμε

$$(\mathrm{ME})=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \quad \text{και} \quad d(\mathrm{M},\delta)=\frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=|y+1|.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής έχουμε

$$(\mathrm{ME})=d(\mathrm{M},\delta) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$$

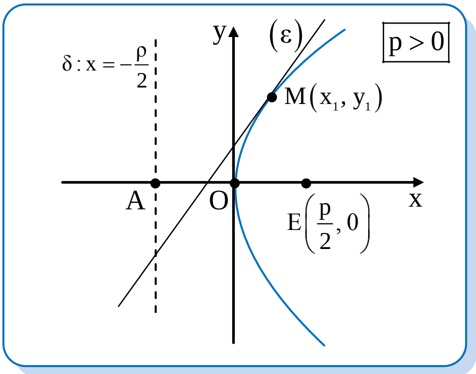
$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1$$

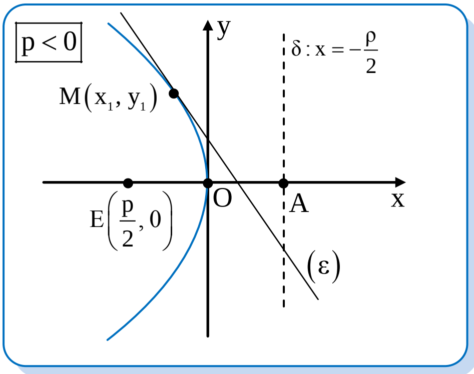
$$\Leftrightarrow x^2=4y \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2.$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής είναι

$$x^2=4y \quad \text{ή} \quad y=\frac{1}{4}x^2.$$

Παραβολή με Κορυφή Ο(0,0) και Άξονα τον x΄x





- Η παραβολή έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : x = -\frac{p}{2}$.
- Ο αριθμός $p \neq 0$ λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση (EA) της εστίας από τη διευθετουσα.
- Η **εξίσωση** της παραβολής είναι $\mathbf{y^2 = 2px}$.

Παράδειγμα

Η παραβολή με εστία το σημείο $E(3,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : x = -3$ έχει παράμετρο p τέτοια, ώστε $\frac{p}{2} = 3$, δηλαδή $p = 6$. Οπότε, έχει εξίσωση $y^2 = 2px$, δηλαδή $y^2 = 12x$.

Παράδειγμα

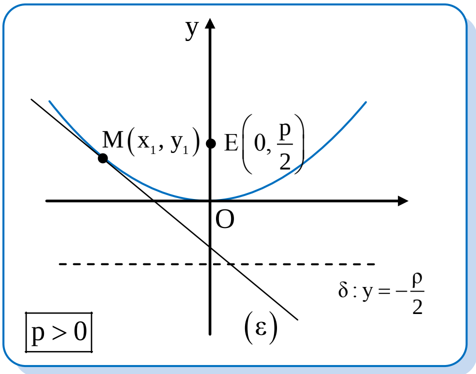
Η εξίσωση $y^2 = -8x$ παριστάνει παραβολή με παράμετρο p τέτοια, ώστε $2p = -8$, δηλαδή $p = -4$ Οπότε, έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, δηλαδή $E(-2, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή $x = 2$.

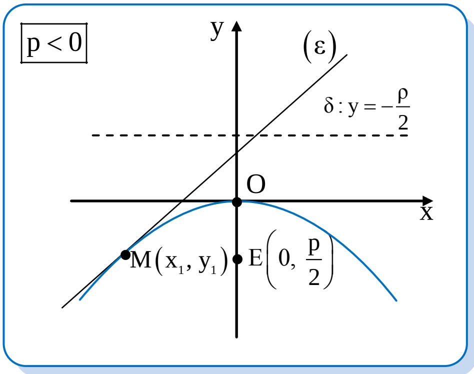
- Τα p και x (με $x \neq 0$) είναι **ομόσημα**.
- Η **εφαπτομένη** της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\mathbf{yy_1 = p(x + x_1)}$.

Παράδειγμα

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 8x$ στο σημείο της $M(2,4)$ έχει εξίσωση $y \cdot 4 = 4(x+2)$, δηλαδή $y = x + 2$.

Παραβολή με Κορυφή Ο(0,0) και Άξονα τον y΄y





- Η παραβολή έχει εστία το σημείο $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : y = \frac{p}{2}$.
- Ο αριθμός $p \neq 0$ λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση (ΕΑ) της εστίας από τη διευθετούσα.
- Η **εξίσωση** της παραβολής είναι $\mathbf{x^2 = 2py}$.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $x^2 = 12y$ παριστάνει παραβολή με παράμετρο p για την οποία ισχύει $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$. Επομένως, έχει εστία το σημείο $E(0,3)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : y = -3$.

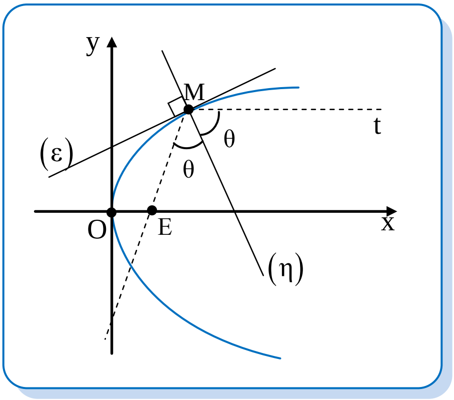
- Τα p και y (με $y \neq 0$) είναι **ομόσημα**.
- Η **εφαπτομένη** της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\mathbf{xx_1 = p(y + y_1)}$.

Ιδιότητες παραβολής

- Κάθε παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα της (δ) με την εστία της Ε.

- **(Ανακλαστική ιδιότητα)**

  Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής σε οποιοδήποτε σημείο της Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ΜΕ και η ημιευθεία Mt που είναι ομόρροπη της ΟΕ, όπου Ε είναι η εστία και Ο η κορυφή της παραβολής.



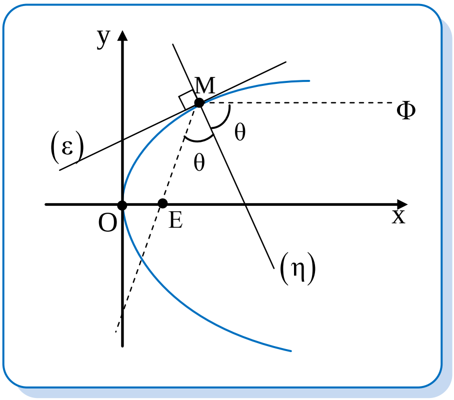
Παράδειγμα

Έστω η παραβολή (c) με εξίσωση $y^2 = 4x$. Μία φωτεινή ακτίνα $\Phi M // x'x$ προσπίπτει στο σημείο $M\left(2, 2\sqrt{2}\right)$ της παραβολής και ανακλώμενη διέρχεται από την εστεία της $E(1,0)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διχοτομεί τη γωνία $\Phi\widehat{M}E$.

Λύση

Με βάση την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, η ευθεία (η) είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $M\left(2, 2\sqrt{2}\right)$. Έχουμε

$$\varepsilon: \; y \cdot 2\sqrt{2} = 2(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}.$$



Όμως

$$\eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = -\sqrt{2}.$$

Επομένως,

$$\eta: y - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

19. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (c) η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστία το σημείο $E(2, 0)$.

ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία (δ) με εξίσωση $x = -3$.

iii) Όταν έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Λύση

i) Έστω $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ η εστία της παραβολής (c).

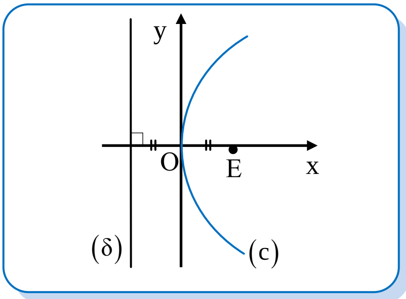
Έχουμε

$$\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

δηλαδή $$y^2 = 8x.$$



ii) Έστω $\delta : x = -\frac{p}{2}$ η διευθετούσα της παραβολής (c). Έχουμε

$$-\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = 6.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

δηλαδή $$y^2 = 12x.$$

iii) Η παραβολή (c) έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$. Και επειδή η (c) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ συμπεραίνουμε ότι $2^2 = 2p(-1) \Leftrightarrow p = -2$. Άρα, η παραβολή (c) έχει εξίσωση $y^2 = -4x$.

Σημείωση

Η παραβολή (c) με εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta : x = -\frac{p}{2}$. Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι $y^2 = 2px$. Ο αριθμός p λέγεται παράμετρος της παραβολής.

20. **Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής (c) με εξίσωση:**

i) $y^2 = 10x$ **ii)** $y^2 = -12x$

iii) $x^2 = 4y$ **iv)** $x^2 = -16y$.

Λύση

i) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής

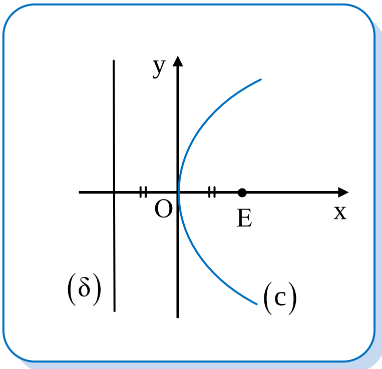
$$y^2 = 2px.$$

Έχουμε λοιπόν

$$2p = 10 \Leftrightarrow p = 5.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = -\frac{5}{2}.$$



Σημείωση

Η εξίσωση

$$y^2 = 2px, \; p \neq 0$$

παριστάνει παραβολή με εστία το σημείο

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = -\frac{p}{2}.$$

ii) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής

$$y^2 = 2px.$$

Έχουμε λοιπόν

$$2p = -12 \Leftrightarrow p = -6.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(-3, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = 3.$$

iii) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής

$$x^2 = 2py.$$

Έχουμε λοιπόν

$$2p = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(0,1)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : y = -1.$$

iv) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής

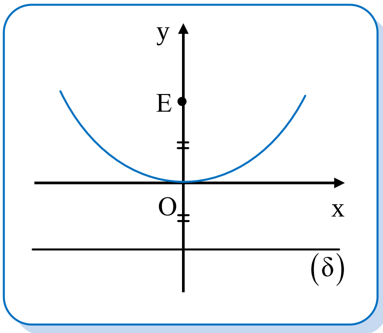
$$x^2 = 2py.$$

Έχουμε λοιπόν

$$2p = -16 \Leftrightarrow p = -8.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(0,-4)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : y = 4.$$



Σημείωση

Η εξίσωση

$$x^2 = 2py,\ p \neq 0$$

παριστάνει παραβολή με εστία το σημείο

$$E\left(0, \frac{p}{2}\right)$$

και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : y = -\frac{p}{2}.$$

21. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$y^2 = 8x.$$

i) **Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής (c).**

ii) **Να αποδείξετε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_1, y_1)$ της παραβολής (c) από την εστία της E είναι**

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

iii) **Να αποδείξετε ότι η κορυφή της παραβολής (c) είναι το πλησιέστερο προς την εστία σημείο της.**

Λύση

i) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Έχουμε λοιπόν

$$2p = 8 \Leftrightarrow p = 4.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(2, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = -2.$$

ii) **α΄ τρόπος:**

Έχουμε

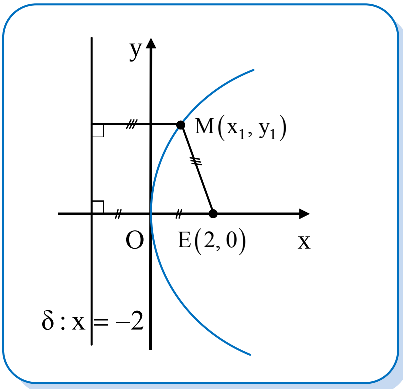
$$(ME) = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2}.$$

Όμως, το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής (c). Άρα, οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της (c). Δηλαδή, ισχύει

$$y_1^2 = 8x_1.$$

Επομένως,

$$(ME) = \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + 8x_1} = \sqrt{x_1^2 + 4x_1 + 4} = \sqrt{(x_1 + 2)^2} = |x_1 + 2|.$$



Σχόλιο

Την πληροφορία ότι το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c) μπορούμε να την αξιοποιήσουμε με δύο τρόπους:

- Να απαιτήσουμε οι συντεταγμένες του σημείου Μ να επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.
- Να παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, το σημείο Μ ισαπέχει από την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ).

β΄ τρόπος:

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής έχουμε

$$(ME) = d(M, \delta)$$

Όμως,

$$M(x_1, y_1)$$

και

$$\delta : x = -2 \Leftrightarrow x + 2 = 0.$$

Επομένως,

$$d(M, \delta) = \frac{|x_1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x_1 + 2|.$$

Δηλαδή,

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

iii) Έχουμε

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

Όμως,

$$y_1^2 = 8x_1$$

και συνεπώς

$$x_1 = \frac{y_1^2}{8} \geq 0.$$

Επομένως,

$$(ME) = |x_1 + 2| = \left|\frac{y_1^2}{8} + 2\right| = \frac{y_1^2}{8} + 2 \geq 2.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$y_1 = 0 \text{ και } x_1 = 0.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της απόστασης (ME) είναι ίση με 2 και επιτυγχάνεται όταν οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $(0, 0)$. Δηλαδή, όταν το σημείο Μ συμπέσει με την κορυφή $O(0, 0)$ της παραβολής (c).

22. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$y^2 = 2x$$

και δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

i) **Να αποδείξετε ότι**

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2}.$$

ii) **Αν είναι**

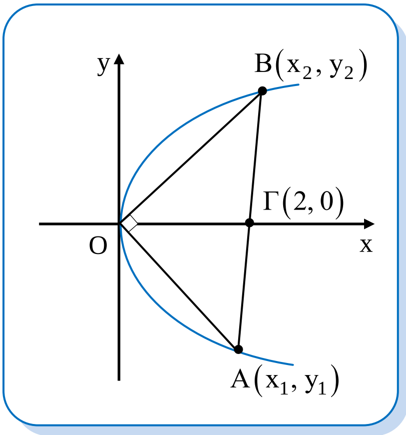
$$y_1 y_2 \neq 0 \text{ και } A\widehat{O}B = 90°,$$

όπου Ο η κορυφή της παραβολής, να αποδείξετε ότι:

α) $y_1 y_2 = -4$

β) **τα σημεία Α, Β και $\Gamma(2, 0)$ είναι συνευθειακά.**

Λύση



i) Τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ανήκουν στην παραβολή (c). Άρα, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις

$$y_1^2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{2}$$

και

$$y_2^2 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{2}.$$

ii) **α)** Έχουμε

$$A\widehat{O}B = 90°.$$

Δηλαδή,

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

ή ισοδύναμα

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2).$$

Άρα, η σχέση **(1)** ισοδύναμα γράφεται

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{2} \cdot \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 = 0, \quad \text{λόγω του ερωτήματος } \textbf{i)}$$

$$\Leftrightarrow y_1y_2 \cdot (y_1y_2 + 4) = 0.$$

Και επειδή

$$y_1y_2 \neq 0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$y_1y_2 + 4 = 0$$

και τελικά

$$y_1y_2 = -4.$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (2 - x_1, -y_1).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 2 - x_1 & -y_1 \end{vmatrix} \\ &= -y_1(x_2 - x_1) - (2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &= -x_2y_1 + x_1y_1 - 2y_2 + 2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Όμως,

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2} \qquad \text{και} \qquad x_2 = \frac{y_2^2}{2}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) &= \frac{y_1^2}{2}y_2 - \frac{y_2^2}{2}y_1 + 2y_1 - 2y_2 \\ &= \frac{y_1y_2}{2}(y_1 - y_2) + 2(y_1 - y_2) \\ &= \left(\frac{y_1y_2}{2} + 2\right)(y_1 - y_2) \overset{\alpha)}{=} \left(\frac{-4}{2} + 2\right)(y_1 - y_2) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$$

και συνεπώς τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

23. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$\mathbf{y^2 = 4x}$$

και τα σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια, ώστε το σημείο $M(5, 2)$ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) **Να αποδείξετε ότι:**

α) $x_1 = \dfrac{y_1^2}{4}$ **και** $x_2 = \dfrac{y_2^2}{4}$

β) $y_1^2 + y_2^2 = 40$ **και** $y_1 + y_2 = 4.$

ii) **Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.**

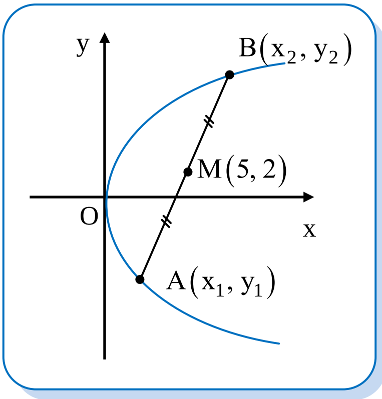
Λύση

i) **α)** Τα σημεία Α και Β ανήκουν στην παραβολή (c). Άρα, οι συντεταγμένες τους οφείλουν να επαληθεύουν την εξίσωση της (c). Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις

$$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{4}$$

και

$$y_2^2 = 4x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{4}.$$



β) Το σημείο $M(5,2)$ είναι μέσο του ΑΒ. Επομένως,

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 5 \qquad \text{και} \qquad \frac{y_1+y_2}{2} = 2$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} = 10 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4.$$

Τελικά

$$y_1^2 + y_2^2 = 40 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$y_1^2 + y_2^2 = 40 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4.$$

Έχουμε λοιπόν

$$(y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2 = 40 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4$$

δηλαδή

$$4^2 - 2y_1y_2 = 40 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4$$

ή ισοδύναμα

$$y_1y_2 = -12 \qquad \text{και} \qquad y_1 + y_2 = 4.$$

Επομένως, οι αριθμοί y_1, y_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$y^2 - 4y - 12 = 0.$$

Πρόκειται για εξίσωση β΄ βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-12) = 64\,.$$

Επομένως,

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2}\,.$$

Και επειδή

$$y_1 < y_2\,,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$y_1 = -2 \quad \text{και} \quad y_2 = 6.$$

Επίσης

$$x_1 = \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{y_2^2}{4} = 9.$$

Άρα, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $(1, -2)$ και $(9, 6)$ αντίστοιχα.

Σημείωση

Για να βρούμε δύο αριθμούς οι οποίοι έχουν άθροισμα S και γινόμενο P αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$x^2 - Sx + P = 0\,.$$

24. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$\mathbf{y^2 = 24x.}$$

i) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c).

ii) Αν ένα σημείο Α ανήκει στην παραβολή (c), να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΑ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

Λύση

i) Η παραβολή (c) έχει εξίσωση της μορφής

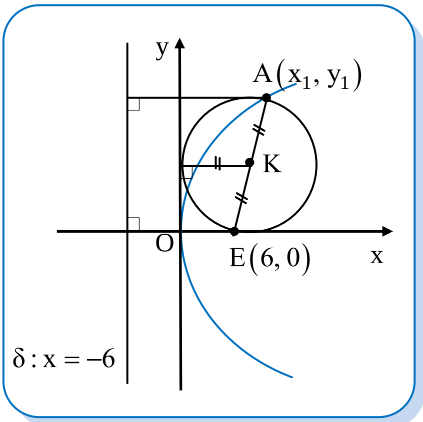
$$y^2 = 2px.$$

Έχουμε λοιπόν

$$2p = 24 \Leftrightarrow p = 12.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(6, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = -6.$$



ii) Έστω $A(x_1, y_1)$. Ο κύκλος με διάμετρο ΕΑ έχει κέντρο το μέσο του ΕΑ, δηλαδή το σημείο $K\left(\frac{x_1+6}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$, και ακτίνα

$$\rho = \frac{1}{2}(AE) = \frac{1}{2}d(A, \delta)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|x_1+6|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1}{2}|x_1+6|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$d(K, y'y) = \left|\frac{x_1+6}{2}\right| = \frac{1}{2}|x_1+6| = \rho.$$

Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο ΕΑ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

Παρατήρηση

Για τον υπολογισμό του (AE), αξιοποιούμε τον ορισμό της παραβολής. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$(AE) = d(A, \delta).$$

25. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

και δύο σημεία της Α και Β τέτοια, ώστε η εστία Ε της παραβολής να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) **αν A' και B' είναι οι προβολές των σημείων Α και Β αντίστοιχα πάνω στη διευθετούσα (δ) της παραβολής, τότε ισχύει η σχέση**

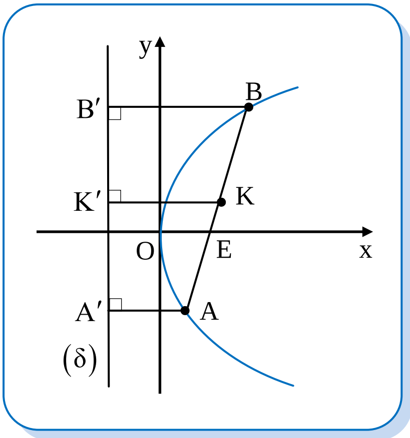
$$(AA') + (BB') = (AB)$$

ii) **αν Κ είναι το μέσο του ΑΒ και K' είναι η προβολή του Κ πάνω στη διευθετούσα (δ), τότε ισχύει η σχέση**

$$(KK') = \frac{1}{2}(AB)$$

iii) **ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ εφάπτεται στη διευθετούσα (δ) της παραβολής.**

Λύση



i) Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής έχουμε

$$d(A,\delta)=(AE)$$

και

$$d(B,\delta)=(BE).$$

Δηλαδή

$$(AA')=(AE)$$

και

$$(BB')=(BE).$$

Επομένως

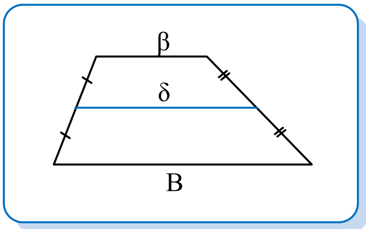
$$(AA')+(BB')=(AE)+(BE).$$

Και επειδή η εστία Ε ανήκει στο τμήμα ΑΒ συμπεραίνουμε ότι

$$(AE)+(BE)=(AB)$$

και τελικά

$$(AA')+(BB')=(AB).$$



ii) Παρατηρούμε ότι το τμήμα KK' είναι η διάμεσος του τραπεζίου $AA'B'B$. Άρα, ισχύει η σχέση

$$(KK')=\frac{(AA')+(BB')}{2}.$$

Όμως στο ερώτημα **i)** αποδείξαμε ότι

$$(AA')+(BB')=(AB).$$

Άρα

$$(KK')=\frac{(AB)}{2}=\frac{1}{2}(AB).$$

Σημείωση

Από την Ευκλείδεια γεωμετρία είναι γνωστό ότι η διάμεσος δ ενός τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο βάσεών του. Δηλαδή

$$\delta=\frac{B+\beta}{2}.$$

iii) Αποδείξαμε ότι

$$(KK')=\frac{1}{2}(AB).$$

Δηλαδή, ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου με διάμετρο ΑΒ από την ευθεία (δ) είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ εφάπτεται στη διευθετούσα (δ) της παραβολής.

26. **Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση**

$$\mathbf{y^2 = 2x.}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (c) όταν:

i) **είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{x - 2y + 5 = 0.}$$

ii) **διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$.**

Λύση

i) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (ζ). Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι

$$yy_1 = x + x_1.$$

Όμως,

$$\zeta // \varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c). Επομένως,

$$y_1^2 = 2x_1 \qquad \textbf{(2)}$$

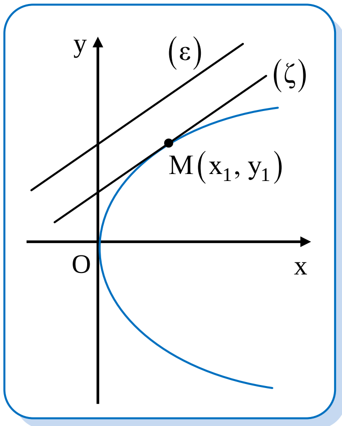
Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (2, 2).$$

Άρα, η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$$2y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0.$$



Σχόλιο

Η εφαπτομένη της παραβολής

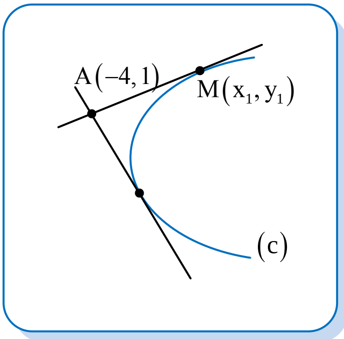
$$y^2 = 2px$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Για να βρούμε λοιπόν την εξίσωση της εφαπτομένης μιας παραβολής, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

ii) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (η). Η εξίσωση της ευθείας (η) είναι



$$yy_1 = x + x_1.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-4,1)$.

Επομένως, ισχύει η σχέση

$$y_1 = -4 + x_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c). Άρα, ισχύει η σχέση

$$y_1^2 = 2x_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Η σχέση **(2)** λόγω της σχέσης **(1)** γράφεται

$$(-4 + x_1)^2 = 2x_1 \Leftrightarrow 16 + x_1^2 - 8x_1 = 2x_1$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 - 10x_1 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad \text{ή} \quad x_1 = 8.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (2, -2) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (8, 4).$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$y \cdot (-2) = x + 2 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$$

και

$$y \cdot 4 = x + 8 \Leftrightarrow x - 4y + 8 = 0.$$

27. **Δίνεται η παραβολή (c) η οποία έχει εστία το σημείο $E(0,1)$ και διευθετούσα την ευθεία (δ) με εξίσωση**

$$\mathbf{y = -1.}$$

i) **Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (c).**

ii) **Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση**

$$\mathbf{y = x - 1}$$

εφάπτεται στην παραβολή (c).

Λύση

i) Αν p είναι η παράμετρος της παραβολής, τότε έχουμε

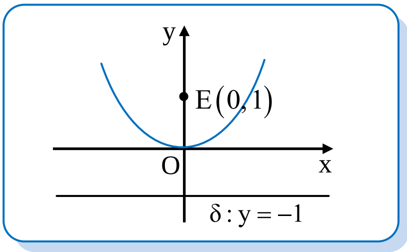
$$\frac{p}{2}=1 \Leftrightarrow p=2.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εξίσωση

$$x^2=2py$$

δηλαδή,

$$x^2=4y.$$



Σημείωση

Η εστία είναι της μορφής $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και η διευθετούσα $\delta: y=-\frac{p}{2}$. Άρα, η εξίσωση της παραβολής είναι $x^2=2py$.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $M(x_1, y_1)$ της παραβολής (c) στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία

$$xx_1=2(y+y_1) \Leftrightarrow y=\frac{x_1}{2}x-y_1$$

συμπίπτει με την ευθεία

$$y=x-1.$$

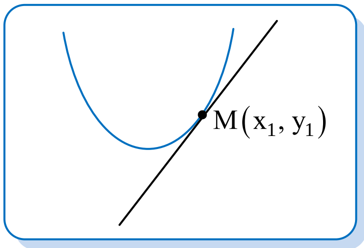
Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{x_1}{2}=1 \quad \text{και} \quad -y_1=-1.$$

Όμως, κάτι τέτοιο είναι φανερό ότι ισχύει για

$$x_1=2 \quad \text{και} \quad y_1=1.$$

Επομένως, η ευθεία (ε) εφάπτεται στην παραβολή (c) στο σημείο $M(2,1)$.



Σχόλιο

Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται στην παραβολή (c) αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $M(x_1, y_1)$ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία συμπίπτει με την (ε).

Προτεινόμενες Ασκήσεις

48. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστία το σημείο $E(-3, 0)$.

ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία (δ) με εξίσωση $x = -1$.

iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$.

49. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

i) $y^2 = 16x$ **ii)** $y^2 = -6x$

iii) $x^2 = 20y$ **iv)** $y = -\frac{1}{2}x^2$.

50. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x = 2p.$$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία A και B.

ii) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου p έτσι, ώστε το εμβαδό του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων, να είναι ίσο με 4 τ.μ.

51. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 20x$$

και τα σημεία της $A(5, 10)$ και $B\left(\frac{1}{5}, -2\right)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής A' και B' των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα $y'y$.

iii) Αν M είναι το μέσο του τμήματος $A'B'$ και E είναι η εστία της παραβολής (c), να αποδείξετε ότι $ME \perp AB$.

52. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.

i) Να βρείτε:

α) την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c)

β) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c) στο σημείο Α

γ) το σημείο τομής Μ των ευθειών (δ) και (ε)

δ) την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία (η) εφάπτεται στην παραβολή (c) σε κάποιο σημείο Β

β) η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής (c).

53. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 8x$$

το σημείο της $A(x_1, y_1)$ με $y_1 \neq 0$ και το σημείο $B(-x_1, 0)$.

i) Να αποδείξετε ότι $x_1 > 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ εφάπτεται στην παραβολή (c).

iii) Να βρείτε το x_1 έτσι, ώστε η απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την ευθεία ΑΒ να είναι ίση με $\sqrt{2}$.

54. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $A(-1,0)$ και εφάπτονται στην ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x = 1.$$

55. Δίνεται η οικογένεια των ευθειών (ε_α) με εξίσωση

$$x + \alpha y + \alpha^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται το πολύ δύο από τις ευθείες (ε_α).

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x_0, y_0)$ από τα οποία διέρχεται ακριβώς μία από τις ευθείες (ε_α).

56. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = x$$

και το σημείο της $M\left(\alpha^2, \alpha\right)$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Αν A είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $y'y$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_α) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία OM, όπου O η αρχή των αξόνων

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_α) διέρχεται από το ίδιο σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

57. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 6x$$

και δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$y_2^2 - y_1^2 = 6(x_2 - x_1).$$

ii) Αν η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $y_1 + y_2 = 2$

β) το μέσο M του τμήματος AB ανήκει σε μία σταθερή ευθεία η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

58. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y = x^2$$

και το σημείο της A με τετμημένη

$$x = \frac{1}{2}.$$

i) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο A.

iii) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (δ), να αποδείξετε ότι

$$(EA) = (EB).$$

59. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 4y$$

και το σημείο της $A(2,1)$.

i) Να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c) στο σημείο A

β) την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)

γ) το σημείο τομής B της ευθείας (η) με τον άξονα $y'y$.

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία Z και H. Να αποδείξετε ότι

$$(ZH) = 2(AB).$$

60. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y = \frac{1}{12}x^2.$$

i) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c).

ii) Αν H είναι το σημείο τομής της (δ) με την ευθεία $x = 6$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του τμήματος EH.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στην παραβολή (c). Ποιο είναι το σημείο επαφής;

61. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 16y$$

και δύο σημεία της $A(-2,\alpha)$ και $B(4,\beta)$.

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c).

iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ της ευθείας (ε) με την παραβολή (c).

iv) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (η) της παραβολής (c) στο σημείο Γ είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

62. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και το σημείο της $A(-5, 10)$.

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου p.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c) στο σημείο A.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

iv) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε) και (η) τέμνουν τον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c) σε δύο σημεία Β και Γ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η εστία Ε της παραβολής (c) να είναι το μέσο του ΒΓ.

63. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$4x + 3y - 4 = 0$$

η οποία διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής. Να αποδείξετε ότι:

i) $p = 2$

ii) η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία Α και Β

iii) οι εφαπτόμενες της παραβολής (c) στα σημεία Α και Β τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

64. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την εστία της παραβολής (c) και είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c), σε δύο σημεία Α και Β.

iii) Αν ισχύει η σχέση $(AB) = 14$ να βρείτε την παράμετρο p της παραβολής.

65. Δίνεται η παραβολή (c) με εστία το σημείο $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{1}{2}$. Επίσης, δίνονται δύο σημεία

$$A(x_1, y_1) \quad \text{και} \quad B(x_2, y_2) \text{ με } y_1 < 0 < y_2$$

τα οποία ανήκουν στην παραβολή (c).

i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (c).

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) $x_1 = \frac{y_1^2}{2}$ και $x_2 = \frac{y_2^2}{2}$

β) $\det\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\right) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \cdot (1 + y_1 y_2)$.

iii) Αν η ευθεία AB διέρχεται από την εστία E, να αποδείξετε ότι

$$y_1 y_2 = -1 \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4}.$$

66. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 4x$$

και τα σημεία

$$A\left(\kappa^2, 2\kappa\right) \quad \text{και} \quad B\left(\frac{1}{\kappa^2}, \frac{2}{\kappa}\right) \quad \text{με} \quad \kappa \neq -1, 0, 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία τα οποία ανήκουν στην παραβολή (c).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

iii) Να βρείτε το σημείο τομής Γ των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

iv) Αν E είναι η εστία της παραβολής (c), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c).

67. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 4x$$

η οποία έχει εστία το σημείο Ε, διευθετούσα την ευθεία (δ) και διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -4)$.

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΕΑ.

iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Β στο οποίο η ευθεία ΕΑ τέμνει την παραβολή (c).

iv) Αν A' και B' είναι οι προβολές των σημείων Α και Β αντίστοιχα πάνω στην διευθετούσα (δ), να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $A'B'$ διέρχεται από την εστία Ε.

68. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 2py$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \lambda x + \kappa$$

η οποία τέμνει την παραβολή (c) στα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(x_3, 0)$ με $x_1 + x_2 \neq 0$ και $x_3 \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda \neq 0$ **ii)** $\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = -\dfrac{\kappa}{\lambda}$ **iii)** $\dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

69. Δίνονται οι παραβολές (c_1) και (c_2) με εξισώσεις

$$x^2 = 8y \quad \text{και} \quad x^2 = 4y$$

αντίστοιχα και το σημείο $A(4, \alpha)$ της παραβολής (c_1).

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

iii) Να αποδείξετε ότι η παραβολή (c_2) διέρχεται από το μέσο Μ του ΟΑ.

iv) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των παραβολών (c_1) και (c_2) στα σημεία τους Α και Μ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

70. Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής

$$c: y^2 = 2px$$

σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

i) Να βρείτε την παράμετρο p και τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

ii) Αν η ευθεία (η) που διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι:

α) η εστία Ε της παραβολής (c) είναι το μέσο του ΑΒ

β) ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

71. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$, διαφορετικό από την κορυφή της.

Να αποδείξετε ότι:

i) $x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p}$

ii) η εφαπτομένη (ε) της παραβολής (c) στο σημείο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{p}{y_1}$

iii) η ευθεία ΟΜ τέμνει τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c) στο σημείο

$$A\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1}\right)$$

iv) αν Ε είναι η εστία της παραβολής (c), τότε $EA // (\varepsilon)$.

Η Έλλειψη

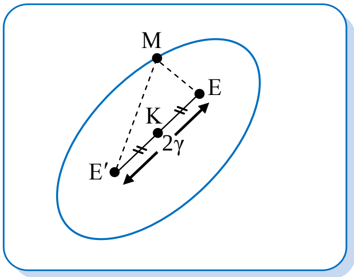
Ορισμός (έλλειψης)

Έστω E' και E δύο σημεία του επιπέδου και ένας αριθμός α τέτοιος, ώστε

$$2\alpha > (E'E).$$

Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E και **σταθερό άθροισμα 2α**, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και ίσο με 2α. Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$(ME') + (ME) = 2\alpha.$$



- Η απόσταση $(E'E)$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με **2γ**.
- Ισχύει
$$(E'E) < (ME') + (ME)$$
δηλαδή
$$2\gamma < 2\alpha$$
και συνεπώς
$$\gamma < \alpha.$$
- Το μέσο Κ του τμήματος $E'E$ ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εστίες τα σημεία $E'(-1,0)$ και $E(1,0)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha = 4$.

Λύση

Έχουμε $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της έλλειψης. Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}(ME') + (ME) = 2\alpha \; &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = \left(4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 16 + (x-1)^2 + y^2 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\end{aligned}$$

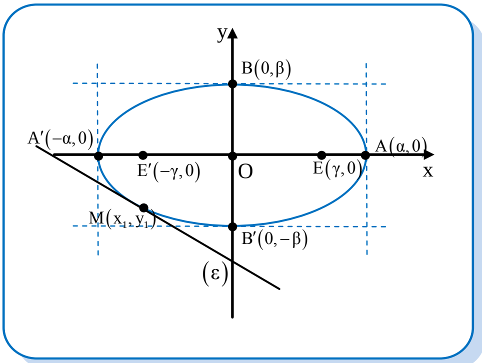
$$\Leftrightarrow 2x = 16 - 2x - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$
$$\Leftrightarrow 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 16 - 4x$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - x$$
$$\Leftrightarrow 4\left[(x-1)^2 + y^2\right] = (4-x)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση της έλλειψης είναι

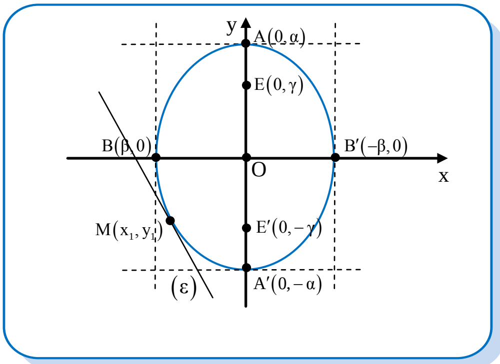
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Έλλειψη με Κέντρο O(0,0) και

Εστίες στον Άξονα x΄x



Εστίες στον Άξονα y΄y



Εξίσωση Έλλειψης

Η εξίσωση της έλλειψης (c) με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Η εξίσωση της έλλειψης (c) με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1.$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha = 10$.

Λύση

Έχουμε $\gamma = 3$ και $2\alpha = 10$, οπότε $\alpha = 5$. Επομένως, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης

$$c : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Λύση

Έχουμε $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 5$. Οπότε $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{9-5} = 2$. Άρα, οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(0,-3)$, $E(0,3)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha = 10$.

Λύση

Έχουμε $\gamma = 3$ και $2\alpha = 10$, οπότε $\alpha = 5$. Επομένως, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης

$$c : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

Λύση

Έχουμε $\alpha^2 = 13$ και $\beta^2 = 4$. Οπότε $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{13-4} = 3$. Άρα, οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E'(0,-3)$ και $E(0,3)$.

- Ο αριθμός α είναι ο μεγαλύτερος από τους τρεις θετικούς αριθμούς α, β, γ.
- Οι αριθμοί β και γ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους.

Εφαπτομένη Έλλειψης

Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$

$$\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$$

Παράδειγμα

Η εφαπτομένη της έλλειψης $c: \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ στο σημείο της $M(3,1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\cdot 3}{12}+\frac{y\cdot 1}{4}=1$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$y=-x+4.$$

Σημεία Τομής Έλλειψης με τους Άξονες

Από την εξίσωση της έλλειψης (c) για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\beta$.

Άρα, η έλλειψη (c) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$ ενώ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$.

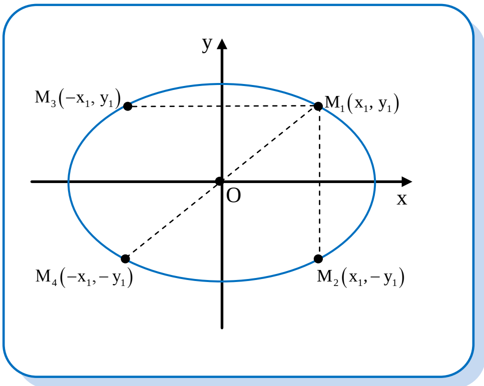
Από την εξίσωση της έλλειψης (c) για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\beta$, ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\alpha$.

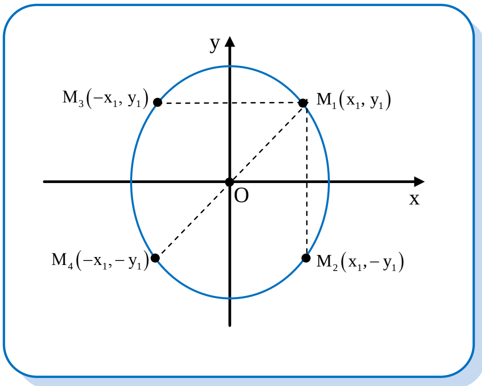
Άρα, η έλλειψη (c) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B'(-\beta,0)$ και $B(\beta,0)$ ενώ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $A'(0,-\alpha)$ και $A(0,\alpha)$.

- Τα σημεία A', A, B', B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$ που έχουν μήκη $(A'A)=2\alpha$ και $(B'B)=2\beta$ λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** της έλλειψης αντίστοιχα.

- Οι εστίες E', E της έλλειψης βρίσκονται πάντα πάνω στον μεγάλο άξονα.
- Κάθε έλλειψη (c) περικλείεται στον ορθογώνιο που ορίζουν οι εφαπτόμενες της έλλειψης στις κορυφές της.

Συμμετρίες Έλλειψης





Για κάθε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης (c) τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν επίσης στη (c), αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή τους. Άρα, οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Γι' αυτόν τον λόγο το σημείο $O(0,0)$ λέγεται **κέντρο** της έλλειψης (c).

Διάμετρος Έλλειψης

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία M και M' της έλλειψης (c) τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της O λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

- Ο μεγάλος άξονας είναι η μεγαλύτερη διάμετρος και ο μικρός άξονας η μικρότερη. Δηλαδή, για κάθε διάμετρο MM' ισχύει

$$2\beta \leq (MM') \leq 2\alpha.$$

Εκκεντρότητα Έλλειψης

Ορισμός

Ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης (c) και συμβολίζεται με ε ο λόγος

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης

$$c: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

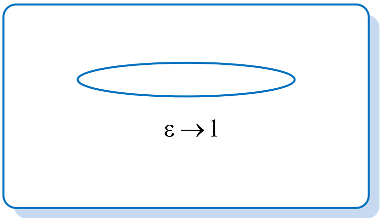
Λύση

Έχουμε $\alpha = 5$ και $\beta = 4$. Οπότε $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Άρα, η ζητούμενη εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

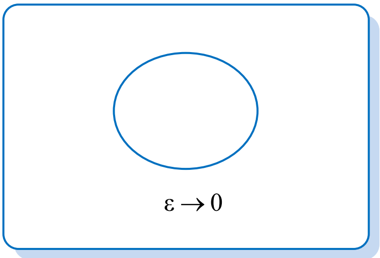
- Ισχύει $0 < \varepsilon < 1$.
- Έχουμε $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$. Οπότε $\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. Επομένως,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

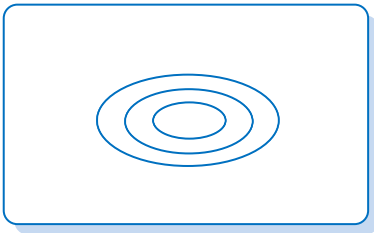
- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα, δηλαδή όσο πλησιάζει στο 1, τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, πλησιάζοντας στο 0. Δηλαδή, ο αριθμός β πλησιάζει στο 0 και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.



- Όσο μικραίνει η εκκεντρότητα, δηλαδή όσο πλησιάζει στο 0, τόσο μεγαλώνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, πλησιάζοντας στο 1. Δηλαδή ο αριθμός β πλησιάζει στον αριθμό α και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε κύκλο.



- Δύο ελλείψεις λέγονται **όμοιες**, αν και μόνο αν έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Αν δύο ελλείψεις είναι όμοιες, τότε η μία είναι ομοιόμορφη μεγέθυνση ή σμίκρυνση της άλλης.



Παράδειγμα

- Στην έλλειψη $c_1: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ έχουμε $\alpha^2=16$ και $\beta^2=12$ και συνεπώς

$$\alpha=4,\ \beta=2\sqrt{3} \text{ και } \gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{16-12}=2$$

Επομένως η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon_1=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

- Στην έλλειψη $c_2: \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$ έχουμε $\alpha^2=36$ και $\beta^2=27$ και συνεπώς

$$\alpha=6,\ \beta=3\sqrt{3} \text{ και } \gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{36-27}=3$$

Επομένως η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

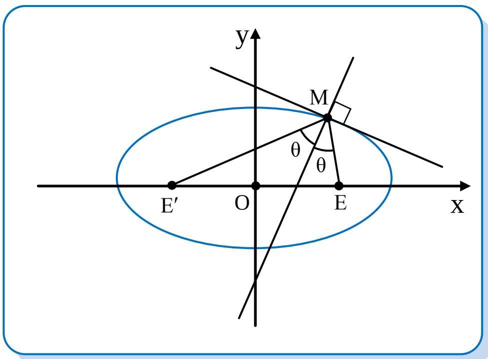
Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{1}{2}$$

οπότε, οι παραπάνω ελλείψεις είναι όμοιες.

Ανακλαστική Ιδιότητα της Έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης σε κάθε σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\widehat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.



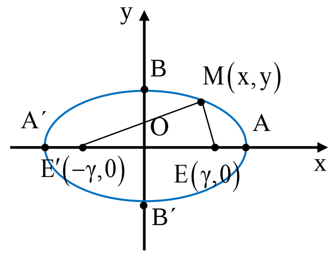
Λυμένες Ασκήσεις

28. **Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

i) **Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$ και μεγάλο άξονα 26.**

ii) **Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-4)$ και $E(0,4)$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$.**

Λύση



i) Έχουμε

$$\gamma = 5 \quad \text{και} \quad 2\alpha = 26.$$

Δηλαδή,

$$\gamma = 5 \quad \text{και} \quad \alpha = 13.$$

Επομένως,

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1.$$

ii) Έχουμε

$$\gamma = 4 \quad \text{και} \quad \varepsilon = \frac{4}{5}.$$

Δηλαδή,

$$\gamma = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$$

ή ισοδύναμα

$$\gamma = 4 \quad \text{και} \quad \alpha = 5.$$

Επομένως,

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Σημειώσεις

- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι
$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

- Η εκκεντρότητα της έλλειψης με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερό άθροισμα 2α, είναι
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1.$$

29. **Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$4x^2+9y^2=36.$$

Να βρείτε:

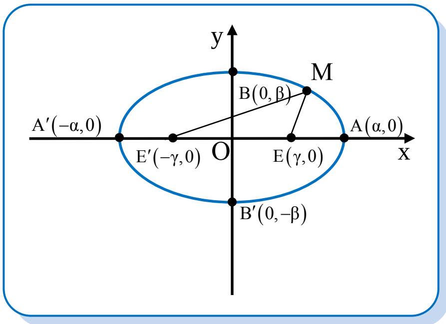
i) **τις κορυφές της έλλειψης (c)**

ii) **τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)**

iii) **τις εστίες της έλλειψης (c)**

iv) **την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).**

Λύση



i) Η εξίσωση

$$4x^2+9y^2=36$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Παρατηρούμε ότι $9>4$ και συνεπώς

$$\alpha^2=9 \quad \text{και} \quad \beta^2=4.$$

Δηλαδή,

$$\alpha=3 \quad \text{και} \quad \beta=2.$$

Άρα, οι κορυφές της έλλειψης είναι τα σημεία

$$A'(-3,0),\quad A(3,0),\quad B'(0,-2) \quad \text{και} \quad B(0,2).$$

ii) Η έλλειψη (c) έχει μεγάλο άξονα το τμήμα $A'A$ με μήκος $(A'A)=2\alpha=6$ και μικρό άξονα το τμήμα $B'B$ με μήκος $(B'B)=2\beta=4$.

iii) Από τη σχέση $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ έχουμε

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=3^2-2^2=5.$$

Δηλαδή, $\gamma=\sqrt{5}$. Άρα, οι εστίες της έλλειψης (c) είναι τα σημεία

$$E'\left(-\sqrt{5},0\right) \quad \text{και} \quad E\left(\sqrt{5},0\right).$$

iv) Η έλλειψη (c) έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

30. **Μια έλλειψη (c) έχει εστίες τα σημεία $E'(1,2)$ και $E(3,4)$.**

i) Να βρείτε το κέντρο της έλλειψης (c).

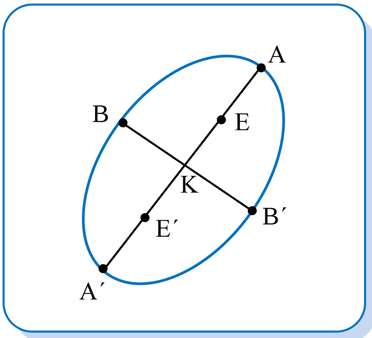
ii) Αν το σημείο $A(7,8)$ είναι μια κορυφή της έλλειψης (c), να βρείτε:

α) τη δεύτερη κορυφή A' της έλλειψης (c)

β) την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

Λύση

i) Το κέντρο της έλλειψης (c) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $E'E$. Δηλαδή, είναι το σημείο $K\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ ή $K(2,3)$.



ii) **α)** Έστω $A'(x_1, y_1)$. Το κέντρο K της έλλειψης είναι μέσο και του τμήματος $A'A$. Επομένως, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x_1+7}{2}=2 \quad \text{και} \quad \frac{y_1+8}{2}=3.$$

Οπότε, βρίσκουμε

$$x_1=-3 \quad \text{και} \quad y_1=-2.$$

Δηλαδή, $A'(-3,-2)$.

Παρατηρήσεις

- Οι εστίες E' και E μιας έλλειψης ανήκουν στον μεγάλο της άξονα $A'A$.
- Το κέντρο K της έλλειψης είναι το κοινό μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων $A'A, B'B$ και $E'E$.

β) Η εστιακή απόσταση είναι

$$2\gamma=(E'E)=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Άρα, $\gamma=\sqrt{2}$. Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι

$$2\alpha=(A'A)=\sqrt{(7+3)^2+(8+2)^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}.$$

Άρα, $\alpha=5\sqrt{2}$. Επομένως, η εκκεντρότητα της έλλειψης (c) είναι

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{5}.$$

31. **Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{5}=1$$

και δύο σημεία της $\Gamma(x_1,y_1)$ και $\Delta(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{7}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{5}=0.$$

ii) Αν το σημείο $M(1,1)$ είναι το μέσο του ΓΔ, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ.

Λύση

i) Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην έλλειψη (c). Επομένως, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της (c). Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x_1^2}{7}+\frac{y_1^2}{5}=1 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$\frac{x_2^2}{7}+\frac{y_2^2}{5}=1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{7}+\frac{y_2^2-y_1^2}{5}=0$$

και τελικά

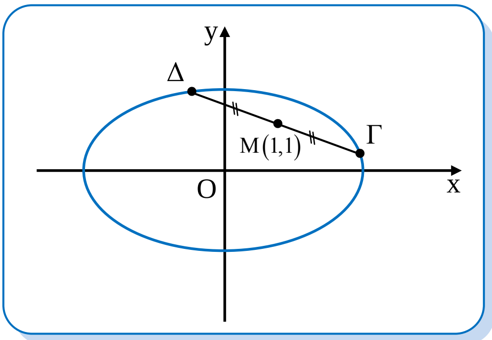
$$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{7}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{5}=0.$$

ii) Το σημείο $M(1,1)$ είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ. Άρα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1 \quad \text{και} \quad \frac{y_1+y_2}{2}=1$$

ή ισοδύναμα

$$x_1+x_2=2 \quad \text{και} \quad y_1+y_2=2.$$



Αντικαθιστώντας λοιπόν, στη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** παίρνουμε

$$\frac{(x_2-x_1)\cdot 2}{7}+\frac{(y_2-y_1)\cdot 2}{5}=0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{y_2-y_1}{5}=-\frac{x_2-x_1}{7}$$

και τελικά

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{5}{7}.$$

Επομένως, η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=-\frac{5}{7}.$$

Και επειδή διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$ έχει εξίσωση

$$y-1=-\frac{5}{7}(x-1)$$

ή ισοδύναμα

$$y=-\frac{5}{7}x+\frac{12}{7}.$$

Σχόλιο

Γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου Μ της ζητούμενης ευθείας. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

32. **Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1.$$

i) **Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).**

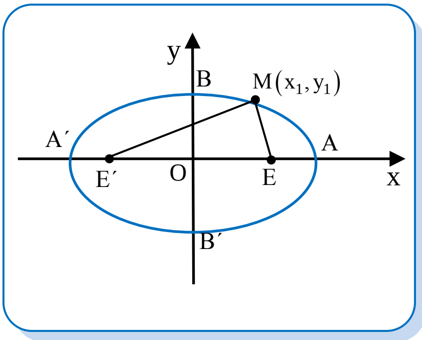
ii) **Αν $M(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης (c), να αποδείξετε ότι:**

α) $(ME')^2-(ME)^2=16x_1$

β) $(ME')+(ME)=16$

γ) $(ME')=8+\frac{1}{2}x_1$ **και** $(ME)=8-\frac{1}{2}x_1$.

Λύση



i) Έχουμε

$$\alpha^2 = 64 \quad \text{και} \quad \beta^2 = 48.$$

Επομένως,

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 64 - 48 = 16$$

και συνεπώς

$$\gamma = 4.$$

Άρα, οι εστίες της έλλειψης (c) είναι τα σημεία

$$E'(-4, 0) \quad \text{και} \quad E(4, 0).$$

ii) **α)** Έχουμε

$$(ME') = \sqrt{(x_1+4)^2 + y_1^2}$$

και

$$(ME) = \sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2}.$$

Επομένως,

$$(ME')^2 - (ME)^2 = \left(\sqrt{(x_1+4)^2 + y_1^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2}\right)^2$$

$$= (x_1+4)^2 + y_1^2 - (x_1-4)^2 - y_1^2$$

$$= x_1^2 + 8x_1 + 16 - x_1^2 + 8x_1 - 16 = 16x_1.$$

β) Σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης, ισχύει η σχέση

$$(ME') + (ME) = 2\alpha.$$

Όμως,

$$\alpha^2 = 64 \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

Άρα,

$$(ME') + (ME) = 16.$$

> **Σημείωση**
> Για κάθε σημείο Μ της έλλειψης ισχύει εξ ορισμού η σχέση
> $$(ME') + (ME) = 2\alpha.$$

γ) Αποδείξαμε ότι

$$(ME')^2 - (ME)^2 = 16x_1.$$

Δηλαδή,

$$[(ME')-(ME)]\cdot[(ME')+(ME)] = 16x_1$$

Και επειδή

$$(ME')+(ME) = 16 \qquad \textbf{(1)}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$[(ME')-(ME)]\cdot 16 = 16x_1$$

και τελικά

$$(ME')-(ME) = x_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι

$$2(ME') = 16 + x_1 \qquad \text{και} \qquad 2(ME) = 16 - x_1$$

Άρα,

$$(ME') = 8 + \frac{1}{2}x_1 \qquad \text{και} \qquad (ME) = 8 - \frac{1}{2}x_1.$$

33. **Δίνονται οι ελλείψεις (c_1) και (c_2) με αντίστοιχες εξισώσεις**

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10+\kappa} = 1$$

όπου κ σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης (c_1).

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του κ έτσι, ώστε οι ελλείψεις (c_1) και (c_2) να είναι όμοιες.

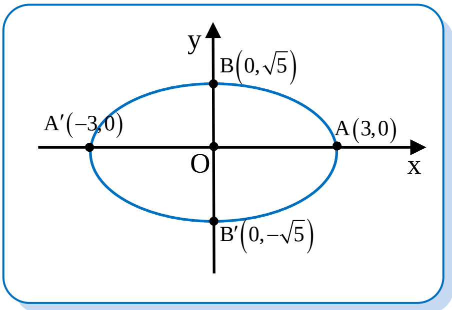
Λύση

i) Έχουμε

$$\alpha_1^2 = 9 \quad \text{και} \quad \beta_1^2 = 5.$$

Δηλαδή,

$$\alpha_1 = 3 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \sqrt{5}.$$



Από τη σχέση $\beta_1^2=\alpha_1^2-\gamma_1^2$ βρίσκουμε

$$\gamma_1^2=\alpha_1^2-\beta_1^2=9-5=4.$$

Επομένως,

$$\gamma_1=2.$$

Άρα, η έλλειψη (c_1) έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon_1=\frac{\gamma_1}{\alpha_1}=\frac{2}{3}.$$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$10+\kappa>10, \quad \text{αφού} \quad \kappa>0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\alpha_2^2=10+\kappa \quad \text{και} \quad \beta_2^2=10.$$

Επομένως,

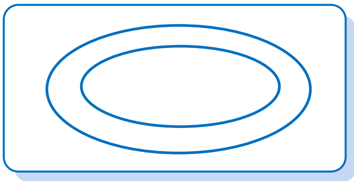
$$\gamma_2^2=\alpha_2^2-\beta_2^2=10+\kappa-10=\kappa.$$

Άρα,

$$\alpha_2=\sqrt{10+\kappa}, \quad \gamma_2=\sqrt{\kappa}$$

και συνεπώς η έλλειψη (c_2) έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon_2=\frac{\gamma_2}{\alpha_2}=\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{10+\kappa}}=\sqrt{\frac{\kappa}{10+\kappa}}.$$



Σημείωση
Δύο ελλείψεις λέμε ότι είναι όμοιες όταν έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

Όμως, οι ελλείψεις (c_1) και (c_2) είναι όμοιες. Δηλαδή,

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{\kappa}{10+\kappa}} \Leftrightarrow \frac{4}{9}=\frac{\kappa}{10+\kappa} \Leftrightarrow 40+4\kappa=9\kappa$$

$$\Leftrightarrow 5\kappa=40 \Leftrightarrow \kappa=8.$$

34. **Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$$

και το σημείο της $M(-3,3)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο M.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε) στο σημείο M.

iii) Να βρείτε τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες (ε) και (η) τέμνουν αντίστοιχα τον άξονα $y'y$.

iv) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης (c).

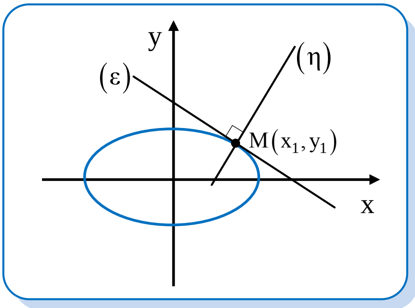
Λύση

i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x\cdot(-3)}{36}+\frac{y\cdot 3}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{12}+\frac{3y}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow -x+3y=12.$$



ii) Έχουμε

$$(\eta)\perp(\varepsilon).$$

Άρα,

$$\lambda_\eta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot\frac{1}{3}=-1$$

$$\Leftrightarrow\lambda_\eta=-3.$$

Επομένως, η ευθεία (η) έχει εξίσωση

$$y-3=-3(x+3)\Leftrightarrow y=-3x-6.$$

Σημείωση

Η εφαπτομένη της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1.$$

iii) Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=0 \\ -x+3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4. \end{cases} \quad \text{Άρα,} \quad \Gamma(0,4).$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-3x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6. \end{cases} \quad \text{Άρα,} \quad \Delta(0,-6).$$

iv) Αρχικά βρίσκουμε τις εστίες της έλλειψης (c). Έχουμε

$$\alpha^2=36 \quad \text{και} \quad \beta^2=12.$$

Οπότε,

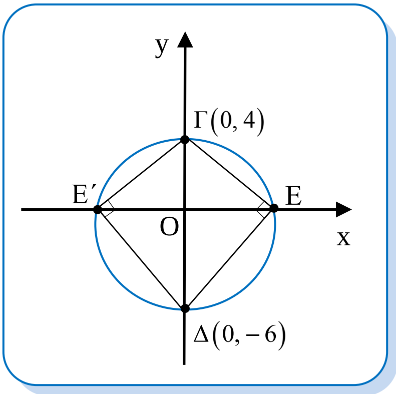
$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=36-12=24.$$

Επομένως,

$$\gamma=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

Άρα, η έλλειψη (c) έχει εστίες τα σημεία

$$E'\left(-2\sqrt{6},0\right) \quad \text{και} \quad E\left(2\sqrt{6},0\right).$$



Για να αποδείξουμε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες E' και Ε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\Gamma\widehat{E'}\Delta=90^\circ \quad \text{και} \quad \Gamma\widehat{E}\Delta=90^\circ.$$

Δηλαδή ότι

$$\overrightarrow{E'\Gamma}\cdot\overrightarrow{E'\Delta}=0 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta}=0.$$

Σχόλιο

Για να αποδείξουμε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από ένα σημείο Ε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\Gamma\widehat{E}\Delta=90^\circ.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\overrightarrow{E'\Gamma}=\left(2\sqrt{6},4\right), \quad \overrightarrow{E'\Delta}=\left(2\sqrt{6},-6\right), \quad \overrightarrow{E\Gamma}=\left(-2\sqrt{6},4\right) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{E\Delta}=\left(-2\sqrt{6},-6\right).$$

Άρα,

$$\overrightarrow{E'\Gamma}\cdot\overrightarrow{E'\Delta}=\left(2\sqrt{6}\right)^2+4\cdot(-6)=0$$

και

$$\overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta}=\left(-2\sqrt{6}\right)^2+4\cdot(-6)=0.$$

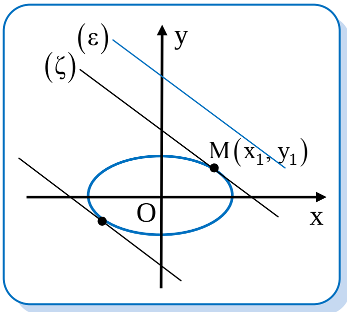
35. **Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1.$$

i) **Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon\colon\ x+y-10=0$.**

ii) **Να υπολογίσετε την απόσταση d των εφαπτομένων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.**

Λύση



i) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής ζητούμενης ευθείας (ζ). Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι

$$\frac{xx_1}{12}+\frac{yy_1}{4}=1.$$

Γνωρίζουμε ότι η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε). Επομένως,

$$\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\frac{x_1}{12}}{\frac{y_1}{4}}=-1 \Leftrightarrow x_1=3y_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη (c). Άρα, ισχύει η σχέση

$$\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{4}=1 \qquad \textbf{(2)}$$

Σχόλιο
Για να βρούμε την εφαπτομένη της έλλειψης αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες (x_1, y_1) του σημείου επαφής.

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι

$$(x_1, y_1)=(3,1) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1)=(-3,-1)$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$\frac{x\cdot 3}{12}+\frac{y\cdot 1}{4}=1 \Leftrightarrow x+y-4=0 \quad \text{και} \quad \frac{x\cdot(-3)}{12}+\frac{y\cdot(-1)}{4}=1 \Leftrightarrow x+y+4=0.$$

ii) Είναι φανερό ότι η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με την απόσταση του σημείου $M(3,1)$ της ευθείας $x+y-4=0$ από την ευθεία $x+y+4=0$. Δηλαδή,

$$d=\frac{|3+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

72. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και μεγάλο άξονα 6.

ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$.

iii) Όταν έχει κορυφές τα σημεία $A'(0, -5)$ και $A(0, 5)$ και μικρό άξονα 4.

iv) Όταν έχει εστία το σημείο $E'(0, -2)$ και κορυφές τα σημεία

$$A'(0, -7) \text{ και } A(0, 7).$$

73. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

i) $9x^2 + y^2 = 9$

ii) $9x^2 + 4y^2 = 144$.

74. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, κορυφές τα σημεία $A'\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ και $A\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ και εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις κορυφές B', B της έλλειψης (c).

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $E'B'EB$.

75. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{με} \quad \alpha>\beta>0$$

η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma,0) \quad \text{και} \quad E(\gamma,0), \quad \text{με} \quad \gamma>0.$$

Αν η ευθεία $x=\gamma$ τέμνει την έλλειψη (c) στα σημεία Γ και Δ, να αποδείξετε ότι:

i) $(\Gamma\Delta)=2\frac{\beta^2}{\alpha}$

ii) $(\Gamma E)=\alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha}$

iii) $(\Gamma E')=\alpha+\frac{\gamma^2}{\alpha}$.

76. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$x^2+4y^2=52$$

και δύο σημεία της $\Gamma(x_1,y_1)$ και $\Delta(x_2,y_2)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0.$$

ii) Αν το σημείο $M\left(5,\frac{5}{2}\right)$ είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ, τότε:

α) να αποδείξετε ότι

$$x_1-x_2+2(y_1-y_2)=0$$

β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ.

77. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

και η ευθεία (δ) με εξίσωση $x=4$.

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).

ii) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα ε της έλλειψης (c).

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο M της έλλειψης (c) ισχύει η σχέση

$$\frac{(ME)}{d(M,\delta)}=\varepsilon.$$

78. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x+1$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη (c) σε δύο σημεία

$$K(x_1,y_1) \quad \text{και} \quad \Lambda(x_2,y_2) \quad \text{με} \quad x_1<x_2.$$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα x_1+x_2.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος ΚΛ.

79. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

και ένα σημείο της $M(x_1,y_1)$.

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).

ii) Να αποδείξετε ότι

$$(ME')^2+(ME)^2=2\left(x_1^2+y_1^2\right)+18.$$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$(ME')+(ME).$$

iv) Να αποδείξετε ότι

$$(ME')\cdot(ME)+(MO)^2=41$$

όπου O η αρχή των αξόνων.

80. Έστω η έλλειψη (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία

$$A'(-\alpha,0),\quad A(\alpha,0),\quad B'(0,-\beta)\ \text{ και }\ B(0,\beta)\quad \text{με } \alpha>\beta>0$$

και εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma,0)\quad \text{και}\quad E(\gamma,0).$$

Έστω επίσης, ένα σημείο $M(x_1,y_1)$ αυτής της έλλειψης τέτοιο, ώστε

$$\sqrt{(x_1+\gamma)^2+y_1^2}+\sqrt{(x_1-\gamma)^2+y_1^2}=8.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

ii) Αν ισχύει η σχέση $B'\widehat{E}B=\dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε:

α) την εκκεντρότητα ε της έλλειψης (c)

β) την εξίσωση της έλλειψης (c).

81. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

και τα σημεία της

$$K(2,-1)\ \text{ και }\ \Lambda(x_1,y_1)\ \text{ με }\ x_1\neq 2\ \text{ και }\ y_1\neq -1.$$

i) Να βρείτε την εκκεντρότητα ε της έλλειψης (c).

ii) Να αποδείξετε ότι

$$y_1^2=2-\frac{x_1^2}{4}.$$

iii) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ και λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΟΜ και ΚΛ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\varepsilon^2-1.$$

82. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \alpha>\beta>0.$$

Από την εστία $E(\gamma,0)$ της έλλειψης (c) φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$ η οποία τέμνει την έλλειψη στο σημείο Μ με αρνητική τεταγμένη.

i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι

$$\left(\gamma,-\beta\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$$

όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

ii) Αν η ευθεία ΟΜ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, όπου $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

83. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία

$$A'(-4,0), \quad A(4,0), \quad B'(0,-3) \quad \text{και} \quad B(0,3).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) το σημείο $M\left(\frac{16}{5},\frac{9}{5}\right)$ ανήκει στην έλλειψη (c)

ii) η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο σημείο Μ ορίζει με τους ημιάξονες Οx και Oy ισοσκελές τρίγωνο.

84. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).

ii) Οι ευθείες που διέρχονται από τις εστίες E' και E και είναι κάθετες στον άξονα $x'x$ τέμνουν την έλλειψη (c) στα σημεία Γ' και Γ αντίστοιχα με θετικές τεταγμένες.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο Γ.

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει την ευθεία $E'\Gamma'$ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι

$$(E'Z)=(E\Gamma').$$

85. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο της $M\left(4,\frac{9}{5}\right)$.

iii) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία $E'\Gamma$.

86. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

και το σημείο της $M(-2,1)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο Μ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε) στο σημείο Μ.

iii) Αν Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Λ είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{O\Lambda}=3\overrightarrow{MK}$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

87. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-2,0) \quad \text{και} \quad E(2,0)$$

και μήκος μικρού άξονα ίσο με 4.

i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) σε κάποιο σημείο της $M(x_1,y_1)$ τέμνει την ευθεία $x=4$ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι

$$M\widehat{E}K=90^\circ.$$

88. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$$

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x+7$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραγώνου που έχει δύο απέναντι πλευρές πάνω στις ευθείες που βρήκατε στο ερώτημα **i).**

89. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'\left(-\sqrt{5},0\right) \quad \text{και} \quad E\left(\sqrt{5},0\right)$$

και ένα σημείο της Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(ME')+(ME)=6.$$

Να βρείτε:

i) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)

ii) την εξίσωση της έλλειψης (c)

iii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $y=-2x$.

90. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

και το σημείο της $M(2,1)$.

i) Να βρείτε τις κορυφές A' και A της έλλειψης (c) που βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες MA' και MA αντίστοιχα τέμνουν τον άξονα $y'y$.

iii) Αν Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΖ εφάπτεται στην έλλειψη (c).

91. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-4,0) \quad \text{και} \quad E(4,0)$$

και μία κορυφή της είναι το σημείο $B\left(0,\sqrt{2}\right)$.

Να βρείτε:

i) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)

ii) την εξίσωση της έλλειψης (c)

iii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $y=3x$.

92. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1\,.$$

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα του (c).

iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη (c) στο α΄ τεταρτημόριο.

iv) Αν η εφαπτομένη (η) της έλλειψης (c) στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι $E'K \perp (\eta)$.

93. Μία έλλειψη (c) έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, διέρχεται από το σημείο $M\left(\sqrt{2},1\right)$ και δύο κορυφές της είναι τα σημεία

$$A'(-2,0) \quad \text{και} \quad A(2,0).$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε) και (η) της έλλειψης (c) στα σημεία της Μ και Α αντίστοιχα.

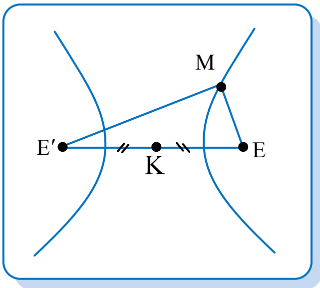
iii) Αν Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) και Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MA' και ΓO είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Η Υπερβολή

Ορισμός (υπερβολής)

Έστω E' και E δύο σημεία του επιπέδου και ένας θετικός αριθμός α τέτοιος, ώστε $2\alpha < (E'E)$. Ονομάζεται **υπερβολή** με **εστίες** τα σημεία E' και E και **σταθερή διαφορά** 2α, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και ίση με 2α. Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει

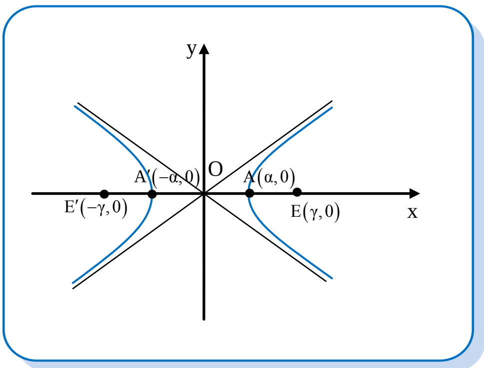
$$\left|(ME')-(ME)\right| = 2\alpha.$$



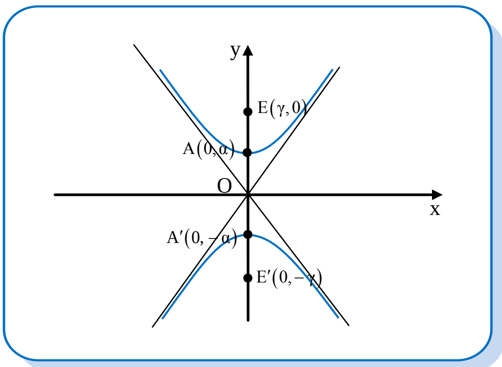
- Η απόσταση $(E'E)$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με **2γ**.
- Ισχύει
$$(E'E) > \left|(ME')-(ME)\right|$$
δηλαδή
$$2\gamma > 2\alpha$$
και συνεπώς
$$\gamma > \alpha.$$
- Το μέσο K του τμήματος $E'E$ ονομάζεται **κέντρο** της υπερβολής.

Υπερβολή με Κέντρο Ο(0,0) και

Εστίες στον Άξονα x΄x



Εστίες στον Άξονα y΄y



Εξίσωση Υπερβολής

Η εξίσωση της υπερβολής (c) με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Η εξίσωση της υπερβολής (c) με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$, $E(5,0)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha=8$.

Λύση

Έχουμε $\gamma=5$ και $2\alpha=8$, οπότε $\alpha=4$. Επομένως,

$$\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E(0,-5)$, $E(0,5)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha=8$.

Λύση

Έχουμε $\gamma=5$ και $2\alpha=8$, οπότε $\alpha=4$. Επομένως $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1.$$

- Ο αριθμός γ είναι ο μεγαλύτερος από τους τρεις θετικούς αριθμούς α, β, γ.
- Οι αριθμοί α και β δεν συγκρίνονται μεταξύ τους .
- Αν είναι $\alpha=\beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και έχει εξίσωση

$$x^2-y^2=\alpha^2 \quad \text{ή} \quad y^2-x^2=\alpha^2.$$

Εφαπτομένη Υπερβολής

Η εφαπτομένη της υπερβολής (c) στο σημείο της $M(x_1,\ y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$

$$\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1\,.$$

Παράδειγμα

Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ στο σημείο της $M\left(2,\sqrt{3}\right)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\cdot 2}{2}-\frac{y\cdot\sqrt{3}}{3}=1$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x-\frac{\sqrt{3}}{3}y-1=0.$$

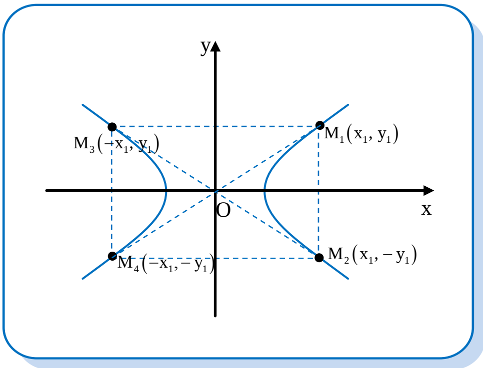
Σημεία Τομής Υπερβολής με τους Άξονες

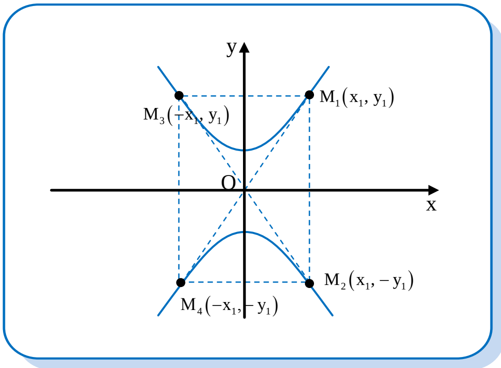
Από την εξίσωση της υπερβολής (c) για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, , ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που είναι αδύνατον.
Άρα, η υπερβολή (c) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$ ενώ δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

Από την εξίσωση της υπερβολής (c) για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\alpha$, ενώ για $y=0$ βρίσκουμε $-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ που είναι αδύνατον.
Άρα, η υπερβολή (c) τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $A'(0,-\alpha)$ και $A(0,\ \alpha)$ ενώ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

- Τα σημεία $A',\ A$ λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.
- Οι εστίες $E',\ E$ της υπερβολής βρίσκονται πάντα στον ίδιο άξονα που βρίσκονται και οι κορυφές της.
- Τα σημεία κάθε υπερβολής (c) βρίσκονται έξω από την ταινία των εφαπτόμενων της υπερβολής στις κορυφές της.

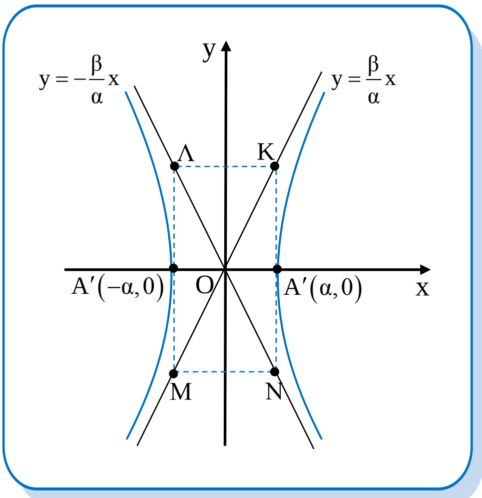
Συμμετρίες Υπερβολής

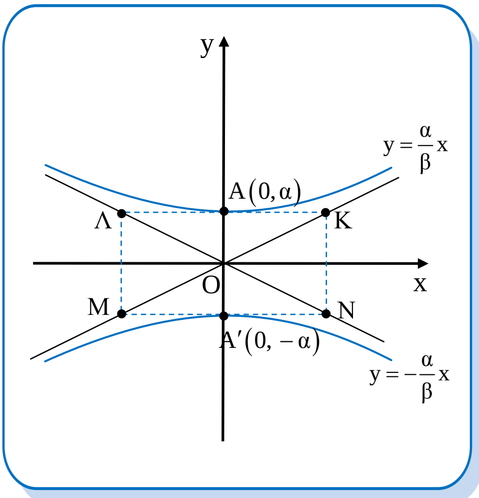




Για κάθε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της υπερβολής (c) τα σημεία $M_2(x_1, -y_1), M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν επίσης στη (c) αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα, οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Γι'αυτόν τον λόγο, το σημείο $O(0,0)$ λέγεται **κέντρο** της υπερβολής (c).

Ασύμπτωτες Υπερβολής





Οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ είναι **ασύμπτωτες** της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Οι ασύμπτωτες είναι οι φορείς των διαγωνίων του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία

$$K(\alpha,\beta),\ \Lambda(-\alpha,\beta),$$
$$M(-\alpha,-\beta),\ N(\alpha,-\beta).$$

Οι ευθείες $y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$ είναι **ασύμπτωτες** της υπερβολής

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1.$$

Οι ασύμπτωτες είναι οι φορείς των διαγωνίων του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία

$$K(\beta,\alpha),\ \Lambda(-\beta,\alpha),$$
$$M(-\beta,-\alpha),\ N(\beta,-\alpha).$$

- Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.
- Οι ευθείες $y=x$ και $y=-x$ είναι οι ασύμπτωτες κάθε ισοσκελούς υπερβολής. Το ορθογώνιο βάσης κάθε ισοσκελούς υπερβολής είναι τετράγωνο.

Παράδειγμα

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{2^2}-\frac{x^2}{1^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=2x$ και $y=-2x$.

- Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής είναι να παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και να εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν.

Παράδειγμα

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{7^2}=1.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{7^2}=\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right).$$

Άρα, οι ζητούμενες ασύμπτωτες είναι οι ευθείες

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=0 \quad \text{και} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{7}=0$$

δηλαδή οι

$$y=\frac{7}{5}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{7}{5}x.$$

Εκκεντρότητα Υπερβολής

Ορισμός

Ονομάζεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής (c) και συμβολίζεται με ε ο λόγος

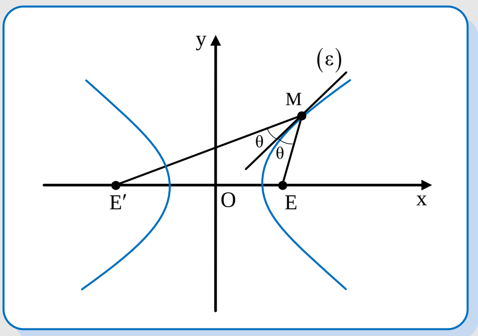
$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

- Ισχύει $\varepsilon>1$.
- Έχουμε $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}$. Οπότε $\varepsilon^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. Επομένως
$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$
Άρα, η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει και προσδιορίζεται από τον συντελεστή διεύθυνσης των ασυμπτώτων $\left(y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{ή} \quad y=\pm\frac{\alpha}{\beta}x\right)$ της υπερβολής.
- Κάθε ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Ανακλαστική Ιδιότητα της Υπερβολής

Πρόταση

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε κάθε σημείο Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\widehat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.



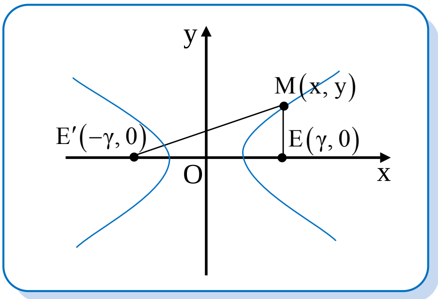
Λυμένες Ασκήσεις

36. **Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

i) **Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$, $E(5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-3,0)$ και $A(3,0)$.**

ii) **Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-8)$, $E(0,8)$ και εκκεντρότητα 2.**

Λύση



i) Έχουμε

$$\gamma = 5 \quad \text{και} \quad \alpha = 3.$$

Επομένως,

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

ii) Έχουμε

$$\gamma = 8 \quad \text{και} \quad \varepsilon = 2.$$

Επομένως,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = 2$$

δηλαδή

$$\frac{8}{\alpha} = 2$$

και συνεπώς

$$\alpha = 4.$$

Άρα,

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}.$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{48}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$$

Σημειώσεις

- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία
$$E'(-\gamma,0) \quad \text{και} \quad E(\gamma,0)$$
και σταθερή διαφορά 2α είναι
$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

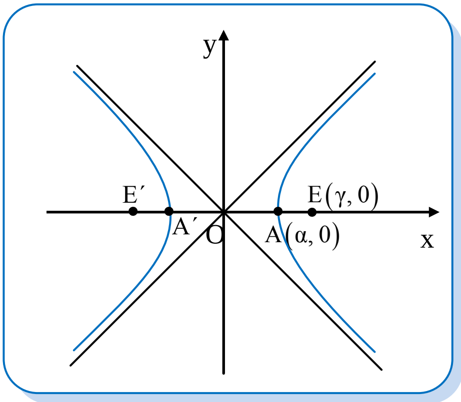
- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία
$$E'(0,-\gamma) \quad \text{και} \quad E(0,\gamma)$$
και σταθερή διαφορά 2α είναι
$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

- Ονομάζουμε εκκεντρότητα της υπερβολής με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερή διαφορά 2α, το λόγο
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1.$$

37. **Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της υπερβολής:**

i) $4x^2 - 9y^2 = 36$ **ii)** $16y^2 - 9x^2 = 144$.

Λύση



i) Έχουμε

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Επομένως,

$$\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

και

$$\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Οπότε, από τη σχέση

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

βρίσκουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 9 + 4 = 13.$$

Δηλαδή,

$$\gamma = \sqrt{13}.$$

Άρα, η δοθείσα υπερβολή έχει εστίες τα σημεία

$$E'\left(-\sqrt{13}, 0\right),\ E\left(\sqrt{13}, 0\right),$$

κορυφές τα σημεία

$$A'(-3, 0),\ A(3, 0)$$

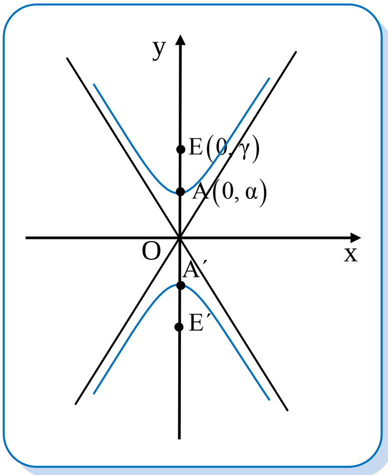
και εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

ii) Έχουμε

$$16y^2 - 9x^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$



Επομένως,

$$\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

και

$$\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Οπότε, από τη σχέση

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

βρίσκουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 9 + 16 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5.$$

Άρα, η δοθείσα υπερβολή έχει εστίες τα σημεία

$$E'(0, -5),\ E(0, 5),$$

κορυφές τα σημεία

$$A'(0, -3),\ A(0, 3)$$

και εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3}.$$

38. **Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$.

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της υπερβολής (c).

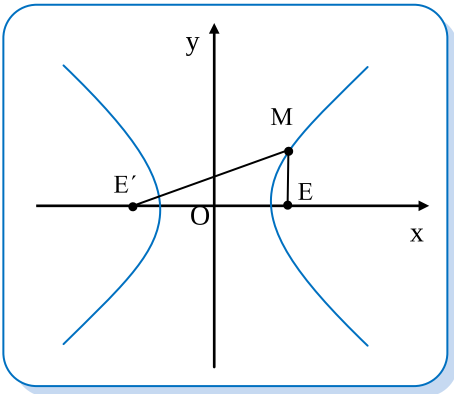
ii) Να αποδείξετε ότι:

α) $(ME')^2 + (ME)^2 = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 18$

β) $|(ME') - (ME)| = 2\sqrt{5}$

γ) $(ME') \cdot (ME) = (OM)^2 - 1$, **όπου O η αρχή των αξόνων.**

Λύση



i) Έχουμε

$$\alpha^2 = 5 \quad \text{και} \quad \beta^2 = 4.$$

Επομένως,

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 5 + 4 = 9$$

και συνεπώς

$$\gamma = 3.$$

Άρα, οι εστίες της υπερβολής (c) είναι τα σημεία

$$E'(-3, 0) \quad \text{και} \quad E(3, 0).$$

ii) **α)** Έχουμε

$$(ME') = \sqrt{(x_1+3)^2 + y_1^2}$$

και

$$(ME) = \sqrt{(x_1-3)^2 + y_1^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}(ME')^2 + (ME)^2 &= (x_1+3)^2 + y_1^2 + (x_1-3)^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 + 6x_1 + 9 + y_1^2 + x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 \\ &= 2x_1^2 + 2y_1^2 + 18.\end{aligned}$$

β) Σύμφωνα με τον ορισμό της υπερβολής έχουμε

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha.$$

Όμως,

$$\alpha^2 = 5 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{5}.$$

Άρα,

$$|(ME') - (ME)| = 2\sqrt{5}.$$

Σημείωση

Για κάθε σημείο M της υπερβολής ισχύει εξ ορισμού η σχέση

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha.$$

γ) Αποδείξαμε ότι

$$|(ME') - (ME)| = 2\sqrt{5}.$$

Άρα,

$$\left|(ME') - (ME)\right|^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

ή ισοδύναμα

$$(ME')^2 + (ME)^2 - 2(ME')\cdot(ME) = 20.$$

Και επειδή

$$(ME')^2 + (ME)^2 = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 18$$

έχουμε

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 18 - 2(ME')\cdot(ME) = 20$$

$$\Leftrightarrow 2(ME')\cdot(ME) = 2x_1^2 + 2y_1^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow (ME')\cdot(ME) = x_1^2 + y_1^2 - 1.$$

Όμως,

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = (OM)^2.$$

Επομένως,

$$(ME')\cdot(ME) = (OM)^2 - 1.$$

39. **Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

της οποίας η ασύμπτωτη

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x$$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 60°$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\beta = \alpha\sqrt{3}.$$

ii) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της υπερβολής (c).

iii) Αν η υπερβολή (c) διέρχεται από το σημείο $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, να βρείτε τις εστίες της.

Λύση

i) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ είναι $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$.

Επίσης,

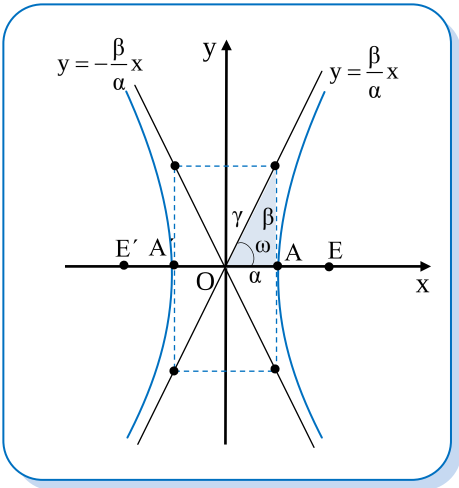
$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi 60^\circ=\sqrt{3}\ .$$

Επομένως,

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{3}$$

δηλαδή

$$\beta=\alpha\sqrt{3}.$$



ii) Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}.$$

Και επειδή $\beta=\alpha\sqrt{3}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{4\alpha^2}}{\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha}=2\ .$$

iii) Η υπερβολή (c) διέρχεται από το σημείο $P\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$. Άρα

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{2}{\alpha^2}-\frac{3}{\beta^2}=1.$$

Και επειδή $\beta=\alpha\sqrt{3}$ έχουμε

$$\frac{2}{\alpha^2}-\frac{3}{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2}=1\Leftrightarrow\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow\alpha^2=1\ .$$

Οπότε, $\alpha=1$ και συνεπώς $\beta=\sqrt{3}$. Επομένως, $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{4}=2$.

Άρα, οι εστίες της υπερβολής (c) είναι τα σημεία

$$E'(-2,0)\quad \text{και}\quad E(2,0).$$

40. **Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$$

και το σημείο της $M(4,1)$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c) στο σημείο Μ.

iii) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα σημεία Κ και Λ, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του ΚΛ

β) να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση

i) Έχουμε

$$\alpha^2=12 \quad \text{και} \quad \beta^2=3\,.$$

Δηλαδή,

$$\alpha=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \beta=\sqrt{3}.$$

Άρα, οι ζητούμενες ασύμπτωτες είναι οι ευθείες με εξισώσεις

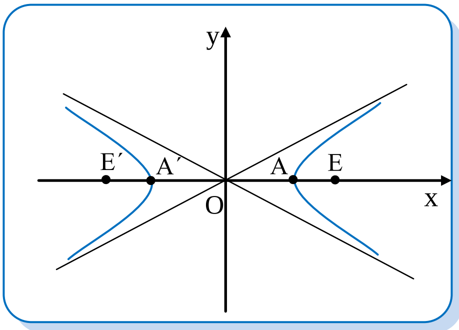
$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$$

και

$$y=-\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x.$$



Σημείωση

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

είναι οι ευθείες με εξισώσεις

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x.$$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x\cdot 4}{12}-\frac{y\cdot 1}{3}=1$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$$

και τελικά

$$x-y=3.$$

Σημείωση

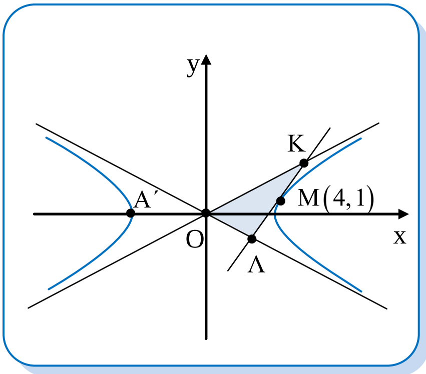
Η εφαπτομένη της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1.$$

iii) **α)** Οι συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ είναι οι αντίστοιχες λύσεις των συστημάτων



$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$K(6, 3) \quad \text{και} \quad \Lambda(2, -1).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{6+2}{2}=4 \quad \text{και} \quad \frac{3+(-1)}{2}=1.$$

Άρα, το σημείο $M(4, 1)$ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{OK}=(6-0, 3-0)=(6, 3)$$

και

$$\overrightarrow{O\Lambda}=(2-0, -1-0)=(2, -1).$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ είναι

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{O\Lambda}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-6-6|=6 \ \text{τ.μ.}$$

41. **Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

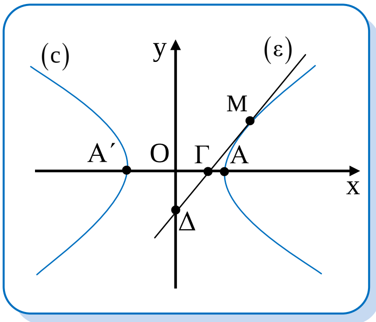
και η εφαπτομένη (ε) στο σημείο της $M(x_1, y_1)$, όπου $y_1 \neq 0$. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\Gamma(p,0)$ και $\Delta(0,q)$, να αποδείξετε ότι:

i) $p=\dfrac{\alpha^2}{x_1}$ **και** $q=-\dfrac{\beta^2}{y_1}$ **ii)** $\dfrac{\alpha^2}{p^2}-\dfrac{\beta^2}{q^2}=1.$

Λύση

i) Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1.$$



Τα σημεία $\Gamma(p,0)$ και $\Delta(0,q)$ ανήκουν στην ευθεία (ε). Άρα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{p\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{0\cdot y_1}{\beta^2}=1 \quad \text{και} \quad \frac{0\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{q\cdot y_1}{\beta^2}=1.$$

Δηλαδή,

$$p=\frac{\alpha^2}{x_1} \quad \text{και} \quad q=-\frac{\beta^2}{y_1}.$$

ii) Έχουμε

$$\frac{\alpha^2}{p^2}-\frac{\beta^2}{q^2}=\frac{\alpha^2}{\left(\dfrac{\alpha^2}{x_1}\right)^2}-\frac{\beta^2}{\left(\dfrac{-\beta^2}{y_1}\right)^2}=\frac{\alpha^2}{\dfrac{\alpha^4}{x_1^2}}-\frac{\beta^2}{\dfrac{\beta^4}{y_1^2}}=\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}.$$

Όμως, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή (c). Επομένως,

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\alpha^2}{p^2}-\frac{\beta^2}{q^2}=1.$$

42. **Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση**

$$x^2 - y^2 = 2.$$

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της υπερβολής (c).

ii) Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της υπερβολής σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$x_1x - y_1y - 2 = 0$$

β) το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών E' και E από την ευθεία (ε) είναι ίσο με 2.

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι η υπερβολή (c) είναι ισοσκελής με

$$\alpha^2 = \beta^2 = 2.$$

Επομένως,

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Άρα, οι εστίες της υπερβολής (c) είναι τα σημεία

$$E'(-2, 0) \quad \text{και} \quad E(2, 0).$$

Σημείωση
Η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

για την οποία ισχύει

$$\alpha = \beta$$

λέγεται ισοσκελής.
Η εξίσωσή της γράφεται

$$x^2 - y^2 = \alpha^2.$$

ii) α) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$xx_1 - yy_1 = 2$$

δηλαδή,

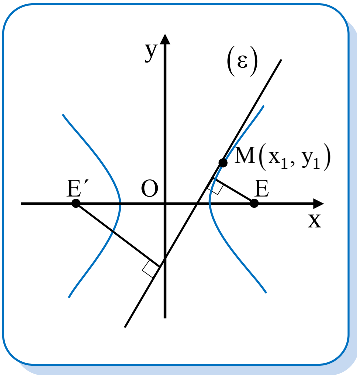
$$x_1x - y_1y - 2 = 0.$$

β) Έχουμε

$$d(E', \varepsilon) = \frac{|x_1 \cdot (-2) - y_1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{|2x_1 + 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

και

$$d(E, \varepsilon) = \frac{|x_1 \cdot 2 - y_1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{|2x_1 - 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$



Επομένως,

$$d(E', \varepsilon) \cdot d(E, \varepsilon) = \frac{|2x_1 + 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{|2x_1 - 2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$= \frac{|4x_1^2 - 4|}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Όμως, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή (c) και συνεπώς ισχύει η σχέση

$$x_1^2 - y_1^2 = 2$$

δηλαδή,

$$x_1^2 = y_1^2 + 2.$$

Άρα,

$$d(E', \varepsilon) \cdot d(E, \varepsilon) = \frac{|4(y_1^2 + 2) - 4|}{y_1^2 + 2 + y_1^2}$$

$$= \frac{|4y_1^2 + 4|}{2y_1^2 + 2}$$

$$= \frac{4(y_1^2 + 1)}{2(y_1^2 + 1)} = 2.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

94. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-7,0)$, $E(7,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$ και $A(5,0)$.

ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-16,0)$, $E(16,0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

iii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, κορυφές τα σημεία $A'\left(-\sqrt{3},0\right)$, $A\left(\sqrt{3},0\right)$ και διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$.

95. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'\left(0,-\sqrt{10}\right)$, $E\left(0,\sqrt{10}\right)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y=-3x \quad \text{και} \quad y=3x.$$

ii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$, εστιακή απόσταση $(E'E)=10$ και ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y=\frac{4}{3}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{4}{3}x.$$

96. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

i) $4x^2-25y^2=100$

ii) $y^2-x^2=49$

iii) $x^2-9y^2=16$

iv) $9y^2-100x^2=900$.

97. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0), E(5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(-5,\frac{9}{4}\right)$.

ii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$, ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις
$$y=2x \quad \text{και} \quad y=-2x$$
και εμβαδό ορθογωνίου βάσης 8 τ.μ.

98. Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση
$$x^2+(y-1)^2=5.$$
Να βρείτε:

i) τα σημεία τομής του κύκλου (c) με τον άξονα $x'x$

ii) την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει εστίες τα σημεία που βρήκατε στο ερώτημα **i).**

99. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$
Να βρείτε:

i) τις εστίες και τις κορυφές της έλλειψης (c)

ii) την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης (c) και κορυφές τις εστίες της έλλειψης (c).

100. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση
$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$
Να βρείτε:

i) τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c)

ii) την εξίσωση του κύκλου (c_1) ο οποίος έχει κέντρο τη δεξιά εστία της υπερβολής (c) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

iii) τα σημεία τομής των ασύμπτωτων της υπερβολής (c) με τον κύκλο (c_1).

101. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$9x^2+25y^2=225.$$

Να βρείτε:

i) τις εστίες E' και E της έλλειψης (c)

ii) την εξίσωση της υπερβολής (c_1) η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη (c) και εκκεντρότητα $\varepsilon=2$.

102. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2-y^2=25$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=12$.

i) Να βρείτε τα σημεία P και Σ στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή (c).

ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $P\Sigma$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής (c).

103. Μια υπερβολή (c) έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \text{με}\ \ \alpha,\beta>0$$

και εκκεντρότητα $\varepsilon=3$.

i) Να αποδείξετε ότι $\beta^2=8\alpha^2$.

ii) Αν η υπερβολή (c) διέρχεται από το σημείο $M(2,4)$ να βρείτε:

α) τις τιμές των α και β

β) τις εστίες της υπερβολής.

104. Μία υπερβολή (c) έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ με } \alpha,\beta>0,$$

εστία το σημείο $E(13,0)$ και ασύμπτωτη την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=\frac{5}{12}x.$$

i) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο $E(13,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

iii) Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) και Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι:

α) $(EZ)=\beta$ **β)** $(OZ)=\alpha$.

105. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2-y^2=2.$$

i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της υπερβολής (c).

ii) Αν M είναι τυχαίο σημείο της υπερβολής (c) και Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι

$$(OM)^2=(E'M)\cdot(EM).$$

106. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ με } \alpha,\beta>0$$

η οποία έχει εστίες τα σημεία E', E και εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{5}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta=2\alpha$

ii) αν M είναι σημείο της υπερβολής (c) τέτοιο, ώστε $(ME)=4\alpha>(ME')$ τότε:

α) $(ME')=2\alpha$

β) το τρίγωνο $E'ME$ είναι ορθογώνιο.

107. Δίνεται ο κύκλος (c_1) με εξίσωση

$$(x+5)^2+y^2=16$$

και το σημείο $E(5,0)$.

i) Να βρείτε το κέντρο E' και την ακτίνα ρ_1 του κύκλου (c_1).

ii) Ένας κύκλος (c) διέρχεται από το σημείο Ε και εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου (c_1). Αν Μ είναι το κέντρο του κύκλου (c), να αποδείξετε ότι:

α) $(ME')=4+(ME)$

β) το σημείο Μ ανήκει στο δεξιό κλάδο της υπερβολής

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1.$$

108. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

i) Να βρείτε τις εστίες $E'(-\gamma,0), E(\gamma,0)$ και την εκκεντρότητα ε της υπερβολής (c).

ii) Αν το σημείο $M(x_1,y_1)$ με $x_1>0$ ανήκει στην υπερβολή (c), να αποδείξετε ότι:

α) $(ME')^2-(ME)^2=12x_1$ **β)** $(ME')>(ME)$

γ) $(ME')-(ME)=4$ **δ)** $(ME')=\varepsilon x_1+2$ και $(ME)=\varepsilon x_1-2$.

109. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ με } \alpha,\beta>0$$

η οποία διέρχεται από τα σημεία $P(3,4)$ και $\Sigma\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Να βρείτε:

i) τους α και β

ii) την εκκεντρότητα της υπερβολής (c)

iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο Ρ.

110. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \text{με}\ \ \alpha,\beta>0$$

η οποία έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon=\sqrt{2}$$

και διέρχεται από το σημείο $M(-5,3)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha=\beta=4.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο M.

111. Δίνονται οι υπερβολές (c_1) και (c_2) με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1\quad \text{και}\quad y^2-\frac{x^2}{2}=1$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c_1) στο σημείο $M(2,1)$.

ii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή (c_2).

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

112. Δίνεται το σημείο

$$M\left(t+\frac{1}{t},\,t-\frac{1}{t}\right)\quad \text{με}\quad t\in\mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στην υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

για όλες τις τιμές του $t\in\mathbb{R}^*$.

ii) Για $t=2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο Μ.

113. Έστω η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \text{με}\ \ \alpha,\beta>0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(4,3\sqrt{3}\right)$ και έχει ασύμπτωτη την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=\frac{3}{2}x.$$

i) Να βρείτε τους α και β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της υπερβολής (c) στο σημείο M.

iii) Αν η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο P και η ευθεία $x=4$ τέμνει την ασύμπτωτη (ε) στο σημείο Σ, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων P και Σ

β) να αποδείξετε ότι η ευθεία PΣ είναι κάθετη στην ασύμπτωτη (ε).

114. Μία ισοσκελής υπερβολή (c) με εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma,0)\ \ \text{και}\ \ E(\gamma,0),$$

διέρχεται από το σημείο

$$M\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right).$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο M.

iii) Αν P, Σ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (η) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του PΣ.

115. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής (c) οι οποίες:

i) είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

ii) διέρχονται από το σημείο $P\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

116. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής (c) οι οποίες:

i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$

ii) διέρχονται από το σημείο $P(0, 1)$.

117. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην υπερβολή (c) σε κάποιο σημείο

$$M(x_1, y_1) \text{ με } x_1 > 0 \text{ και } y_1 < 0$$

και σχηματίζει με τους ημιάξονες O_x και O_y ισοσκελές τρίγωνο.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραπάνω ισοσκελούς τριγώνου.

118. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 8$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = -3x + 8.$$

Να αποδείξετε ότι:

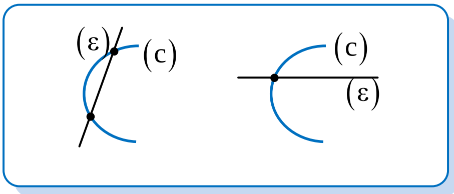
i) η ευθεία (ε) έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την υπερβολή (c)

ii) η ευθεία (ε) εφάπτεται στην υπερβολή (c).

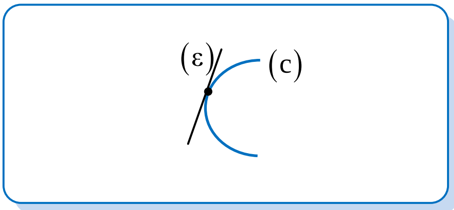
Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής Τομής

Για να βρούμε τη σχετική θέση ευθείας και κωνικής τομής αρκεί να βρούμε πόσες λύσεις έχει το σύστημα των εξισώσεών τους. Η επίλυση αυτού του συστήματος μας οδηγεί στην επίλυση μιας εξίσωσης η οποία είναι το πολύ δεύτερου βαθμού.

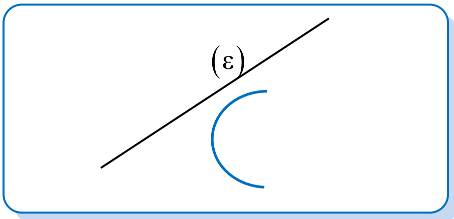
- Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες (όταν είναι δευτέρου βαθμού) ή μία απλή ρίζα (όταν είναι πρώτου βαθμού), τότε η ευθεία τέμνει την κωνική τομή.



- Αν η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή αν είναι δευτέρου βαθμού, με διακρίνουσα $\Delta = 0$, τότε η ευθεία εφάπτεται της κωνικής τομής.



- Αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την κωνική τομή.



Παράδειγμα

Δίνεται η παραβολή $c: y^2 = x$.

- Η ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2$ τέμνει την παραβολή (c), αφού το σύστημα των εξισώσεών τους μας οδηγεί στην πρωτοβάθμια εξίσωση $x = 4$ (απλή ρίζα).
- Η ευθεία $\varepsilon_2 : x = 0$ εφάπτεται της παραβολής (c), αφού το σύστημα των εξισώσεών τους μας οδηγεί στη δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 = 0$ (η οποία έχει διπλή ρίζα).

Λυμένες Ασκήσεις

43. **Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας**

$$\varepsilon: y = x+1$$

και της παραβολής

$$c: y^2 = 4x.$$

Σε περίπτωση που υπάρχουν κοινά σημεία, να βρείτε τις συντεταγμένες τους.

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = x+1 & (\mathbf{1}) \\ y^2 = 4x & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

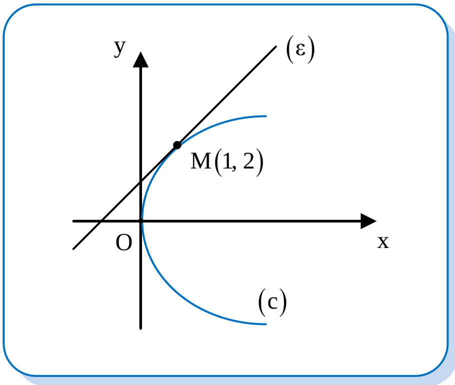
Η εξίσωση **(2)** λόγω της **(1)** γράφεται

$$(x+1)^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την $x=1$. Άρα, η ευθεία (ε) εφάπτεται της παραβολής (c). Το σημείο επαφής είναι το σημείο $M(1,2)$.



44. **Δίνεται η ευθεία**

$$\varepsilon: y = x+\kappa,\ \ \kappa \in \mathbb{R}$$

η οποία τέμνει τον κύκλο

$$c: x^2 + y^2 = 2$$

σε δύο σημεία Α και Β.

i) **Να αποδείξετε ότι**

$$-2 < \kappa < 2.$$

ii) **Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει τετμημένη**

$$x_0 = \frac{1}{2}.$$

Λύση

i) **α΄ τρόπος:**

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$. Η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (c) σε δύο σημεία αν και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)<\rho$$

ή ισοδύναμα

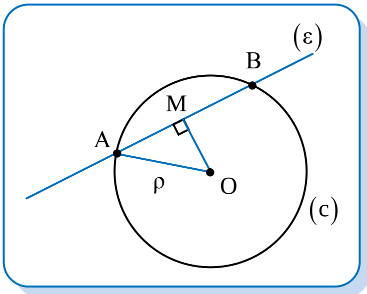
$$\frac{|0-0+\kappa|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{2}\ .$$

Δηλαδή,

$$|\kappa|<2$$

και τελικά

$$-2<\kappa<2.$$



Σημείωση

Μια ευθεία (ε) τέμνει έναν κύκλο (c) σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου (c) από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα του.

β΄ τρόπος:

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=x+\kappa \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γίνεται

$$x^2+(x+\kappa)^2=2 \Leftrightarrow 2x^2+2\kappa x+\kappa^2-2=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (c) σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση **(1)** έχει δύο ρίζες $x_1<x_2$.

Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4\kappa^2-8(\kappa^2-2)>0$$

$$\Leftrightarrow -\kappa^2+4>0$$

$$\Leftrightarrow \kappa\in(-2,2).$$

ii) Γνωρίζουμε ότι οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης

$$2x^2+2\kappa x+\kappa^2-2=0 \qquad \textbf{(1)}$$

είναι οι τετμημένες των σημείων Α και Β. Επίσης, το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι το μέσο του ΑΒ. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x_1+x_2}{2}=x_0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1+x_2=1.$$

Όμως, σύμφωνα με τους τύπους Vieta, ισχύει

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2\kappa}{2}=-\kappa.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$-\kappa=1$$

δηλαδή

$$\kappa=-1.$$

45. **Δίνεται η ευθεία**

$$\boldsymbol{\varepsilon: x+y+\mu=0, \quad \mu\in\mathbb{R}}$$

και η παραβολή

$$\boldsymbol{c: x^2=8y.}$$

Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του μ, τη σχετική θέση της ευθείας (ε) και της παραβολής (c).

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+\mu=0 & \textbf{(1)} \\ x^2=8y & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Για την επίλυση του συστήματος λύνουμε την **(1)** ως προς y, οπότε έχουμε

$$y=-x-\mu,$$

και αντικαθιστούμε στη **(2).** Έτσι, προκύπτει η εξίσωση

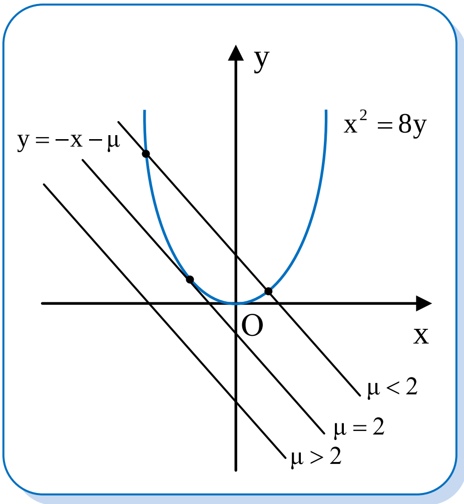
$$x^2=8(-x-\mu) \Leftrightarrow x^2=-8x-8\mu \Leftrightarrow x^2+8x+8\mu=0 \qquad \textbf{(3)}$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta=64-32\mu=32(2-\mu).$$

Έχουμε λοιπόν:

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 32(2-\mu) > 0 \Leftrightarrow \mu < 2$, τότε η εξίσωση **(3)** έχει δύο ρίζες άνισες. Δηλαδή, η ευθεία και η παραβολή τέμνονται σε δύο σημεία.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 32(2-\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = 2$, τότε η εξίσωση **(3)** έχει μία διπλή ρίζα. Δηλαδή, η ευθεία εφάπτεται της παραβολής.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 32(2-\mu) < 0 \Leftrightarrow \mu > 2$, τότε η εξίσωση **(3)** δεν έχει ρίζες. Δηλαδή, η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



46. **Δίνεται το σημείο $M(0,5)$ και η έλλειψη (c) με εξίσωση**

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο M και εφάπτεται της έλλειψης (c) σχηματίζοντας οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
Να βρείτε:
i) την εξίσωση της ευθείας (ε)
ii) τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
Επομένως, έχει συντελεστή διεύθυνσης

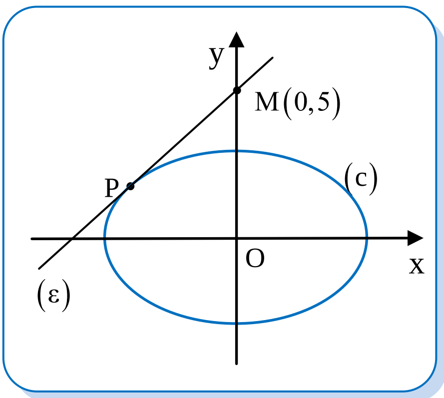
$$\lambda > 0.$$

Και επειδή διέρχεται από το σημείο

$$M(0,5)$$

έχει εξίσωση

$$y - 5 = \lambda(x - 0)$$
$$\Leftrightarrow y = \lambda x + 5.$$



Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x + 5 \\ \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1. \end{cases}$$

Θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, όπου

$$y = \lambda x + 5,$$

οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{20} + \frac{(\lambda x + 5)^2}{5} = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4(\lambda x + 5)^2 = 20$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4\left(\lambda^2 x^2 + 10\lambda x + 25\right) = 20$$
$$\Leftrightarrow \left(4\lambda^2 + 1\right)x^2 + 40\lambda x + 80 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Πρόκειται για εξίσωση δευτέρου βαθμού, αφού

$$4\lambda^2 + 1 > 0, \text{ για κάθε } \lambda > 0$$

με διακρίνουσα

$$\Delta = 40^2\lambda^2 - 4 \cdot 80\left(4\lambda^2 + 1\right) = 320\left(\lambda^2 - 1\right).$$

Και επειδή η ευθεία (ε) εφάπτεται της έλλειψης (c) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση **(1)** έχει μια διπλή ρίζα. Δηλαδή,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 320\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

αφού $\lambda > 0$.
Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$y = x + 5.$$

ii) Αποδείξαμε ότι $\lambda = 1$.
Οπότε, η εξίσωση **(1)** γράφεται

$$5x^2 + 40x + 80 = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + 8x + 16\right) = 0 \Leftrightarrow 5(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Επομένως,

$$y = -4 + 5 = 1.$$

Άρα, το σημείο επαφής της ευθείας (ε) με την έλλειψη (c) είναι το σημείο

$$P(-4,1).$$

47. **Δίνεται η υπερβολή**

$$c: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

i) **Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).**

ii) **Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες της (c) τέμνει τη (c) σε ένα ακριβώς σημείο.**

Λύση

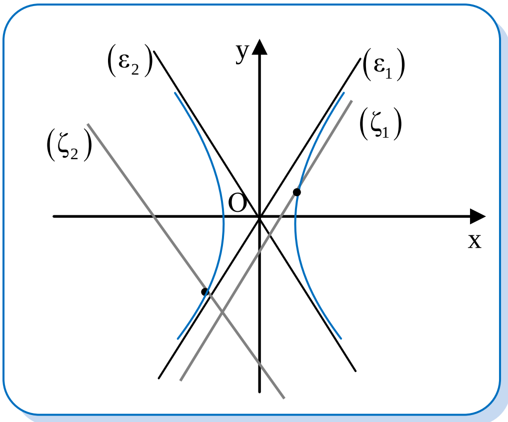
i) Οι ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής (c) έχουν εξισώσεις

$$x - \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

και

$$x + \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

αντίστοιχα.



ii) Οι ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -2 αντίστοιχα. Επομένως, κάθε ευθεία παράλληλη στην (ε_1) ή στην (ε_2) έχει αντίστοιχα εξίσωση της μορφής

$$\zeta_1 : y = 2x + \kappa \quad \text{και} \quad \zeta_2 : y = -2x + \kappa, \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}^*.$$

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας (ζ_1) με την υπερβολή (c) είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2x + \kappa \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γίνεται

$$x^2 - \frac{(2x+\kappa)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - (2x+\kappa)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - \left(4x^2 + 4\kappa x + \kappa^2\right) = 1 \Leftrightarrow -4\kappa x - \kappa^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -4\kappa x = \kappa^2 + 1$$

Και επειδή $\kappa \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι η τελευταία εξίσωση (πρώτου βαθμού) έχει μία ρίζα (απλή) την

$$x = \frac{\kappa^2+1}{-4\kappa}.$$

Άρα, η ευθεία (ζ_1) τέμνει την υπερβολή (c) μόνο στο σημείο με τετμημένη

$$x = -\frac{\kappa^2+1}{4\kappa}$$

και τεταγμένη

$$y = 2\left(-\frac{\kappa^2+1}{4\kappa}\right) + \kappa = \frac{\kappa^2-1}{2\kappa}.$$

Ομοίως, η ευθεία (ζ_2) τέμνει την υπερβολή (c) μόνο στο σημείο με τετμημένη

$$x = \frac{\kappa^2+1}{4\kappa}$$

και τεταγμένη

$$y = -2\frac{\kappa^2+1}{4\kappa} + \kappa = \frac{\kappa^2-1}{2\kappa}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

119. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon : y = x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

η οποία εφάπτεται της παραβολής

$$c : y^2 = 16x.$$

Να βρείτε:

i) την τιμή του κ **ii)** το σημείο επαφής.

120. Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και εφάπτεται της παραβολής

$$c: y^2 = 4x.$$

Να βρείτε:

i) την τιμή του λ **ii)** το σημείο επαφής.

121. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon: \ y = 6x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

και η παραβολή

$$c: y = x^2.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία.

ii) Για τη μικρότερη ακέραια από τις τιμές του κ που βρήκατε στο ερώτημα **i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο σημείων τομής.

122. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon: \ y = 2x + 1$$

η οποία εφάπτεται της παραβολής

$$c: \ y^2 = 2px.$$

Να βρείτε:

i) την τιμή της παραμέτρου p

ii) τις συντεταγμένες του σημείου επαφής της (ε) με τη (c).

123. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon: y = \lambda x + 3, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

και η παραβολή

$$c: y^2 = 12x.$$

Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ, τη σχετική θέση της ευθείας (ε) και της παραβολής (c).

124. Να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\varepsilon: y = \alpha x + \alpha$$

εφάπτεται της παραβολής

$$c: y^2 = 2px$$

αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $p = 2\alpha^2$.

125. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon : y = \lambda x + \beta, \quad \lambda > 0$$

ο κύκλος

$$c_1 : x^2 + (y-3)^2 = 8$$

και η παραβολή

$$c_2 : x^2 = 4y.$$

i) Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου (c_1), να αποδείξετε ότι

$$(\beta - 3)^2 = 8(\lambda^2 + 1).$$

ii) Να βρείτε τις τιμές των λ και β έτσι, ώστε η ευθεία (ε) να είναι κοινή εφαπτομένη των κωνικών (c_1) και (c_2).

126. Να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\varepsilon : x + 2y - 5 = 0$$

εφάπτεται της έλλειψης

$$c : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ποιο είναι το σημείο επαφής;

127. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon : \ y = \lambda x + \beta \quad \text{με} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

και η υπερβολή

$$c : \ x^2 - y^2 = 8.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του λ έτσι, ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει την υπερβολή (c) σε ένα μόνο σημείο.

ii) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\zeta : y = 3x$$

και εφάπτεται της υπερβολής (c), να βρείτε τις τιμές των λ και β.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

2. Ποιος κύκλος λέγεται μοναδιαίος ;

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

4. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\left(x-x_0^2\right)+\left(y-y_0^2\right)=\rho^2$.

5. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad \textbf{(1)}$$

και αντιστρόφως, καθε εξίσωση της μορφής **(1)** παριστάνει κύκλο.

6. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

7. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

8. Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$;

9. Ποιες ελλείψεις ονομάζονται όμοιες;

10. Να δώσετε την ορισμό της υπερβολής.

11. Πότε η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ λέγεται ισοσκελής ;

12. Ποιες είναι οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$;

13. Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$;

14. Να διατυπώσετε την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο. Σ Λ

2. Η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-\frac{p}{2}$ είναι $y^2=2px$. Σ Λ

3. Σε κάθε παραβολή η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται άξονας της παραβολής. Σ Λ

4. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1=2p(x+x_1)$. Σ Λ

5. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$. Σ Λ

6. Σε κάθε έλλειψη η ευθεία που ενώνει τις εστίες της E', E και η μεσοκάθετος του $E'E$ είναι άξονας συμμετρίας της έλλειψης. Σ Λ

7. Σε κάθε έλλειψη με εστίες τα σημεία E', E το μέσο του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης και λέγεται κέντρο της έλλειψης Σ Λ

8. Για την εκκεντρότητα ε κάθε έλλειψης ισχύει $0<\varepsilon<1$. Σ Λ

9. Όταν η εκκεντρότητα ε μιας έλλειψης τείνει στο μηδέν, η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ

10. Όταν η εκκεντρότητα ε μιας έλλειψης τείνει στη μονάδα, η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα. Σ Λ

11. Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha}+\frac{yy_1}{\beta}=1$. Σ Λ

12. Σε κάθε υπερβολή η εστιακή απόσταση είναι μικρότερη από τη σταθερή διαφορά. Σ Λ

13. Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$. Σ Λ

14. Σε κάθε υπερβολή η ευθεία που ενώνει τις εστίες της E', E και η μεσοκάθετη του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής Σ Λ

15. Σε κάθε υπερβολή με εστίες E', E το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της και λέγεται κέντρο της υπερβολής. Σ Λ

16. Κάθε υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους. Σ Λ

17. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\alpha}{\beta}x$, $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$. Σ Λ

18. Κάθε ισοσκελής υπερβολή έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y=x \text{ και } y=-x.$$

Σ Λ

19. Υπάρχει υπερβολή με εκκεντρότητα $\varepsilon=1$. Σ Λ

20. Κάθε ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=2$. Σ Λ

21. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$. Σ Λ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου

$$c : x^2 + y^2 = \rho^2$$

στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2.$$

Α2. Έστω μια ευθεία (δ) και ένα σημείο E εκτός της (δ). Τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία (δ);

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0.$$

β) Η εφαπτομένη της παραβολής

$$y^2 = 2px$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = 2p(x + x_1).$$

γ) Όσο μεγαλύτερη είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη.

δ) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x.$$

ε) Υπάρχουν μία έλλειψη και μία υπερβολή που έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

Θέμα Β

Δίνεται η παραβολή

$$c_1 : y^2 = 2x$$

και η έλλειψη

$$c_2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Β1. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c_1).

Β2. Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης (c_2).

Β3. Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κωνικών τομών είναι τα σημεία $P\left(1, \sqrt{2}\right)$ και $\Sigma\left(1, -\sqrt{2}\right)$.

Β4. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των δύο παραπάνω κωνικών τομών στο σημείο $P\left(1, \sqrt{2}\right)$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Θέμα Γ

Δίνεται υπερβολή (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία $A'(-1, 0)$, $A(1, 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (c).

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).

Γ3. Μια ευθεία (η) διέρχεται από την κορυφή $A(1, 0)$ της υπερβολής (c) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq \pm\sqrt{3}$.
Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την υπερβολή (c), εκτός από το σημείο Α.

Θέμα Δ

Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \lambda(3x - y), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).

Δ2. Ποιο είναι το κέντρο και ποια είναι η ακτίνα του κύκλου (c);

Δ3. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία. Ποια είναι η εξίσωση αυτής της ευθείας;

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο.

Δ5. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο. Ποια είναι η εξίσωση αυτής της εφαπτομένης;

Θέματα για Επανάληψη

«Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί ιδιαίτερο επίτευγμα της νόησης και η νόηση είναι το ιδιαίτερο χάρισμα του ανθρώπου. Η επίλυση προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως η πιο χαρακτηριστική ανθρώπινη ιδιότητα.»

George Polya

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}.$$

Αν οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Κ, τότε:

i) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{EZ}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$$

ii) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\vec{\alpha} + \mu\overrightarrow{EZ}$$

iii) να βρείτε τις τιμές των λ και μ

iv) να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{EZ}.$$

2. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\sqrt{2}\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|$$

και

$$2\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right|$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$2\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2 = 4\left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right| - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

ii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = 1$, να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

3. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \sqrt{2}|\vec{\alpha}|.$$

Αν η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **ii)** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

iii) $|3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}| = 5|\vec{\alpha}|$.

4. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \nu, \quad \text{όπου} \quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι θετικός ακέραιος αριθμός, να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \nu$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}$

iii) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = \sqrt{\nu^2+2}$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = -\frac{1}{2\nu}$.

5. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$$

και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -3.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma} = \vec{0}$ **ii)** $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

iii) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ **iv)** $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$.

6. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|2\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

iii) $\vec{\beta}=4\vec{\alpha}$ **iv)** $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}$

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+13=4|\vec{\alpha}|+6|\vec{\beta}| \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$

ii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

iii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

iv) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma}=9\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$$

όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}|=4\sqrt{7}$$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$

ii) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ.

iii) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

iv) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$.

9. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

- $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$
- $(\vec{\alpha}, \hat{\ } \vec{\beta}) = \dfrac{2\pi}{3}$
- $(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) // \vec{\beta}$
- $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$.

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}.$$

iii) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

iv) Να βρείτε τη γωνία θ των διανσυμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

10. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Αν για κάποιο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει η σχέση $(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}) \perp \vec{\alpha}$, τότε:

α) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$$

γ) να βρείτε την τιμή του λ έτσι, ώστε $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 4$.

11. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|, \quad \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \neq \vec{\beta}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\vec{\gamma} // \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right).$$

iii) Αν ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 9,$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \neq \vec{0}$

β) να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

12. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1$$

και η συνάρτηση

$$f(x) = \left|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}\right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\text{συν}\theta\cdot x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) \geq \left|\text{ημ}\theta\right|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) αν ο αριθμός 0 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f, τότε

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = -\vec{\beta}.$$

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, $A(3,1)$ και τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = (1,2).$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

ii) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΟΑΒΓ.

iii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$.

iv) Αν B' είναι το συμμετρικό του σημείου Β ως προς τον άξονα $x'x$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OB'}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$.

14. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x + (2\lambda + 1)y + 1 = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_λ) για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε ποια από τις ευθείες (ε_λ) είναι κάθετη στην ευθεία $\eta : y = 3x$.

iv) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία (ε_λ) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\zeta : x + 2y + 1 = 0$.

15. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4y + 3 = 0 .$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ii) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

iii) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(0,2)$ και $B(-1,-3)$ το οποίο έχει κέντρο το σημείο $K(\alpha,0)$ του θετικού ημιάξονα Οx.

i) Να βρείτε συναρτήσει του α τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ.

ii) Αν το εμβαδό του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ είναι 24 τ.μ., να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας ΓΔ

β) το σημείο της ευθείας ΓΔ που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $E(1,9)$.

17. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με $A(0,2)$, $B(1,0)$ και τέτοιο, ώστε το κέντρο του Κ να βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Κ

ii) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ

iii) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ΓΔ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

18. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$y = x + 1 \quad \text{και} \quad y = 2x + 1.$$

i) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $K(2,4)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι

$$x_1 + x_2 = x_1x_2.$$

β) Αν η αρχή των αξόνων Ο, το σημείο Κ και το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ είναι συνευθειακά σημεία, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

19. Δίνεται η εξίσωση

$$x + \lambda y - 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_λ) η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση $d(\lambda)$ της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε_λ).

iii) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της απόστασης $d(\lambda)$ είναι ίση με $\sqrt{5}$.

iv) Να βρείτε την ευθεία (ε_λ) για την οποία η απόσταση $d(\lambda)$ γίνεται μέγιστη.

20. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2 - \alpha + 1)x + (2 - 5\alpha)y + (2\alpha^2 + 3\alpha) = 0$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_α).

ii) Να αποδείξετε ότι μόνο μία από τις ευθείες (ε_α) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε_0) και (ε_1).

iv) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η κορυφή Β έχει συντεταγμένες $(-2,-5)$, ενώ το ύψος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ έχουν εξισώσεις

$$x+3y-7=0 \quad \text{και} \quad y=5x-3$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ

ii) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

iii) το μήκος του ύψους ΑΔ

iv) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

22. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2-\alpha)x+(\alpha^2+\alpha-2)y-(\alpha^2-3\alpha+2)=0$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_α).

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε την ευθεία (ε_α) που διέρχεται από το σημείο $K(1,1)$.

iv) Να βρείτε την ευθεία (ε_α) η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία

$$\eta:\ x-3y+2=0.$$

23. Δίνονται τα σημεία

$$M(2,-1),\ A(\alpha,0) \quad \text{και} \quad B(0,\beta) \quad \text{με} \quad \alpha,\beta>0$$

τέτοια, ώστε $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$ όπου Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να αποδείξετε ότι $2\alpha+\beta=4$.

ii) Να βρείτε τα α και β έτσι, ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ να γίνεται μέγιστο.

iii) Αν είναι $\alpha=1$ και $\beta=2$, να βρείτε το σημείο της ευθείας ΑΒ το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

24. Δίνονται τα σημεία

$$A(0,4),\quad B(3,7)\quad \text{και}\quad M(\kappa-1,\kappa+1)\ \text{ με }\ \kappa\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Μ αποτελούν κορυφές τριγώνου το οποίο έχει σταθερό εμβαδό.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ κινείται σε σταθερή ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε το συμμετρικό B' του σημείου Β ως προς την ευθεία (ε).

iv) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ έτσι, ώστε τα σημεία Α, Μ και B' να είναι συνευθειακά.

v) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $(AM)+(MB)$.

25. Δίνεται η εξίσωση

$$(\mu^2+1)x+(\mu+1)y-3\mu^2-4\mu-7=0,\quad \mu\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_μ) για κάθε τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$

ii) δεν υπάρχει ευθεία (ε_μ) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

iii) όλες οι ευθείες (ε_μ) διέρχονται από το ίδιο σημείο

iv) κάθε ευθεία (ε_μ) τέμνει τον κύκλο $c: x^2+y^2=36$ σε δύο σημεία.

26. Δίνεται το σημείο $A(3,4)$. Επίσης, δίνεται σημείο Μ τέτοιο, ώστε

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+75=4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Να βρείτε:

i) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ

ii) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του (OM)

iii) το σημείο του παραπάνω γεωμετρικού τόπου που βρίσκεται πλησιέστερα στον άξονα $x'x$.

27. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda+1)y=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων (c_λ) είναι συνευθειακά σημεία.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ο κύκλος (c_λ) είναι μοναδιαίος.

iv) Αν η ευθεία $\varepsilon: x+y-3=0$ τέμνει τον κύκλο (c_λ) σε δύο σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OE}=0$ όπου Ο η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

28. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+4x+2\text{συν}\theta\cdot y-4\text{συν}\theta=0,\quad \theta\in(0,2\pi).$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου (c_θ) για κάθε $\theta\in(0,2\pi)$.

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c_θ).

iii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το εμβαδό του κύκλου (c) γίνεται ελάχιστο.

iv) Για $\theta=\pi$, να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (c_θ) που άγονται από την αρχή των αξόνων

β) την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο (c_θ).

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το σημείο $A(1,3)$ και εμβαδό $E<4$.

Αν οι κορυφές Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(0,E)$ και $(E,0)$ αντίστοιχα, να βρείτε:

i) το εμβαδό Ε

ii) τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ

iii) την εξίσωση του κύκλου (c) που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ

iv) την ελάχιστη απόσταση σημείου Μ που διαγράφει τον κύκλο (c), από την ευθεία $\varepsilon: 6x+8y-41=0$.

30. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1: x^2+y^2=1 \quad \text{και} \quad c_2:(x-4)^2+y^2=25.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) εφάπτονται εσωτερικά.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των παραπάνω κύκλων.

iii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο (c_1) και εσωτερικά στον κύκλο (c_2) και έχει το κέντρο του πάνω στη διάκεντρο των κύκλων αυτών.

31. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1: x^2+y^2-8x-4y+4=0$$

και

$$c_2: x^2+y^2-12y+20=0.$$

i) Να βρείτε τα κέντρα Κ, Λ και τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 των κύκλων (c_1), (c_2) αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται σε δύο σημεία Δ και Ε.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΔΕ.

iv) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΚΕΛ είναι τετράγωνο.

32. Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2\lambda(x+2y-5), \quad \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων (c_λ) και να αποδείξετε ότι τα κέντρα ανήκουν σε σταθερή ευθεία.

iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι (c_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iv) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι (c_λ) εφάπτονται της ευθείας

$$\varepsilon: x+2y-5=0.$$

33. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: 12-5y=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 3x+4y=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι οι ευθείες

$$\delta_1: 3x-11y=0 \quad \text{και} \quad \delta_2: 11x+3y=0.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα $\rho=9$, εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας (δ_1).

iii) Αν A και B είναι τα σημεία επαφής του παραπάνω κύκλου με τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα και O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι

$$(OA)=(OB)=7.$$

34. Δίνεται η παραβολή $c: y^2=4x$ και το σημείο $A(-1,0)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) που άγονται από το σημείο A.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής B και Γ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με την εφαπτομένη της παραβολής (c) στην κορυφή της.

iii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ διέρχεται από την εστία της παραβολής (c) και εφάπτεται στη διευθετούσα της.

35. Δίνεται η παραβολή $c_1: y^2=2\alpha x$ και ο κύκλος $c_2: x^2+y^2=3\alpha^2$ με $\alpha>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η παραβολή (c_1) και ο κύκλος (c_2) τέμνονται σε δυο ακριβώς σημεία από τα οποία το ένα είναι το $A\left(\alpha, \alpha\sqrt{2}\right)$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) του κύκλου (c_2) στο A και το σημείο τομής της Γ με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της παραβολής (c_1) στο A και το σημείο τομής της Δ με τον άξονα $x'x$.

iv) Να βρείτε την τιμή του α ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΓΔ να είναι $8\sqrt{2}$.

36. Δίνεται η εξίσωση

$$2x^2+2y^2-\alpha^2x-4\alpha y+\alpha^2-2=0,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_α) για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του (c_α);

ii) Τα κέντρα K των κύκλων (c_α) είναι σημεία μιας παραβολής (c).

Ποια είναι η εστία και ποια η διευθετούσα της (c);

iii) Όλοι οι κύκλοι (c_α) έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο που είναι η εστία της παραβολής (c).

iv) Όλοι οι κύκλοι (c_α) έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη. Ποια είναι η εξίσωσή της;

37. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-8(\text{συν}\theta)x+10(\text{ημ}\theta)y=0 \quad \text{όπου } \theta\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με ακτίνα $\rho\geq 4$.

ii) Να αποδείξετε ότι το κέντρο του παραπάνω κύκλου ανήκει στην έλλειψη

$$c:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$$

iii) Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

iv) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη (c) και σταθερή διαφορά 4.

38. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y=\frac{1}{8}x^2$$

το σημείο της $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\alpha^2\right)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x-y-4=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε) είναι

$$d(\alpha)=\frac{\alpha^2-8\alpha+32}{8\sqrt{2}} \quad \text{για κάθε} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$d(\alpha)\geq\sqrt{2} \quad \text{για κάθε} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ έτσι, ώστε η απόσταση $d(\alpha)$ να γίνεται ελάχιστη.

iv) Αν η απόσταση $d(\alpha)$ γίνει ελάχιστη, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής (c) στο σημείο Μ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

39. Δίνεται η έλλειψη

$$c:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad \text{με} \qquad \alpha>\beta>0$$

η οποία έχει μήκος μεγάλου άξονα 8 και διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$.

i) Να βρείτε τους α και β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης (c) στο σημείο της Μ.

iii) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$\frac{x}{8}-\frac{y}{4}=1 \qquad \text{και} \qquad \frac{x}{8}+\frac{y}{4}=-1$$

εφάπτονται στην έλλειψη (c).

40. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{12}=1, \quad \alpha>0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

ii) Να βρείτε τις εστίες E' και E καθώς επίσης και την εκκεντρότητα ε της έλλειψης (c).

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης (c) σ' αυτό το σημείο.

iv) Αν η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{(\text{ΕΓ})}{(\text{ΕΜ})}=\varepsilon$ **β)** $(\text{ΜΓ})^2=\dfrac{3}{4}(\text{ΕΜ})\cdot(\text{Ε}'\text{Μ})$.

41. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

και ένα σημείο της $M(x_1,y_1)$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Κ και Λ της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο Μ με τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

iv) Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\text{ΟΚ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΟΛ}}$ είναι σταθερό.

v) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ είναι σταθερό.

42. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1$$

και το σημείο της $M(2,1)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c) στο σημείο Μ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε τα σημεία Ρ και Σ στα οποία οι ευθείες (ε) και (η) αντίστοιχα τέμνουν τον άξονα $y'y$.

iv) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΡΣ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής (c).

Απαντήσεις

«... τα μαθηματικά προσεγγίζονται και
από τη "μαγική" μέθοδο του νου, την ενόραση,
ενώ η απόδειξη είναι συχνά απλώς ο έλεγχος
των προϊόντων της ενόρασης.»

Νίκος Ταμπάκης

Διανύσματα

Η Έννοια του Διανύσματος Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

1. **i)** 60° **ii)** 60°
iii) 120° **iv)** 90°

2. **i)** 30° **ii)** 150°
iii) 120° **iv)** 60°

3. **i)** $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

ii) $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

iii) $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$.

4. Έχουμε

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ} =$$
$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OE}$$
$$= \left(\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{O\Gamma}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE}\right)$$
$$= \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma Z} + \overrightarrow{EB}.$$

5. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{ZE}$

$$= \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{E\Delta}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}.$$

6. Έχουμε

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Άρα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Έχουμε

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{Z\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{Z\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Και επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{Z\Delta}$. Άρα, το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

8. **i)** Έχουμε $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$

και $\left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|$.

Επομένως

$$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|.$$

Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

ii) Έχουμε

$$\left|\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right|^2 = \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2.$$

Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΓ.

9. **i)** Έχουμε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$.

Επομένως, $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = \left|-\vec{\gamma}\right| = \left|\vec{\gamma}\right|$.

Όμως, $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$.

ii) Έχουμε $\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \ge \left|\vec{\gamma}\right| > 2\left|\vec{\alpha}\right|$.

Άρα, $\left|\vec{\beta}\right| > \left|\vec{\alpha}\right|$.

10. **i)** Έχουμε $\left|\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|\right| \le \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$.

ii) Με απαγωγή σε άτοπο και αξιοποίηση του ερωτήματος **i)**

11. Παρατηρούμε ότι

$$\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) + \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right).$$

Επίσης,

$$\left|\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| - \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right|\right| \le \left|\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) + \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)\right|$$
$$\le \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| + \left|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right|.$$

Δηλαδή,

$$\left|2 - 5\right| \le \left|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\right| \le 2 + 5.$$

Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

12. Έχουμε

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}-\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{\Sigma B}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{A\Sigma}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{B\Sigma}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P\Sigma}+\overrightarrow{P\Sigma}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{P\Sigma}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P\Sigma}=\vec{O}\,.$$

Άρα, τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

13. Έχουμε

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{M\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}=\vec{0}.$$

14. Έχουμε

$$\overrightarrow{A\Delta}+2\overrightarrow{B\Delta}+3\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$
$$=\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)+2\overrightarrow{B\Delta}+2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$
$$=\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)+2\left(\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)$$
$$=\overrightarrow{A\Gamma}+2\overrightarrow{B\Gamma}.$$

15. i) $\vec{x}=4\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=4\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma}=-12\vec{\alpha}+15\vec{\beta}=-3\left(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\right)=-3\overrightarrow{AB}.$$

16. i) Έχουμε

$$|\vec{\alpha}|=\left||\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

και $\quad |\vec{\beta}|=\left||\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}\right|=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\,.$

Άρα, $\quad |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|.$

ii) Έχουμε $\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}.$

Επομένως, $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\,.$

Και επειδή $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, συμπεραίνουμε

$\vec{\alpha}=\vec{\beta}.$

17. i) Έχουμε $(B\Delta)=\frac{2}{5}(\Delta\Gamma).$

Δηλαδή, $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\frac{2}{5}\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|.$ **(1)**

Επίσης, $\overrightarrow{B\Delta}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

και συνεπώς $\overrightarrow{B\Delta}\uparrow\uparrow\frac{2}{5}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$5\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Δηλαδή,

$$5\left(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$5\left(\vec{x}-\vec{\alpha}\right)=2\left(\vec{\beta}-\vec{x}\right).$$

18. Έχουμε $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{\Gamma E}=2\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=2\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=2\overrightarrow{A\Gamma}.$

Άρα, $\overrightarrow{\Gamma E}\,//\,\overrightarrow{A\Gamma}$ και επομένως τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

19. Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}$$
$$=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{B\Delta}$$
$$=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-\vec{\alpha}-\left(\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)=2\vec{\alpha}.$$

Επομένως, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$

20. Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$$

και $\quad \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=15\vec{\alpha}-6\vec{\beta}\,.$

Άρα, $\quad \overrightarrow{B\Gamma}=3\overrightarrow{AB}.$

21. Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$.

Άρα, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

22. i) Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{B\Gamma}-3\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\right)$$

$$-3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{O\Gamma}-4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{O\Gamma}=4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Θεωρώντας ως Ο το σημείο Α παίρνουμε

$$5\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}.$$

Άρα,

$$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}.$$

23. i) Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}+4\left(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OB}\right)+7\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Lambda}\right)+8\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right).$$

ii) Αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{OK}=8\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{O\Lambda}.$$

Παίρνοντας ως Ο το σημείο Λ έχουμε

$$5\overrightarrow{\Lambda K}=8\overrightarrow{\Lambda M}$$

δηλαδή $\overrightarrow{\Lambda K}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{\Lambda M}.$

Επομένως, $\overrightarrow{\Lambda K}//\overrightarrow{\Lambda M}.$

24. i) Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$

$$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}+2\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OM}\right).$$

ii) Αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε ως Ο το σημείο Μ παίρνουμε

$$2\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{M\Gamma}.$$

25. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει $3\overrightarrow{OK}=4\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda}$ και στη συνέχεια θέτοντας όπου Ο το Λ βρίσκουμε

$$\overrightarrow{\Lambda K}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\Lambda M}.$$

26. i) Από τις διάφορες ισότητες, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$(1+\lambda)\overrightarrow{AB}+(1+\lambda)\overrightarrow{A\Delta}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 1+\lambda=0,\quad \text{αφού } \overrightarrow{A\Gamma}\neq\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-1.$$

ii) Αντικαθιστώντας την τιμή του λ που βρήκαμε έχουμε

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{MB}.$$

27. i) Έχουμε $\overrightarrow{AE}=\kappa\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$.

Επομένως $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}$

ή ισοδύναμα $\overrightarrow{\Delta E}=\kappa\overrightarrow{AB}$

και τελικά $\overrightarrow{\Delta E}=\kappa\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Άρα $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ii) κ = 2.

28. i) Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\overrightarrow{AK}+\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{B\Lambda}+\lambda\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}+\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Lambda}+\lambda\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}+\lambda\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\Lambda}+\lambda\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{A\Lambda}=\lambda\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AK}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda K}=\lambda\overrightarrow{KM}$$

ii) $\lambda=-2$

29. Από τις δοθείσες ισότητες, αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(2\mu+\lambda)\overrightarrow{A\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(2\mu+\lambda)\overrightarrow{A\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow (\mu-\lambda)\overrightarrow{AB}=(2\mu+\lambda-1)\overrightarrow{A\Gamma}$$

Με απαγωγή σε άτοπο και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$ βρίσκουμε ότι $\mu-\lambda=0$ και $2\mu+\lambda-1=0$.

30. Η δοθείσα ισότητα γράφεται

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Delta}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)-\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1)\overrightarrow{AB}=(2-\mu)\overrightarrow{A\Delta} \qquad \textbf{(1)}$$

Αν $\lambda\neq 1$, τότε από την **(1)** προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{AB}=\frac{2-\mu}{\lambda-1}\overrightarrow{A\Delta},$$

οπότε $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Delta}$, άτοπο. Επομένως, $\lambda=1$. Ομοίως βρίσκουμε $\mu=2$.

31. i) Με απαγωγή σε άτοπο.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\lambda\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow (1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}.$$

32. Έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{\Gamma M}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{M\Gamma}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}.\end{aligned}$$

33. i) Έχουμε $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Επίσης $2\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{E\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Gamma E}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad\text{και}\quad 2\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Gamma E}.$$

Επομένως

$$\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BA}=3\left(\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Delta E}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta E}.$$

34. Από τις δοθείσες σχέσεις αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{E\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}.$$

35. Από τις δοθείσες σχέσεις αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{E\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}.$$

36. i) Από τη δοθείσα σχέση παρατηρώντας ότι

$$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta} \quad\text{και}\quad \overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}.$$

ii) Από τη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** με απαγωγή σε άτοπο.

37. i) Έχουμε

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=2\overrightarrow{OB}.$$

ii) Από τη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** με απαγωγή σε άτοπο.

38. i) Από τις δοθείσες σχέσεις προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=(\lambda+5)\overrightarrow{AB}.$$

Και επειδή $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ συμπεραίνουμε ότι $1=\lambda+5$, δηλαδή $\lambda=-4$.

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{A\Gamma}=-4\overrightarrow{AB} \quad\text{και}\quad \overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{AB}.$$

Άρα,

$$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}=-2\overrightarrow{AB}.$$

39. Έχουμε

$$\left||\vec{\alpha}|-|5\vec{\beta}|\right|\leq|\vec{\alpha}+5\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|5\vec{\beta}|.$$

Δηλαδή

$$\left||\vec{\alpha}|-5|\vec{\beta}|\right|\leq|\vec{\alpha}+5\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+5|\vec{\beta}|$$

ή ισοδύναμα

$$|1-5\cdot 1|\leq|\vec{\alpha}+5\vec{\beta}|\leq 1+5\cdot 1$$

και τελικά

$$4\leq|\vec{\alpha}+5\vec{\beta}|\leq 6.$$

40. i) $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=-2\vec{\gamma}$

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-2\vec{\gamma}|=2|\vec{\gamma}|$

και

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

41. Έχουμε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.
Επομένως,
$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|(\lambda+1)\vec{\beta}\right|=|\lambda+1|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$$
και $$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\left|(\lambda-1)\vec{\beta}\right|=|\lambda-1|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$$

i) Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\lambda>0$, οπότε
$$|\lambda+1|>|\lambda-1|.$$

i) Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\lambda<0$, οπότε
$$|\lambda+1|<|\lambda-1|.$$

42. Έχουμε
$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{Z\Gamma}$$
$$=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{\Delta Z}.$$

43. i) $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$, $\overrightarrow{E\Delta}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\frac{1}{6}\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{EB}=\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\beta}$.

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

44. i) $\overrightarrow{A\Delta}=-2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{BE}=-\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{\Gamma Z}=\frac{7}{4}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

45. i) $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{10}\vec{\alpha}+\frac{3}{10}\vec{\beta}$, $\overrightarrow{BE}=-\frac{7}{10}\vec{\alpha}+\frac{3}{10}\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{BZ}=-\vec{\alpha}+\frac{3}{7}\vec{\beta}$.

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει ότι
$$\overrightarrow{BE}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BZ}.$$

46. i) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

ii) Παρατηρούμε ότι
$$\overrightarrow{AZ}=3\overrightarrow{AE},\quad \text{άρα}\quad \overrightarrow{AZ}//\overrightarrow{AE}.$$

47. i) Με απαγωγή σε άτοπο.
ii) Με απαγωγή σε άτοπο.

48. Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{0}=\vec{0}.$$

49. Έχουμε $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{O\Delta}=2\overrightarrow{OZ}$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=2\overrightarrow{OZ}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OZ}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=4\overrightarrow{OZ}.$$

50. i) Έχουμε
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{AZ}+2\overrightarrow{\Gamma Z}$$
$$=-2\left(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{Z\Gamma}\right)=-2\left(2\overrightarrow{ZE}\right)$$
$$=-4\overrightarrow{ZE}=4\overrightarrow{EZ}.$$

ii) Από τη δοθείσα σχέση και τη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** προκύπτει ότι:
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

51. i) Έχουμε
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}=2\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{M\Delta}$$
$$=2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{M\Delta}\right)=2\left(2\overrightarrow{M\Lambda}\right)=4\overrightarrow{M\Lambda}.$$

ii) Έχουμε
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}=4\overrightarrow{M\Lambda}.$$
και
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}$$
$$=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M\Delta}\right)+\left(\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}\right)$$
$$=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\overrightarrow{\Delta K}.$$
Επομένως, η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται
$$\left|4\overrightarrow{M\Lambda}\right|=\left|2\overrightarrow{\Delta K}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{M\Lambda}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\Delta K}\right|.$$

iii) α) Η ευθεία που διέρχεται από το Λ και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{AB}$.

β) Η μεσοκάθετος του τμήματος ΛΑ.

Συντεταγμένες στο Επίπεδο

52. **i)** $d(A, x'x) = 5$, $d(A, y'y) = 2$

$d(B, x'x) = 3$, $d(B, y'y) = 4$

$d(\Gamma, x'x) = 2$, $d(\Gamma, y'y) = 1$

$d(\Delta, x'x) = |\beta - 2|$, $d(\Delta, y'y) = |\alpha|$.

53. $x = 2$ και $y = 4$.

54. **i)** $\mu = 1$ **ii)** $\mu = 3$.

55. $\lambda = 7$ και $\mu = 5$.

56. **i)** $\vec{u} = (-1, 7)$ **ii)** $\vec{v} = (0, 10)$

57. $\kappa = 2$ και $\lambda = -1$.

58. $x = 3$ και $y = 8$.

59. **i)** $B(1, 4)$

ii) $K(-10, 0)$

60. Έστω $\Delta(x, y)$. Ισχύει

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow (6, 2) = 2(4 - x, 5 - y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2(4 - x) \\ 2 = 2(5 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα, $\Delta(1, 4)$.

61. **i)** $M(2, 3)$ **ii)** $\Delta(5, 1)$

62. $x = 0$ και $y = 3$.

63. **i)** $\lambda = 5$

ii) $A(1, 2)$ και $B(5, 2)$.

64. **i)** $\Delta(2, 2)$ **ii)** $K(3, 2)$

65. **i)** $\Gamma(6, 7)$ και $\Delta(0, 5)$

ii) $E(4, 8)$.

66. $A(1, 4)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(7, 6)$.

67. $A(-3, 0)$, $K(0, 1)$ και $\Delta(-2, 3)$.

68. **i)** $A(-2, 5)$ και $B(7, 10)$

ii) $M\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

69. **i)** $B(-2, 4)$ **ii)** $\vec{u} = (-4, -12)$.

70. $M(4, 13)$.

71. $M(-11, -8)$.

72. $A(10, 0)$ και $B(0, 4)$.

73. **i)** $\lambda = 1$ **ii)** $\lambda = 4$.

74. **i)** $\lambda = 1$ **ii)** $\lambda = 2$.

75. $|\vec{u}| = 10$ και $|\vec{v}| = \sqrt{5}$.

76. $\Gamma(3, 0)$.

77. $\vec{v} = (6, -3)$.

78. $\vec{v} = (1, -3)$.

79. $\vec{\alpha} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (-6, 8)$.

80. $x = 1$ ή $x = -2$.

81. **i)** Έχουμε $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 14 \neq 0$

ii) $K(4, 1)$.

82. **i)** Έχουμε $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \sqrt{20}$.

ii) $\Delta(7, -2)$.

83. **i)** $|\vec{\alpha}| = 5$ **ii)** $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

84. **i)** $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

ii) $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (0, 1)$.

85. **i)** Έχουμε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 10 \neq 0$

ii) $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

86. $\kappa = 0$ και $\lambda = -1$.

87. **i)** $x=1$ και $y=2$.

ii) $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{10}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{10}$.

88. $x=0$ και $y=1$.

89. $\mu=2$ ή $\mu=3$.

90. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(x,y-2) \text{ και } \vec{\beta}=(1-x,5-y)$$

και αξιοποιούμε τη σχέση

$$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\geq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|.$$

91. **i)** Έχουμε

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=x^2+1\neq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $x=0$ και $\min f(x)=f(0)=4$.

92. **i)** Έχουμε

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=8\neq 0$$

και $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Gamma}|=\sqrt{10}$.

ii) $M\left(\frac{4}{3},0\right)$.

93. **i)** $(A'B)=5$

ii) $(AM)=\sqrt{x^2-2x+5}$

και $(MB)=\sqrt{x^2-10x+26}$.

iii) Παρατηρούμε ότι

$$f(x)=(AM)+(MB)$$
$$=(A'M)+(MB)\geq(A'B)=5$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα σημεία A', M και B είναι συνευθειακά. Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\det(\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'B})=0 \Leftrightarrow x=\frac{11}{3}.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της $f(x)$ είναι

$$f\left(\frac{11}{3}\right)=5.$$

94. $\mu=1$.

95. $\mu=-2$.

96. **i)** Έχουμε $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=-3\neq 0$

ii) $\vec{u}=(5,8)$

iii) $\vec{u}=\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$.

97. **i)** Από τις δοθείσες σχέσεις αφαιρώντας κατά μέλη.

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ και $\mu=\frac{1}{4}$.

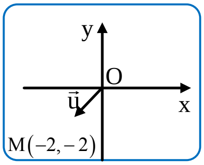
iii) $\Gamma(4,-1)$.

98. $\kappa=12$.

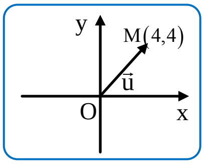
99. **i)** $A(1,\sqrt{3})$ **ii)** $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

100. **i)** $\mu=1$ ή $\mu=4$.

ii)
- Για $\mu=1$ έχουμε $\vec{u}=(-2,-2)$.



- Για $\mu=4$ έχουμε $\vec{u}=(4,4)$.



iii) $\mu=4$.

101. **i)** Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επομένως έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\Leftrightarrow\varphi=\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Και επειδή $0\leq\varphi<2\pi$, συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6} \text{ ή } \varphi=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}.$$

Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ τότε το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-3,\sqrt{3})$ και βρίσκεται στο β΄ τεταρτημόριο.

Άρα $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

ii) Έχουμε

$$\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \left(-3\lambda, \lambda\sqrt{3}\right) \text{ με } \lambda < 0.$$

Επίσης

$$|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-3\lambda)^2 + \left(\lambda\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{12} = 2\sqrt{12} \Leftrightarrow |\lambda| = 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2, \text{ αφού } \lambda < 0.$$

Άρα $\vec{\beta} = \left(6, -2\sqrt{3}\right)$.

iii) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα. Άρα

$$\varphi' = \pi + \varphi = \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

102. i) Έχουμε

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 5 \qquad \textbf{(1)}$$

και

- $|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (5-x)^2} = 5$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι $x = 1$.

ii) Για $x = 1$ έχουμε

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$= 3(3,4) + (-6,-8) + (-3,-5).$$

$$= (0,-1)$$

Αν $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, τότε $M(0,-1)$. Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Oy' και συνεπώς $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

103. i) $\sqrt{2}$ **ii)** $6\sqrt{2}$
iii) 4 **iv)** $\sqrt{2} - 24$.

104. i) -12 **ii)** 24
iii) 64 **iv)** 55.

105. i) 0 **ii)** 4

106. i) 0 **ii)** -9
iii) 36.

107. i) -6 **ii)** -36.

108. i) 8 **ii)** 0.

109. i) 4 **ii)** $\kappa = -\frac{1}{2}$

iii) $\sqrt{112}$.

110. Έχουμε

$$\vec{\beta} \cdot \left(\vec{\alpha} + \vec{\gamma}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$\vec{\gamma} \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = 0.$$

111. i) $\vec{u} = (-2,3)$ **ii)** $\lambda = -\frac{13}{18}$.

112. i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ και $\left(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = 25$.

ii) $\kappa = \frac{16}{9}$.

113. $\vec{\alpha} = (3, -6)$ και $\vec{\beta} = (-3, 6)$.

114. Είναι $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (4, -2)$.

Οπότε, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 - 4 = 0$.

115. **i)** $M(4,0)$ **ii)** $M(1,0)$.

116. **i)** Έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|=|\overrightarrow{\Gamma A}|=2$.

ii) $M\left(-\dfrac{2}{7},\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$.

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=0$.

117. **i)** Έχουμε $M(0,4)$. Επομένως

$\overrightarrow{MA}=(x,-4)$ και $\overrightarrow{MB}=(2,4)$.

Άρα, από τη σχέση $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
παίρνουμε $2x-16=0$
και τελικά $x=8$.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{O\Gamma}=(0,8)$, $\overrightarrow{OA}=(8,0)$

και $\overrightarrow{\Gamma B}=(2,0)$.

Επομένως, $\overrightarrow{O\Gamma}^2=0^2+8^2=64$

και $4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=4(16+0)=64$.

118. $\dfrac{\pi}{3}$.

119. **i)** $\kappa=0$ **ii)** $\kappa=1$.

120. **i)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=12$

ii) $|\vec{u}|=6\sqrt{2}$

iii) $\dfrac{\pi}{4}$.

121. **i)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\dfrac{3}{2}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\dfrac{27}{2}$

ii) $|\vec{u}|=3\sqrt{3}$

iii) $\dfrac{\pi}{6}$.

122. **i)** Έχουμε

$$|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow(1+x)^2+(1-x)^2=8$$
$$\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Οπότε

$$\overrightarrow{OM}=\vec{\beta}=\left(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$$

ή $\overrightarrow{ON}=\vec{\beta}=\left(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)$.

Το σημείο $M\left(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$ βρίσκεται στο δ΄ τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου, ενώ το σημείο $N\left(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)$ βρίσκεται στο β΄ τεταρτημόριο.

Και επειδή $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\beta}=\left(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right).$$

ii) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

123. **i)** $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=0$.

ii) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$ και $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$.

124. **i)** 3 **ii)** -6
iii) 2 **iv)** 1.

125. **i)** 1 **ii)** $\sqrt{3}$

iii) $\lambda=\dfrac{7}{10}$.

126. **i)** Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(-1,-2)$

και $\overrightarrow{\Gamma A}=\left(-2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

Οπότε, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=0$.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{\Gamma B}=\left(1-2\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{|\overrightarrow{\Gamma A}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma B}|}=\frac{15}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{20}}$$
$$=\frac{15}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

127. **i)** Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0$.

ii) $|\overrightarrow{A\Gamma}|=|\overrightarrow{B\Delta}|=2\sqrt{7}$.

128.i) $|\vec{\gamma}|=1$

ii) $\left(\vec{\alpha},\hat{\ }\vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $\left(\vec{\beta},\hat{\ }\vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{3}$.

129.i) $\vec{u}=(12,4)$

ii) $\vec{u}=12\vec{\alpha}+52\vec{\beta}$.

130.i) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=-15\neq 0$.

ii) Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ τέτοια, ώστε

$\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{\delta}$, $\vec{\gamma}//\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\delta}\perp\vec{\alpha}$.

Έχουμε

- $\vec{\gamma}//\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(-\lambda,2\lambda)$
- $\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{\delta}\Leftrightarrow\vec{\delta}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}=(4+\lambda,7-2\lambda)$
- $\vec{\delta}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\delta}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=0$

$$\Leftrightarrow -(4+\lambda)+2(7-2\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow 5\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=2$$

Επομένως,

$\vec{\gamma}=(-2,4)$ και $\vec{\delta}=(6,3)$.

131. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2\geq 4\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2\geq 4$$
$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\geq 4$$
$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\left(2-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)\geq 4$$
$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\left(|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right)^2\geq 0,\ \text{ισχύει.}$$

132.i) Έχουμε $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|$

και $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}+\frac{2|\vec{\gamma}|}{3}=|\vec{\gamma}|$.

ii) Από το ερώτημα **i)** ή από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$ υψώνοντας στο τετράγωνο.

iii) Έχουμε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\frac{1}{2}\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=\left|\frac{1}{2}\vec{\beta}\right|$.

iv) Από το ερώτημα **iii)** προκύπτει ότι $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$. Επομένως, η σχέση

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$$

γίνεται

$$\vec{\alpha}+2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{0}$$

και συνεπώς

$$\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}.$$

133.i) Έχουμε $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|=2$.

ii) Από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$ υψώνοντας στο τετράγωνο.

iii) **α΄ τρόπος:**

Από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ υψώνοντας στο τετράγωνο.

β΄ τρόπος:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\frac{1}{2}+\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\vec{\gamma}\cdot(-\vec{\gamma})=-\frac{1}{2}-|\vec{\gamma}|^2$$
$$=-\frac{1}{2}-4=-\frac{9}{2}.$$

134.i) Από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$ υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

ii) Έχουμε

$$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$
$$=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=1+1+1=3.$$

Άρα, $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$.

Ομοίως αποδεικνύονται και οι άλλες δύο ισότητες.

135.i) Αξιοποιούμε την ιδιότητα $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2$.

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

136.i) Αξιοποιούμε την ιδιότητα $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2$.

ii) Αξιοποιούμε την ιδιότητα $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2$.

iii) Αξιοποιούμε το ερώτημα **ii)**.

iv) Σύμφωνα με το ερώτημα **i)** έχουμε

$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$=2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2.$$

Δηλαδή

$$\left|-\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=2\rho^2+2\rho^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=4\rho^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right|=\rho\sqrt{3}.$$

Ομοίως, δείχνουμε ότι

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\rho\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\rho\sqrt{3}.$$

137.i) $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=0$.

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει ότι

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{0}.$$

138.i) **α)** Από τις δοθείσες σχέσεις, υψώνοντας στο τετράγωνο και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη.

β) Από τις δοθείσες σχέσεις υψώνοντας στο τετράγωνο και στη συνέχεια αφαιρώντας κατά μέλη.

ii) **α)** Με τον ορισμό.

β) $\left|\vec{\alpha}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\left|\vec{\beta}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\frac{\sqrt{31}}{2}.$$

139.i) $\dfrac{1}{2}$

ii) **α)** Έχουμε $\vec{\delta}-\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή $\vec{\delta}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και συνεπώς $\left|\vec{\delta}\right|=\left|\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$.

Άρα, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left|\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$ και υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε τελικά $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

β) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=\vec{\alpha}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0.$$

140.i) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right|^2=0$

ii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|-2\vec{\gamma}\right|=2\left|\vec{\gamma}\right|=2$

iii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=4 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1, \quad \text{αφού} \quad \left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=1.$$

Άρα, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ και συνεπώς

$$\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}.$$

Επίσης, $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|$.

141.i) $\gamma=1$

ii) $\Delta(3,-6)$ και $E(6,0)$

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Delta E}=0$.

142.i) Αξιοποιούμε τη δοθείσα ισότητα.

ii) Έχουμε $E(2,0)$. Επίσης από τη σχέση $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta E}=0$ βρίσκουμε $\kappa=4$. Άρα, για το ορθογώνιο ΟΑΒΓ ισχύει $(OA)=(O\Gamma)$.

143.i) Αξιοποιούμε τη σχέση $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma E}=0$.

ii) Έχουμε

$(AB)^2=20$, $(A\Gamma)^2=5\alpha-10\beta+20$

και $(B\Gamma)^2=\alpha-2\beta+8$.

144.i) Με απαγωγή σε άτοπο.

ii) Με απαγωγή σε άτοπο.

iii) Έχουμε $\vec{x}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

Άρα, $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\kappa\vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ή ισοδύναμα $0=\kappa\left|\vec{\alpha}\right|^2+\lambda\cdot 3$

και τελικά $0=\kappa+3\lambda$.

145.i) Έχουμε

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)$$

$= \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KA}\right)$

$= \overrightarrow{MK}^2 - \overrightarrow{KA}^2$

$= \left|\overrightarrow{MK}\right|^2 - \left|\overrightarrow{KA}\right|^2$

$= \left|\overrightarrow{MK}\right|^2 - 4^2.$

ii) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα $\rho = 5$.

146.i) Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

ii) $\vec{u} = (-2, 4)$ ή $\vec{u} = (4, 2)$.

147.i) Έχουμε

$\left|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right| = \left|\,|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right|$

$= |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right| \le |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|.$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \pm 1.$

Δηλαδή, αν και μόνο αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii) Θεωρούμε τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (x, y)$ και $\vec{\beta} = (2, 1)$

και αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, δηλαδή $x = 2y$.

148.i) 1.

ii) $\left(\dfrac{5}{41}, \dfrac{4}{41}\right)$.

149. i) Έχουμε

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$

ii) Έχουμε

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 26 \Leftrightarrow (4, 6) \cdot (x, x + 6) = 26$

$\Leftrightarrow 4x + 6(x + 6) = 26$

$\Leftrightarrow 10x = -10 \Leftrightarrow x = -1.$

Άρα, $\vec{\beta} = (-1, 5)$.

iii) Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ τέτοια, ώστε

$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} // \vec{\alpha}$ και $\vec{\delta} \perp \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\delta} \perp \vec{\alpha}$.

Προφανώς $\vec{\gamma} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = (2, 3)$.

Και συνεπώς $\vec{\delta} = \vec{\beta} - \vec{\gamma} = (-3, 2)$.

150.i) Έχουμε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια αξιοποιώντας τη σχέση

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ βρίσκουμε $\lambda = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$.

ii) **α)** Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = 0$.

β) $B(7, 6)$

γ) $\overrightarrow{O\Delta} = \dfrac{68}{85}\vec{\alpha} + \dfrac{68}{85}\vec{\beta}$.

151.i) Με απαγωγή σε άτοπο.

ii) Έχουμε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}$.

Επομένως,

$\vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right) = 2|\vec{\alpha}|^2$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Όμως, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \ne 0$.

iii) Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2$ και $\lambda = 2$.

iv) Έχουμε $\left|\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right)\right| = \left|2\vec{\alpha}^2\right|$.

Δηλαδή, $\left|\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right)\right| = 2|\vec{\alpha}|^2$.

Όμως, $\left|\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)\right|$

$= |\vec{\alpha}| \cdot \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}\right)\right|$

$\le |\vec{\alpha}| \cdot \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|$.

Επομένως,

$2|\vec{\alpha}|^2 \le |\vec{\alpha}| \cdot \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|$.

152.i) Παρατηρούμε ότι

$\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{O\Gamma} // \overrightarrow{OA}$

και

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{O\Gamma} // \overrightarrow{OB}.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{O\Gamma} \perp \text{προβ}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{O\Gamma}.$$

ii) $\Gamma(1,3)$.

153.i) Έχουμε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}) = \frac{1}{\lambda}\vec{\alpha}$.

Επομένως,

$$\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}) = \frac{1}{\lambda}\vec{\alpha}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}) = \frac{1}{\lambda}|\vec{\alpha}|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{\lambda}|\vec{\alpha}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \lambda\left(-\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2\right) = \frac{1}{\lambda}|\vec{\alpha}|^2$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 4\lambda-\lambda^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

ii) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}) = \frac{1}{\lambda}|\vec{\alpha}|^2$ και $\lambda=2$.

iii) Έχουμε

$$|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2$$

$$= |\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$= |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2.$$

iv) Έχουμε

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}}\right) = \frac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|} = \frac{1}{2}.$$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Διάνυσμα ονομάζουμε κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται αρχή του διανύσματος και το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος.

2. Μηδενικό διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα που η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν.

3. Μέτρο ή μήκος ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε την απόσταση των άκρων του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ το συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$.

4. Μοναδιαίο διάνυσμα λέγεται κάθε διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

5. Φορέα ενός μη μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\overrightarrow{AB}$.

6. Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το A.

7. Όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

8. • Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα όταν:

α) έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

β) έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση (ίδια κατεύθυνση και φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

- Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρρητα όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.
  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση (ίδια κατεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

9. Όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.
Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

10. Όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα γράφουμε:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}.$$

11. Με αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}})$.

12. $\theta = 0$, αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

$\theta = \pi$, αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

13. Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέμε ότι είναι ορθογώνια ή κάθετα αν και μόνο αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

14. Για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_\nu$ τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου.

15. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$.

16. Βλ. σελ. 17.

17. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει

$$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

18.
- Αν $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:
  α) είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$.
  β) έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.
- Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

19. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

20. Βλ. σελ. 27.

21. Μία ευθεία $x'x$ πάνω στην οποία επιλέγουμε δύο σημεία Ο και Ι, έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Οx.

22. Έστω Ο η αρχή και $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα $x'x$. Επειδή $\overrightarrow{OM} // \vec{i}$, θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$. Τον αριθμό x τον ονομάζουμε τετμημένη του Μ.

23. Δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

24. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{i}$. Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{i}$ λέγονται συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Ο αριθμός x λέγεται τετμημένη του $\vec{\alpha}$ και ο αριθμός y λέγεται τεταγμένη του $\vec{\alpha}$.

25. Βλ. σελ. 50.

26. Βλ. σελ. 51.

27. Βλ. σελ. 51, 52.

28. Βλ. σελ. 52.

29. Βλ. σελ. 52, 53.

30. Την ορίζουσα που έχει ως πρώτη γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ και ως δεύτερη γραμμή τις συντεταγμένες του $\vec{\beta}$. Την ορίζουσα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τη συμβολίζουμε με $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. Δηλαδή,

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

31. Έστω Α το σημείο του επίπεδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον $x'x$ τη γωνία φ που διαγράφει ο ημιάξονας Οx αν στραφεί γύρω από το Ο κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία ΟΑ.

32. Το πηλίκο $\lambda = \dfrac{y}{x}$.

33. Βλ. σελ. 55.

34. Βλ. σελ. 84.

35. Βλ. σελ. 85, 86.

36. Βλ. σελ. 85, 86.

37. Βλ. σελ. 86.

38. Με αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ ονομάζεται προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. Δηλαδή, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \overrightarrow{OM_1}$.

39. Βλ. σελ. 88.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Σ

2. Σ

3. Σ

4. Σ

5. Λ

6. Λ

7. Λ

8. Σ

9. Σ

10. Σ

11. Λ

12. Λ

13. Σ

14. Λ

15. Λ

16. Σ

17. Σ

18. Σ

19. Σ

20. Σ

21. Λ

22. Λ

23. Λ

24. Σ

25. Λ

26. Λ

27. Σ

28. Σ

29. Λ

30. Σ

31. Λ

32. Λ

33. Λ

34. Σ

35. Λ

36. Σ

37. Σ

38. Λ

39. Σ

40. Λ

41. Σ

42. Σ

43. Λ

44. Σ

45. Λ

46. Λ

47. Λ

48. Λ

49. Λ

50. Λ

51. Λ

52. Λ

53. Λ

54. Σ

55. Σ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Βλ. Θεωρία

Α2. Βλ. Θεωρία

Α3. **α)** Λάθος **β)** Λάθος
γ) Λάθος **δ)** Σωστό
ε) Λάθος.

Θέμα Β

Β1. $\overrightarrow{AE} = \vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{3}{4}\vec{\beta}$.

Β2. Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

Β3. 24.

Θέμα Γ

Γ1. $\overrightarrow{AB} = (-2,-2)$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$

και $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\alpha} = -2$

Γ2. $|\vec{\beta}| = \sqrt{14}$

Γ3. Έχουμε

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{\beta} \,//\, \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{\beta} = \lambda\overrightarrow{AB} = (-2\lambda,-2\lambda)$$

Επομένως

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\beta} = \overrightarrow{AB} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{\beta}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \vec{\alpha}) = (-2,-2) \cdot (-2\lambda,-2\lambda) \ .$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \vec{\alpha} = 4\lambda + 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

Γ4. $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Θέμα Δ

Δ1. $x = 2$ ή $x = -6$.

Δ2. $A(-2,2)$, $B(0,4)$ και $\Gamma(2,6)$.

Δ3. **α)** $\theta = \frac{\pi}{4}$

β) $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

όπου $\vec{\alpha} = (-2,\ 2)$ και $\vec{\beta} = (4,4)$.

Η Ευθεία στο Επίπεδο

Η Ευθεία
Εξίσωση Ευθείας

1. i) -10 **ii)** 1

iii) $\frac{1}{10}$.

2. i) $\frac{\pi}{4}$ **ii)** $\frac{3\pi}{4}$

iii) $\frac{\pi}{2}$ **iv)** 0.

3. i) 1, $-\frac{3}{7}$ και -1 αντίστοιχα.

ii) Έχουμε $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{\Gamma A}=-1$. Άρα $AB\perp\Gamma A$.

4. i) $y=-x-3$ **ii)** $y=3x-7$

iii) $x=1$.

5. i) $y-3=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+5$

ii) $y=3$

iii) $x=1$

iv) $\lambda=\frac{0-3}{4-1}=-1$.

Άρα,

$\varepsilon: y-3=1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+4$.

6. i) $\lambda=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1$.

Άρα,

$\varepsilon: y-5=-1(x-2)\Leftrightarrow y=-x+7$.

ii) $\lambda=\lambda\vec{u}=-3$.

Άρα

$\varepsilon: y-5=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+11$.

iii) ε: $x=2$.

iv) $\lambda=\frac{3-5}{0-2}=1$.

Άρα,

$\varepsilon: y-5=1(x-2)\Leftrightarrow y=x+3$.

7. i) $y=-2x+8$ **ii)** $y=-\frac{5}{2}x+9$

iii) $y=-2x+7$.

8. Έχουμε $M(3,2)$ και

$\varepsilon//AM\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\lambda_{AM}\frac{2-7}{3-2}=-5$.

Οπότε,

$\varepsilon: y-2=-5(x-1)\Leftrightarrow y=-5x+8$.

9. i) Έχουμε $\lambda_{AB}=4=\lambda_{\Gamma\Delta}$. Άρα $AB//\Gamma\Delta$.

Επίσης, $\lambda_{A\Delta}=\frac{2}{5}\neq-\frac{1}{2}=\lambda_{B\Gamma}$.

Άρα, $A\Delta\not\parallel B\Gamma$.

ii) $A\Gamma: y=-2x+4$ και $B\Delta: y=x+1$.

10. i) $\begin{cases}y=3x+1\\y=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x+1\\3x+1=x+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=1\end{cases}$

Άρα, $A(1,4)$.

ii) $\Gamma B\perp A\Delta$, άρα

$\lambda_{\Gamma B}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma B}\cdot 1=-1$

$\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma B}=-1$

Οπότε,

$\Gamma B: y+2=-1(x-3)$

$\Leftrightarrow y=-x+1$.

iii) $\begin{cases}y=3x+1\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x+1\\3x+1=-x+1\end{cases}$ \

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x+1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}$

Άρα, $B(0,1)$.

iv) $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{-2+4}{2}\right)$,

δηλαδή $M(2,1)$.
Οπότε
$\lambda_{BM}=0$ και $BM: y=1$.

11. i) $\begin{cases} y=x-1 \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x-1=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$

Άρα, $A(1,0)$

ii)
- Έχουμε
$\Gamma B // A\Delta \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma B}=\lambda_{A\Delta}=\frac{1}{4}$.
Οπότε
$\Gamma B: y-3=\frac{1}{4}(x-7)$
$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.
- Έχουμε
$\Gamma\Delta // AB \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta}=\lambda_{AB}=1$.
Οπότε
$\Gamma\Delta: y-3=1(x-7)$
$\Leftrightarrow y=x-4$.

iii) $\begin{cases} y=x+1 \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x-1=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \frac{3}{4}x=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$

Άρα, $B(3,2)$.

12. i) $A(5,3)$ **ii)** $\Gamma(3,-1)$
iii) $y=2x-7$.

13. i) $AB: y=-\frac{1}{7}x+\frac{15}{7}$
και
$A\Gamma: y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

ii) $B(8,1)$
iii) $y=-\frac{3}{11}x+\frac{25}{11}$.

14. i) $A(-6,-8)$.
ii) Οι συντεταγμένες του σημείου A δεν επαληθεύουν την εξίσωση της δοθείσας διαγωνίου.
iii) $B(18,16)$.
iv) $y=2x-20$.

15. i) $\Delta\Gamma: y=-2x+14$.
$\Delta A: y=4x-4$.
ii) $\Delta(3,8)$
iii) $MN: y=\frac{4}{7}x+\frac{8}{7}$.

16. i) $A(-2,-1)$
ii) α) $B(2,-3)$
β) $y=\frac{3}{2}x-6$.

17. i) Έχουμε $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$
ii) α) $\alpha=4$ και $\beta=0$
β) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

18. i) Έχουμε $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}=-1$.
ii) $\Delta(4,-3)$.

19. i) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$
ii) $B(3,2)$
iii) $d=(AB)=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
iv) $A'(1,3)$.

20. i) $\lambda_{AB}=\frac{3-2}{2+1}=\frac{1}{3}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{0-3}{5-2}=-1$.
Άρα, $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$.
ii) $y=-x+5$

iii) $y = x + 3$

iv) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΒΓ βρίσκουμε

$$x = 1 \quad \text{και} \quad y = 4.$$

Επομένως, $\Delta(1,4)$ και συνεπώς

$$(\mathrm{A}\Delta) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Επίσης,

$$(\mathrm{B}\Gamma) = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E = \frac{1}{2}(\mathrm{B}\Gamma)\cdot(\mathrm{A}\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 6 \text{ τ.μ.}$$

21. **i)** Έχουμε $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{A\Gamma} = -1$.

ii) $\Delta(-6,-11)$

iii) 116 τ.μ.

22. **i)** $A'(4,0)$

ii) $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$

iii) $B(-1,-1)$.

23. **i)** $A'(8,2)$

ii) $A''(2,0)$

iii) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

24. **i)** Οι συντεταγμένες του σημείου Α δεν επαληθεύουν την εξίσωση της δοθείσας διαγωνίου

ii) $y = -x + 7$

iii) $K(4,3)$

iv) $\Gamma(6,1)$.

25. **i)** $K(2,1)$

ii) $y = 2x - 3$

iii) $B(1,-1)$ και $\Delta(3,3)$

iv) 10 τ.μ.

26. **i)** Η ΒΔ διέρχεται από το κέντρο Κ(2, 3) του τετραγώνου και είναι κάθετη στην ΑΓ. Οπότε

$$\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}\cdot 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = -\frac{1}{2}$$

και

$$B\Delta : y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

ii) Β(6, 1) και Δ(-2, 5) ή αντίστροφα.

27. **i)** $A(4,3)$ και $B(2,5)$.

ii) $y = -x + 7$.

28. **i)** $A(4,\ 4)$ και $B(6,2)$

ii) $y = -x + 8$.

29. $y = x + 3$ και $y = -x + 5$.

30. **i)** $y = x + 1$ ή $y = -x + 5$

ii) Για την ευθεία $y = x + 1$ το ζητούμενο εμβαδό είναι $\frac{1}{2}$ τ.μ.

Για την ευθεία $y = -x + 5$ το ζητούμενο εμβαδό είναι $\frac{25}{2}$ τ.μ.

31. **i)** $\kappa = 0$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

ii) $y = -2x + 8$ και $y = -2x - 8$.

32. **i)** $M(2,3)$

ii) $y = -3x + 9$.

33. Έστω $\varepsilon : y = -2x + \kappa$ η ζητούμενη ευθεία, αφού $\varepsilon // \eta$. Η (ε) τέμνει τον Ox, Oy στα σημεία

$$A\left(\frac{\kappa}{2}, 0\right),\ B(0,\kappa) \text{ με } \kappa > 0.$$

Όμως

$$(OAB)=9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA)(OB)=9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{\kappa}{2}\right|\cdot|\kappa|=9$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2=36 \Leftrightarrow \kappa=6,$$

αφού $\kappa>0$.

Άρα, $\varepsilon: y=-2x+6$.

34. Η ζητούμενη ευθεία τέμνει τους θετικούς ημιάξονες. Επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda\neq 0$ και εξίσωση της μορφής

$$y-4=\lambda(x-3)$$

$$\Leftrightarrow y=\lambda x+(4-3\lambda).$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $A\left(\frac{3\lambda-4}{\lambda},0\right)$ με

$$\frac{3\lambda-4}{\lambda}>0 \qquad \textbf{(1)}$$

και τον ημιάξονα Oy στο σημείο B(0, 4 - 3λ) με

$$4-3\lambda>0 \qquad \textbf{(2)}$$

Οι σχέσεις **(1)** και **(2)** συναληθεύουν αν και μόνο αν

$$\lambda<0 \qquad \textbf{(3)}$$

Έχουμε

$$E=24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA)(OB)=24$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3\lambda-4}{\lambda}\right|\cdot|4-3\lambda|=48$$

$$\Leftrightarrow |3\lambda-4|^2=48|\lambda|$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow}(3\lambda-4)^2=-48\lambda$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda+4)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{4}{3}.$$

Άρα, $y=-\frac{4}{3}x+8$.

35. Αν (η) είναι ευθεία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε $\lambda_\eta=\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{5}$.

Οπότε, έχουμε

$$\varepsilon\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\varepsilon\perp\eta\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\eta=-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\frac{5}{3}.$$

Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής

$$y=-\frac{5}{3}x+\kappa,\ \text{με } \kappa\in\mathbb{R}.$$

Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{3\kappa}{5},0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο B(0, κ). Οπότε, έχουμε

$$\kappa-\frac{3\kappa}{5}=4\Leftrightarrow 2\kappa=20\Leftrightarrow\kappa=10.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y=-\frac{5}{3}x+10$.

36.
- Αρχικά υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.
  Τότε έχει εξίσωση της μορφής
  $$y-5=\lambda(x-2)$$
  $$\Leftrightarrow y=\lambda x+(5-2\lambda).$$
  Η ευθεία (ε) τέμνει την ευθεία (ε_1) στο σημείο $A\left(\frac{2\lambda-5}{\lambda+1},\frac{5-2\lambda}{\lambda+1}\right)$ και την ευθεία (ε_2) στο σημείο $B\left(\frac{2\lambda-4}{\lambda+1},\frac{5-\lambda}{\lambda+1}\right)$. Οπότε, έχουμε
  $$(AB)=1$$
  $$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{(\lambda+1)^2}+\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}}=1$$
  $$\Leftrightarrow 1+\lambda^2=(\lambda+1)^2\Leftrightarrow\lambda=0.$$
  Άρα, η ευθεία y = 5 είναι λύση του προβλήματος.
- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(2,5)$ και δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή η ευθεία $\varepsilon: x=2$ είναι λύση του προβλήματος. Η ευθεία αυτή

τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία $A(2,-2)$ και $B(2,-1)$ αντίστοιχα. Και επειδή

$(AB)=\sqrt{(2-2)^2+(-1+2)^2}=1$,

συμπεραίνουμε ότι και η ευθεία x = 2 είναι λύση του προβλήματος.

37. i) Θέτουμε $M(x,y)$. Τότε έχουμε

$$(AM)^2=3+(OM)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3+x^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow y=2x-1.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon: y=2x-1$.

ii) Το σημείο Β είναι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) και οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 2x-1=-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Άρα, $B\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$.

38. i) Θέτουμε $M(x,y)$. Τότε από τη δοθείσα σχέση βρίσκουμε $y=3x-3$ και οι συντεταγμένες του σημείου Α(1, 0) επαληθεύουν την εξίσωση της $\varepsilon: y=3x-3$.

ii) Αρχικά βρίσκουμε την προβολή του σημείου Β(0, -1) πάνω στην ευθεία (ε) που είναι το σημείο $K\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$.

Αξιοποιώντας ότι το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΒΒ' βρίσκουμε $B'\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{7}{5}\right)$.

39. i) Θέτουμε $M(x,y)$. Οπότε x = λ + 5 και y = 2λ + 3. Απαλείφοντας την παράμετρο βρίσκουμε ότι $\varepsilon: y=2x-7$.

ii) Η ευθεία (η) έχει εξίσωση της μορφής $y=2x+\kappa,\ \kappa\in R$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$A\left(-\dfrac{\kappa}{2},0\right)$ και $B(0,\kappa)$ αντίστοιχα.

Έχουμε

$$(AB)=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\kappa^2}=\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow|\kappa|=2\Leftrightarrow\kappa=\pm2.$$

Άρα το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τις ευθείες

$$(\eta_{1,2}): y=2x\pm2.$$

40. i) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

ii) $M(3,1)$

iii) $\Gamma(4,-1)$

iv) Έχουμε $(AB)=(B\Gamma)$

v) $\kappa=0$ ή $\kappa=2$.

41. i)
- Θέτουμε $M(x,y)$. Τότε έχουμε x = 2λ και y = λ + 3. Δηλαδή $y=\dfrac{1}{2}x+3$. Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία

  $$\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x+3.$$

- Θέτουμε $N(x,y)$.

  Όμως $N(\lambda+3,2\lambda)$.

  Επομένως x = λ + 3 και y = 2λ
  Δηλαδή $y=2x-6$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon_2: y=2x-6$.

ii) Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Α(6, 6), το οποίο ανήκει και στην ευθεία (ε).

42. **i)** $M(\lambda, 3\lambda)$

ii) Θέτουμε $M(x, y)$. Οπότε,

$$x=\lambda \quad \text{και} \quad y=3\lambda.$$

Δηλαδή, $\varepsilon: y=3x$.

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

43. **i)** Το σύστημα $\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha-1=0\end{cases}$ είναι αδύνατο. Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Η ευθεία ε_α (δοθείσα) διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ αν και μόνο αν ισχύει

$$\alpha \cdot 2+(\alpha-1)\cdot 1-4\alpha+5=0$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha+\alpha-1-4\alpha+5=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha=4.$$

44. **i)** Δεν υπάρχει τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\alpha+2=0$ και $\alpha^2-9=0$.

ii) **α)** $\alpha=-2$

β) $\alpha=\pm 3$

γ) $\alpha=1$ ή $\alpha=2$.

45. **i)** $\alpha \neq -1$.

ii) $\alpha=1$.

iii) $\alpha=0$

iv) $\alpha=2$ ή $\alpha=-3$.

46. **i)** Έχουμε $\lambda \neq 0$

ii) **α)** Έχουμε $\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta$

Δηλαδή, $-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}=2$

β) $\lambda=2$ και $\mu=3$.

47. **i)** $A(4,5)$

ii) **α)** $y=2x-3$

β) $A'(2,1)$.

48. **i)** Οι ευθείες $y=0$ και $y=x$

ii) Οι ευθείες $x=1$ και $y=2$

iii) Οι ευθείες $y=-x+2$ και $y=-x-2$

iv) Οι ευθείες $y=x$ και $y=-\dfrac{1}{2}x$.

49. **i)** $A(4,1)$

ii) **α)** Έχουμε $A \in (\varepsilon)$. Δηλαδή

$$\alpha \cdot 4+(1-\alpha)\cdot 1+\beta=0$$

ή ισοδύναμα $3\alpha+\beta+1=0$.

β) $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ και $\beta=0$.

50. **i)** $M(4,2)$

ii) **α)** Το συμμετρικό του Μ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι το σημείο $M'(2,4)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (η).

β) Έχουμε $\lambda_{OA}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_\eta=2$.

Επομένως, $\lambda_{OA}\cdot\lambda_\eta=-1$.

51. Αρχικά βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ.
Τελικά βρίσκουμε $B(1,1)$ και $\Gamma(8,3)$.

52. **i)** $A(1,7)$

ii) $B(0,2)$

iii) $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{38}{5}$

iv) $y=\dfrac{1}{3}x+2$.

53. **i)** $B(-2,0)$

ii) $\Gamma(6,-2)$

iii) $y=4x+4$

iv) $Z\left(-\dfrac{18}{17},-\dfrac{4}{17}\right)$.

54. **i)** Το συμμετρικό του σημείου $\Gamma(1,0)$ ως προς την διχοτόμο ΑΖ είναι το σημείο $\Gamma(-1,-4)$. Οπότε, η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η εξίσωση της ευθείας

$$A\Gamma' : x + 7y + 29 = 0.$$

ii) $B(-15,-2)$.

55. **i)** $\vec{\alpha} = (2,-1)$ και $\vec{\beta} = (-3,-1)$

ii) $\frac{\pi}{4}$.

56. $\frac{\pi}{4}$

57. $\frac{3\pi}{4}$

58. **i)** Έχουμε

$$\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\varepsilon} = \sqrt{3} \text{ και } \lambda_{\vec{\beta}} = \lambda_{\eta} = -\sqrt{3}$$

ii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

iii) $\omega = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

59. **i)** $\varepsilon_1 : x - 2y = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 3y = 0$

ii) Τα διανύσματα

$$\vec{\delta_1} = (-2,-1), \ \vec{\delta_2} = (3,-1)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Οπότε, αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| \cdot |\vec{\delta_2}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

Επομένως, $\theta = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$.

60. **i)** $\vec{\alpha} = (2-\mu, -\mu)$ και $\vec{\beta} = (3, 2-\mu)$

ii) Δεν υπάρχει

iii) $\mu = 2$ ή $\mu = 3$

iv) $\frac{5}{3}$ τ.μ.

61. **i)** Τα διανύσματα

$$\vec{\delta_1} = (\kappa - 1, -\kappa), \ \vec{\delta_2} = (\kappa, 3 - \kappa)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). Οπότε, έχουμε

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} // \vec{\delta_2}$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4}.$$

ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2} = 0$

$\Leftrightarrow \kappa = 0$ ή $\kappa = 2$.

62. **i)** Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει τέτοια ευθεία. Οπότε, υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε

$$(\alpha^2+1) \cdot 0 + (\alpha+1) \cdot 0$$
$$-\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0,$$

αδύνατον, αφού $\Delta = 4 - 12 < 0$.

ii) $\varepsilon_\alpha // x'x \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = 0$

και $\alpha + 1 \neq 0$, αδύνατον.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

iii) Θέτοντας $\alpha = -1, \alpha = 0$ προκύπτουν οι ευθείες

$$\varepsilon_{-1} : 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

και

$$\varepsilon_0 : x + y - 3 = 0.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha^2+1) \cdot 1 + (\alpha+1) \cdot 2 - \alpha^2 - 2\alpha - 3$$
$$= \alpha^2 + 1 + 2\alpha + 2 - \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το $M(1,2)$.

63. **i)** $\alpha^2 + 2\alpha + 2 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Για $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$, προκύπτουν από την **(1)** οι ευθείες με εξισώσεις $y = 2x$ και $y = -5x + 7$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $P(1,2)$. Οι συντεταγμένες του Ρ επαληθεύουν την **(1)** για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $\varepsilon : y = -x + 3$.

64. i) Το σύστημα $\alpha + 1 = 0$ και $\alpha - 3 = 0$ είναι αδύνατο.

ii) $y = -1$

iii) $y = -3x - 4$

iv) $A(-1, -1)$

v) Παρατηρούμε ότι:

$$(\alpha+1)\cdot(-1)+(\alpha-3)\cdot(-1)+2\alpha-2$$
$$=-\alpha-1-\alpha+3+2\alpha-2$$
$$=0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα, όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το σημείο $A(-1,-1)$.

65. i) Έχουμε $\alpha^2 + \alpha + 2 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in$ □.

ii) Υπάρχει και είναι το σημείο $A(3,2)$.

iii) $y = 2x - 4$.

66. i) $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \alpha+1)$

ii) $\overrightarrow{AB} = (-\alpha, \alpha+1)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

iii) Η ευθεία (ε_α) είναι κάθετη στο ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του.

iv) Θέτοντας διαδοχικά $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ προκύπτουν οι ευθείες $\varepsilon_0 : y = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon_{-1} : x = -\frac{1}{2}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Παρατηρούμε ότι

$$-\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(\alpha+1)\cdot\frac{1}{2}-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=0$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Επομένως, όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

67. i) $\alpha x - \beta y - \alpha^2 + \beta^2 = 0$.

ii) α) Έχουμε $\alpha + \beta = 2$.
Δηλαδή, $\beta = 2 - \alpha$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας (ε).

β) $M(2,2)$.

68. i) Έχουμε $\lambda = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Άρα, η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$y - 0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha)$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{\beta} = -\frac{x}{\alpha} + 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

ii) Από τη δοθείσα σχέση, παρατηρούμε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) επαληθεύεται από το ζεύγος $(5,7)$. Δηλαδή, η ευθεία (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $M(5,7)$.

69. i) $M(\lambda+1, 2-2\lambda)$

ii) Θέτουμε $\lambda + 1 = x$ και $2 - 2\lambda = y$.
Επομένως, $\lambda = x - 1$ και
$2 - 2(x-1) = y \Leftrightarrow y = -2x + 4$.

70. i) Αξιοποιούμε τη σχέση $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0$.

ii) Έχουμε $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$. Θέτουμε

$$\frac{\alpha}{2} = x \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{2} = y.$$

Επομένως, $\alpha = 2x$ και $\beta = 2y$.
Και επειδή $\beta = 10 - 3\alpha$ συμπεραίνουμε ότι

$$2y = 10 - 6x \Leftrightarrow y = -3x + 5.$$

Όμως $\alpha > 0$ και $\beta > 0$
Επομένως, $2x > 0$ και $2y > 0$.
Δηλαδή, $x > 0$ και $-3x + 5 > 0$

ή ισοδύναμα

$$x > 0 \quad \text{και} \quad x < \frac{5}{3}.$$

71. **i)** $\alpha = -5,\ \beta = -3$.

ii) $B(2, -1)$.

iii) Θέτουμε $M(x, y)$.

Τότε έχουμε

$$(AM)^2 - (BM)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 3y - 1 = 0.$$

72. **i)** Θέτουμε $M(x, y)$.

Τότε $M'(x, -y)$.

Οπότε έχουμε

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM'} = 8$

$\Leftrightarrow (x, y-2) \cdot (x-2, -y-4) = 8$

$\Leftrightarrow x(x-2) + (y-2)(-y-4) = 8$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1+y+1)(x-1-y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1+y+1)(x-1-y-1) = 0$

$\Leftrightarrow y = -x \quad$ ή $\quad y = x-2$

ii) $x = 1$.

Εμβαδόν Τριγώνου

73. **i)** 2

ii) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

74. **i)** Έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{3}$

ii) $A(2, -1)$

iii) $\frac{3}{2}$.

75. **i)** $M(2, 0)$

ii) $y = 2x - 4$.

76. **i)** $\lambda_1 = \lambda_2$

ii) $d = \sqrt{5}$

iii) $2x + 4y - 5 = 0$.

77. **i)** $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 12 = 0$ και

$\varepsilon_2 : 3x + 4y + 2 = 0$

ii) $M\left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

78. $3x - 4y + 15 = 0$ ή $3x - 4y - 15 = 0$.

79. **i)** $y = -\frac{3}{4}x + 5$ και $y = -\frac{3}{4}x - 5$.

ii) $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

80. $\varepsilon_1 : 2x - y + 6 = 0$

και

$\varepsilon_2 : 2x - y - 4 = 0$.

81. Η ζητούμενη ευθεία (η) έχει εξίσωση της μορφής

$$y = -x + \kappa \Leftrightarrow x + y - \kappa = 0$$

Ένα σημείο της ευθείας (ε) είναι το $B(0, -2)$. Τότε έχουμε

$$d(A, \eta) = d(B, \eta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1-3-\kappa|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2-\kappa|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |\kappa + 4| = |\kappa + 2| \Leftrightarrow \kappa = -3.$$

82. **i)** Με απαγωγή σε άτοπο.

ii) **α)** $\varepsilon\varphi\omega = 2$.

β) Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = 2x - 1$. Οι συντεταγμένες του σημείου $M(2, 3)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε).

83. **i)** **α)** $x = -5$

β) $y = \lambda x + 5\lambda + 5$

ii) $y = 5$ και $4x + 3y + 5 = 0$.

84. **i)** $A(2, 1)$

ii) **α)** $x = 2$

β) $y = \lambda x + 1 - 2\lambda$.

iii) $3x + 4y - 10 = 0$ και $x = 2$.

85. $3x+4y-3=0$ και $x=1$.

86. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τις ευθείες
$\varepsilon_1: y=-x+4$ και $\varepsilon_2: y=11x-8$.

87. $x-y+2=0$ και $9x-y-22=0$.

88. i) $A\left(\frac{\lambda-3}{\lambda}, 0\right)$ και $B(0, 3-\lambda)$

ii) $y=x+2$ ή $y=9x-6$.

89. i) $A(1, 1)$ και $B(-39, -19)$

ii) $20\sqrt{5}$.

90. i) $A(0, 2)$

ii) $B=\left(-\frac{22}{3}, 0\right)$ και $\Gamma\left(\frac{6}{11}, 0\right)$.

iii) $y=\frac{3}{11}x+2$ και $y=-\frac{11}{3}x+2$.

91. i) $A(-3, 0)$ και $B\left(0, \frac{36}{5}\right)$

ii) $\Gamma(0, 2)$

iii) $y=\frac{2}{3}x+2$.

92. i) 7 τ.μ.
ii) 14 τ.μ.

93. i) Έχουμε
$\overrightarrow{AB}=(-1,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-5)$.
Οπότε,
$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 3 & -5\end{vmatrix}$$
$$=+5+9=14\neq 0$$
Άρα, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$ και συνεπώς τα Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) $y=2x+3$.

iii) $y=-4x+9$.

iv) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$
$=\frac{1}{2}|14|=7$ τ.μ.

94. $\Gamma(-1, 2)$.

95. i) $\Gamma(2, 2)$

ii) Έχουμε $\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\cdot 1=-1$.

96. i) Έχουμε $(AB)=(A\Gamma)$. Δηλαδή
$$\sqrt{(0-x_0)^2+(-1-y_0)^2}=\sqrt{(2-x_0)^2+(5-y_0)^2}.$$

ii) α) $A(-2, 3)$

β) 10 τ.μ.

97. i) α) Έχουμε
$\overrightarrow{AB}=(4,0)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,\kappa)$.

β) Έχουμε $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)=4\kappa\neq 0$.

Άρα, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$.

ii) α) $\kappa=2\sqrt{3}$.

β) Έχουμε $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma A)=4$.

98. i) $\Gamma(10, 3)$

ii) 34 τ.μ.

99. i) $B(4, 2)$

ii) $3\sqrt{5}$

iii) 15 τ.μ.

100. i) $K(1, 0)$

ii) $y=x-1$

iii) α) $B(5, 4)$ και $\Delta(-3, -4)$

β) 32 τ.μ.

101. i) $M(7, 0)$.

ii) 34 τ.μ.

102. i) $M(4, 0)$ ή $M(-8, 0)$.

ii) $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$.

103. i) Η σχέση $(MAB)=2$ ισοδύναμα γράφεται
$$|x-4y-1|=4 \Leftrightarrow x-4y-1=\pm 4.$$
Δηλαδή
$$x-4y-5=0 \quad ή \quad x-4y+3=0.$$
ii) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση
$$x-4y-1=0$$
και είναι παράλληλη προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Επίσης $d(A,\varepsilon_1)=d(A,\varepsilon_2)=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

104. i) $\Gamma(4,0)$

ii) $x-2y-1=0$ και $x-2y+3=0$.

105. i) Έχουμε $\omega\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Άρα, $\lambda=\varepsilon\varphi\omega<0$.

ii) $A\left(\dfrac{\lambda-2}{\lambda},0\right)$ και $B(0,2-\lambda)$.

iii) $E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2-4\lambda+4}{-2\lambda}$ για κάθε $\lambda<0$.

iv) Η σχέση $E(\lambda)\geq 4$ ισοδύναμα γράφεται
$$\lambda^2-4\lambda+4\geq -8\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+4\lambda+4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+2)^2\geq 0.$$
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\lambda=-2$.

v) $y=-2x+4$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 138.

2. Βλ. σελ. 139.

3. Βλ. σελ. 141.

4. Βλ. σελ. 181.

5. Βλ. σελ. 182.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Σ

2. Σ

3. Λ

4. Σ

5. Λ

6. Λ

7. Σ

8. Λ

9. Σ

10. Σ

11. Σ

12. Σ

13. Λ

14. Λ

15. Σ

16. Λ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Βλ. Θεωρία

Α2. Βλ. Θεωρία

Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος

γ) Λάθος **δ)** Λάθος

ε) Σωστό.

Θέμα Β

Β1. $5x-4y-13=0$

Β2. Έχουμε
$$\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}\right)=5-\lambda\neq 0$$

για κάθε $\lambda \neq 5$.

Επίσης

$$E = 2 \Leftrightarrow |\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA})| = 4$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 9.$$

Β3. **α)** $y = -x - 1$.

β) $y = \frac{1}{2}$.

Θέμα Γ

Γ1. Το σύστημα των $\lambda + 2 = 0$ και $-\lambda = 0$ είναι αδύνατο.

Γ2. $M(1,1)$.

Γ3. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-\lambda, -\lambda - 2)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε).

Επομένως

$$\varepsilon \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\delta} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\delta} \cdot \vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Γ4. $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Θέμα Δ

Δ1. $\varepsilon_2 : y = 2x - 9$.

Δ2. $\varepsilon : y = 2x - 4$.

Δ3. Έστω $P'(x_1, y_1)$ το ζητούμενο συμμετρικό του σημείου $P\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Το P είναι σημείο της (ε_2). Άρα το P' είναι σημείο της (ε_1) και συνεπώς

$$y_1 = 2x_1 + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης έχουμε

$$PP' \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{PP'} = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4y_1 = -2x_1 + 9 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $P'\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Δ4. Η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = d(P, \varepsilon_1) = \frac{|9 - 0 + 1|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = 20 \text{ τ.μ.}$$

Κωνικές Τομές

Ο Κύκλος
Η Εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

1. **i)** $x^2+y^2=5$

ii) $x^2+y^2=4$

2. **i)** $3x+4y-50=0$ και $3x+4y+50=0$

ii) $4x+3y-50=0$ και $4x-3y-50=0$.

3. **i)** Έχουμε $(OA)=\sqrt{5}>1$

ii) $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ και $x=1$.

4. **i)** $\frac{10}{\sqrt{1+\kappa^2}}$

ii) **α)** $\kappa=\pm 3$ **β)** $-3<\kappa<3$.

5. **i)** $x^2+y^2=5$

ii) $2x+y-5=0$ και $x+2y-5=0$.

6. **i)** $A\left(\frac{1}{x_1},0\right)$ και $B\left(0,\frac{1}{y_1}\right)$

ii) Έχουμε $E=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)$.

iii) Έχουμε $x_1^2+y_1^2\geq 2x_1y_1>0$.

Δηλαδή, $1\geq 2x_1y_1>0$.

Επομένως, $\frac{1}{2x_1y_1}\geq 1$

ή ισοδύναμα $E\geq 1$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$x_1=y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

iv) $x+y-\sqrt{2}=0$.

7. **i)** $(x-1)^2+y^2=25$.

ii) $(x-2)^2+(y-3)^2=29$.

8. **i)** $K(\rho,\rho)$

ii) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

9. **i)** Έχουμε $KA\perp(\varepsilon)$.

Επομένως, $\lambda_{KA}\cdot\lambda_\varepsilon=-1$.

ii) $x^2+(y+1)^2=5$.

10. **i)** Έχουμε $d(K,\varepsilon)=d(K,\eta)$.

ii) $(x-3)^2+y^2=8$.

11. **i)** $y=\frac{3}{4}x-4$

ii) $K(4,-1)$

iii) 3

iv) $(x-4)^2+(y+1)^2=25$.

12. **i)** $K(7,3)$ και $\rho_1=2\sqrt{5}$

ii) **α)** Τα σημεία K, Λ και A είναι συνευθειακά.

β) $x_0=1,\ y_0=0$ και

$c_2:(x-1)^2+y^2=5$.

13. **i)** Ο καθένας βρίσκεται εξωτερικά του άλλου

ii) εφάπτονται εξωτερικά.

14. **i)** τέμνονται

ii) εφάπτονται εσωτερικά.

15. **i)** $(x-4)^2+(y-2)^2=5$

ii) $2x-y=11$

iii) $(x-4)^2+(y-2)^2=9$.

16. **i)** $A(5,0)$

ii) $x^2+y^2=25$.

17. $c_1:(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$

$c_2:(x-13)^2+(y-26)^2=26^2$.

18. **i)** $K(3,1)$ και $\rho=1$

ii) 2

iii) 1.

19. **i)** Η ακτίνα των κέντρων τους είναι ίση με 5 και είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους που είναι 3.

ii) $\min(NM)=5-3=2$.

20. **i)** $y=-x+7$

ii) $A(6,1)$.

21. **i)** $E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\right|$

ii) **α)** Οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου (c). Επομένως, ισχύει $y_0^2=-x_0^2+4x_0-3$ και συνεπώς

$$E=\frac{1}{2}\left|2x_0^2-4x_0+3\right|=x_0^2-2x_0+\frac{3}{2}.$$

β) Έχουμε

$$E=1\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+\frac{1}{2}=0.$$

Διακρίνουσα $\Delta=2>0$.

22. **i)** $K(1,2)$ και $\rho=\sqrt{14}$.

ii) $K(3,0)$ και $\rho=2$.

iii) $K(0,-1)$ και $\rho=\frac{1}{2}$.

iv) $K(\lambda,-2\lambda)$ και $\rho=\sqrt{5\left(\lambda^2+1\right)}$.

23. **i)** Έχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=100>0$.

ii) $K(2,-3)$ και $\rho=5$.

iii) $A(6,0)$

iv) $B(-2,-6)$.

24. **i)** Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου (c).

ii) $B(1,-1)$.

25. **i)** $(x-1)^2+(y-4)^2=25$

ii) $A'(4,8)$

iii) $3x+4y-44=0$

26. **i)** $(x-2)^2+y^2=9$

ii) $\Gamma(2,3)$.

27. **i)** $(x+2)^2+y^2=5$

ii) $\mu=2$.

28. **i)** $(x-1)^2+(y-3)^2=1$

ii) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $K(1,3)$ και ακτίνα $\rho=1$. Παρατηρούμε ότι $d(K,y'y)=1=\rho$.

iii) $\lambda=\frac{4}{3}$.

29. **i)** $K(3,0)$ και $\rho=\sqrt{2}$

ii) Έχουμε $(MK)=2>\sqrt{2}=\rho$

iii) $(MA)=(MB)=\sqrt{2}$

iv) Έχουμε

$(MA)=(MB)=(KA)=(KB)=\sqrt{2}$

και $\widehat{A}=90°$.

30. **i)** Ο κύκλος (c) με εξίσωση $x^2+y^2=4$

ii) $x-\sqrt{3}y=0$

iii) $\Gamma\left(\sqrt{3},1\right)$.

31. Ο κύκλος $c: x^2+y^2=2$.

32. **i)** Ο κύκλος $x^2+y^2-4x+8y=0$.

ii) $\varepsilon: y=\frac{1}{2}x$.

33. Ο κύκλος $c: x^2+y^2=3$.

34. **i)** $c_2: x^2+y^2=4$.

ii) Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κυκλικού δακτυλίου που ορίζουν οι κύκλοι με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνες 1 και 2.

35. **i)** Η ευθεία (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$x - y = x_0 - y_0.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών

(ε) και (δ).

ii) Έχουμε

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) \neq 0.$

iii) Το σύνολο των σημείων του κύκλου

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

και το σημείο $K(2,2)$.

iv) Ελάχιστη το σημείο $E(6,2)$ και μέγιστη το σημείο $Z(-2,2)$.

36. **i)** $K(3,6)$ και $\rho_2 = 2\sqrt{5}$.

ii) Έχουμε $(OK) = 3\sqrt{5} = \rho_1 + \rho_2$.

iii)α) Έχουμε $\overrightarrow{OK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$

και $\left|\overrightarrow{OK}\right| = 3\sqrt{5} = 3\left|\overrightarrow{OA}\right|$.

β) $A(1,2)$.

37. **i)** Έχουμε $A^2 + B^2 - 4\Gamma =$

$= 0^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16 > 0$.

ii) $K(0,3)$ και $\rho = 2$

iii) $\mu = 0$ ή $\mu = -2$

iv) $x = -2$.

38. **i)** $K(2,2)$ και $\rho = \sqrt{2}$

ii) $y = x$

iii) $A(1,1)$ και $B(3,3)$.

39. **i)** Έχουμε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \mu^2 - 4(\lambda - 2)$

$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4) + \mu^2 + 4$

$= (\lambda - 2)^2 + \mu^2 + 4 > 0$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ii) $K\left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{\mu}{2}\right)$ και

$\rho = \dfrac{\sqrt{(\lambda+2)^2 + \mu^2 + 4}}{2}$.

iii)α) Έχουμε $d(K, \varepsilon) = 1$

β) $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

40. **i)** Έχουμε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 2^2 - 4$

$= 4\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

ii) Τα κέντρα των κύκλων είναι τα σημεία $K(\lambda, -1)$ και προφανώς ανήκουν στην ευθεία $y = -1$.

iii) Αν $A(x_0, y_0)$, τότε έχουμε

$x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda x_0 + 2y_0 + 1 = 0$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Δηλαδή,

$-2x_0 \cdot \lambda + \left(x_0^2 + y_0^2 + 2y_0 + 1\right) = 0$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ή ισοδύναμα

$-2x_0 = 0$ και $x_0^2 + y_0^2 + 2y_0 + 1 = 0$.

Τελικά $x_0 = 0$ και $y_0 = -1$.

Επομένως, $A(0, -1)$.

iv) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ είναι ο άξονας $y'y$.

Παρατηρούμε ότι $d(K, y'y) = |\lambda|$.

Επίσης, η ακτίνα του κύκλου (C_λ)

είναι $\rho_\lambda = \dfrac{\sqrt{4\lambda^2}}{2} = |\lambda|$. Επομένως,

$d(K, y'y) = \rho_\lambda$.

41. **i)** Έχουμε

$A^2 + B - 4\Gamma = \lambda^2 - 4\lambda + 5$

$= (\lambda - 2)^2 + 1 > 0$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $K_\lambda\left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ και $\rho_\lambda = \dfrac{\sqrt{(\lambda-2)^2 + 1}}{2}$

iii) **α)** $\lambda = 1$

β) $\lambda = 2$.

42. **i)** $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(\lambda^2 + 1) > 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Θέτουμε $K(x, y)$. Όμως, $K(\lambda, -3\lambda)$
Επομένως $x = \lambda$ και $y = -3\lambda$.
Δηλαδή $y = -3x$.

iii) Έχουμε

$$d(K, \varepsilon) = \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4\lambda - 9\lambda - 15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda + 3| = \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}.$$

Άρα, $c : \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{4}$.

43. **i)** $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\left(\lambda^2 + (2 - \lambda)^2\right) > 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $K(\lambda, \lambda - 2)$ και $\rho = \sqrt{\lambda^2 + (2 - \lambda)^2}$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) Από την **(1)** για $\lambda = 0$ και $\lambda = 2$ βρίσκουμε τους κύκλους

$$c_1 : x^2 + y^2 + 4y = 0$$

και

$$c_2 : x^2 + y^2 - 4x = 0$$

οι οποίοι τέμνονται στα σημεία $O(0, 0)$ και $M(2, -2)$. Οι συντεταγμένες των σημείων O και M επαληθεύουν την **(1)** για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $OM : y = -x$.

44. **i)**
- Στην εξίσωση **(1)** έχουμε
  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\lambda^2 > 0$
  για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Στην εξίσωση **(2)** έχουμε
  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\lambda^2 > 0$
  για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

ii)
- Οι κύκλοι της **(1)** έχουν κέντρα τα σημεία $K(\lambda, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = |\lambda|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Οι κύκλοι της **(2)** έχουν κέντρα τα σημεία $\Lambda(4\lambda, 0)$ και ακτίνες $\rho_2 = 2|\lambda|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

iii) $(K\Lambda) = \sqrt{(3\lambda)^2 + 0^2} = 3|\lambda| = \rho_1 + \rho_2$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

iv) $M(2\lambda, 0)$ και $\varepsilon : x = 2\lambda$.

45. **i)** $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36\lambda^2 \geq 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda \neq 0$, τότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$
  και η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3\lambda, 2)$ και ακτίνα $\rho = 3|\lambda|$.
- Αν $\lambda = 0$, τότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$
  και η εξίσωση **(1)** παριστάνει μόνο το σημείο $P(0, 2)$.

ii) **α)** Όλα τα σημεία $K(3\lambda, 2)$ έχουν την ίδια τεταγμένη 2. Άρα τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = 2$.

β) Για $\lambda = 1$ και $\lambda = -1$ προκύπτουν από την **(1)** οι κύκλοι

$$c_1 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

και

$$c_2 : x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

οι οποίοι τέμνονται στο σημείο $P(0, 2)$. Επίσης οι συντεταγμένες του P επαληθεύουν την εξίσωση **(1)** για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

γ) $d(K, y'y) = \frac{|3\lambda|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$
$= 3|\lambda| = \rho$.

46. **i)** Έχουμε $A^2 + B - 4\Gamma = 4 > 0$
για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

ii) Τα κέντρα των κύκλων (c_θ) είναι τα σημεία $K_\theta(\sigma\upsilon\nu\theta+1, \eta\mu\theta), \theta\in\mathbb{R}$.
Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\theta+1=x$ και $\eta\mu\theta=y$.
Επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta=x-1$ και $\eta\mu\theta=y$.
Και επειδή $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$ συμπεραίνουμε ότι $(x-1)^2+y^2=1$.
Άρα, τα σημεία K_θ ανήκουν στον κύκλο (c) με εξίσωση $(x-1)^2+y^2=1$.
Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

iii) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των κύκλων (c_0) και (c_π) βρίσκουμε $x=1$ και $y=0$. Δηλαδή, οι δύο αυτοί κύκλοι διέρχονται από το σημείο $\Lambda(1,0)$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Λ επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων (c_θ) για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$. Άρα, όλοι οι κύκλοι (c_θ) διέρχονται από το σημείο $\Lambda(1,0)$.

47. i) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β επαληθεύουν την εξίσωση

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y-\gamma=0$$

Όμως, η εξίσωση αυτή ή παριστάνει κύκλο ή ένα σημείο ή είναι αδύνατη. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο και συνεπώς

$$(-\alpha)^2+(-\beta)^2-4(-\gamma)>0.$$

Δηλαδή

$$\alpha^2+\beta^2+4\gamma>0.$$

ii) Ο κύκλος του ερωτήματος **i)** έχει ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+4\gamma}}{2}$. Έχουμε λοιπόν $(AB)\le 2\rho$ ή ισοδύναμα

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2+4\gamma}.$$

Η Παραβολή

48. i) $y^2=-12x$

ii) $y^2=4x$

iii) $y^2=-8x$.

49. i) $E(4,0)$ και $\delta: x=-4$.

ii) $E\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$ και $\delta: x=\dfrac{3}{2}$.

iii) $E(0,5)$ και $\delta: y=-5$.

iv) $E\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ και $\delta: y=\dfrac{1}{2}$.

50. i) $A(2p,2p)$ και $B(2p,-2p)$.

ii) $p=1$ ή $p=-1$.

51. i) $\varepsilon_1: y=x+5$ και $\varepsilon_2: y=-5x-1$.

ii) $A'(0,5)$ και $B'(0,-1)$.

iii) Έχουμε $M(0,2)$, $\overrightarrow{ME}=(5,-2)$ και $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{24}{5},-12\right)$. Επομένως,

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{AB}=5\cdot\left(-\frac{24}{5}\right)+(-2)\cdot(-12)=0.$$

52. i) α) $E(4,0)$ και $\delta: x=-4$.

β) $y=2x+2$

γ) $M(-4,-6)$

δ) $y=-\dfrac{1}{2}x-8$

ii) α) $B(16,-16)$

β) Έχουμε $\lambda_{AE}=\lambda_{EB}$.

53. i) $x_1=\dfrac{y_1^2}{8}>0$.

ii) Η εφαπτομένη της παραβολής (c) στο σημείο $A(x_1,y_1)$ είναι

$$\varepsilon: yy_1=4(x+x_1).$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $B(-x_1, 0)$.

iii) $x_1 = 2$.

54. Η παραβολή (c) με εξίσωση $y^2 = -4x$.

55. i) Για κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ η εξίσωση $x_0 + \alpha y_0 + \alpha^2 = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες ως προς α.

ii) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$.

56. i) Έχουμε

$$A(0,\alpha) \text{ και } \lambda_{OM} = \frac{\alpha - 0}{\alpha^2 - 0} = \frac{1}{\alpha}.$$

Επομένως, η ευθεία (ε_α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\alpha$ και εξίσωση

$$y - \alpha = -\alpha(x - 0) \Leftrightarrow y = -\alpha x + \alpha.$$

ii) Αναζητούμε σημείο $B(x_0, y_0)$ τέτοιο, ώστε

$$y_0 = -\alpha x_0 + \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

ή ισοδύναμα

$$(x_0 - 1)\alpha + y_0 = 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Δηλαδή, $x_0 - 1 = 0$ και $y_0 = 0$.

Άρα, η ευθεία (ε_α) διέρχεται από το σημείο $B(1, 0)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

57. i) Έχουμε $y_1^2 = 6x_1$ και $y_2^2 = 6x_2$.

Επομένως, $y_2^2 - y_1^2 = 6x_2 - 6x_1$.

ii) α) Αποδείξαμε ότι

$$y_2^2 - y_1^2 = 6(x_2 - x_1).$$

Δηλαδή $(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 6(x_2 - x_1)$

$$\Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2 + y_1) = 6$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot (y_1 + y_2) = 6$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (y_1 + y_2) = 6.$$

β) Έχουμε $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Όμως $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Άρα, το σημείο M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = 1$.

58. i) $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$ και $\delta: y = -\frac{1}{4}$.

ii) $y = x - \frac{1}{4}$.

iii) Έχουμε $B\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

και $(EA) = \frac{1}{2} = (EB)$.

59. i) α) $y = x - 1$

β) $y = -x + 3$

γ) $B(0, 3)$.

ii) Έχουμε $(ZH) = 4\sqrt{2} = 2(AB)$.

60. i) $E(0, 3)$ και $\delta: y = -3$.

ii) $y = x - 3$

iii) $A(6, 3)$.

61. i) $\alpha = \frac{1}{4}$ και $\beta = 1$

ii) $x = 1$

iii) $\Gamma\left(1, \frac{1}{16}\right)$

iv) Έχουμε $\lambda\eta = \lambda_{AB} = \frac{1}{8}$.

62. i) $p = -10$

ii) $y = -x + 5$

iii) $y = x + 15$

iv) $B(5, 0)$ και $\Gamma(-15, 0)$.

63. i) Οι συντεταγμένες της εστίας $E\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε).

ii) $A\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και $B(4, -4)$.

iii) Οι εφαπτόμενες της παραβολής (c) στα σημεία Α και Β έχουν εξισώσεις $y=2x+\frac{1}{2}$ και $y=-\frac{1}{2}x-2$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες αυτές τέμνονται κάθετα, αφού $\lambda_1\cdot\lambda_2=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. Το σημείο τομής τους $\Gamma\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο της ευθείας $x=-1$ που είναι η διευθετούσα της παραβολής (c).

64. i) $x=\frac{p}{2}$

ii) $A\left(\frac{p}{2},p\right)$ και $B\left(\frac{p}{2},-p\right)$

iii) $p=7$.

65. i) $y^2=2x$

ii) α) Οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής (c).

β) $\overrightarrow{EA}=\left(\frac{y_1^2-1}{2},y_1\right)$ και

$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{y_2^2-1}{2},y_2\right)$.

iii) Έχουμε $\overrightarrow{EA}//\overrightarrow{EB}$. Δηλαδή

$$\det\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y_1-y_2)(1+y_1y_2)=0$$

$\Leftrightarrow 1+y_1y_2=0$, αφού $y_1<y_2$.

Επίσης $x_1x_2=\frac{y_1^2}{2}\cdot\frac{y_2^2}{2}=\frac{(y_1y_2)^2}{4}$

$$=\frac{(-1)^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

66. i) Οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής (c).

Επίσης, $\kappa^2\neq\frac{1}{\kappa^2}$ για κάθε $\kappa\neq-1,0,1$.

ii) $\varepsilon_1: x-\kappa y+\kappa^2=0$ και

$\varepsilon_2: \kappa^2x-\kappa y+1=0$.

iii) $\Gamma\left(1,\frac{1+\kappa^2}{\kappa}\right)$

iv) Έχουμε $E(1,0)$ και συνεπώς $\Gamma E\perp x'x$.

67. i) $\alpha=4$

ii) $4x+3y=4$

iii) $B\left(\frac{1}{4},1\right)$

iv) Έχουμε $A'(-1,-4), B'(-1,1)$ και $E(1,0)$. Οπότε $\overrightarrow{A'E}=(2,4)$ και $\overrightarrow{B'E}=(2,-1)$.

Επομένως, $\overrightarrow{A'E}\cdot\overrightarrow{B'E}=4-4=0$.

Δηλαδή $A'\widehat{E}B'=90°$.

68. i) Με απαγωγή σε άτοπο. Η παραβολή (c) έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ii) Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων των (c) και (ε) ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης $x^2-2p\lambda x-2p\kappa=0$. Αξιοποιούμε τους τύπους του Vieta.

iii) Έχουμε $x_3=-\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$.

Άρα $\frac{1}{x_3}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$.

69. i) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής (c_1).

ii) $y=\frac{1}{2}x$.

iii) Το μέσο του ΟΑ είναι το σημείο $M(2,1)$.

iv) Οι εφαπτομένες των (c_1) και (c_2) στα σημεία Α και Μ έχουν εξισώσεις $y=x-2$ και $y=x-1$ αντίστοιχα.

70. i) $p=2$ και $M(1,2)$.

ii) α) Η ευθεία (η) έχει εξίσωση $y=-x+3$ και $B(3,0)$.

β) Ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ έχει κέντρο το σημείο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=1$. Παρατηρούμε ότι $d(K,y'y)=1=\rho$.

71. i) Οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής (c).

ii) $\varepsilon: yy_1=p(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{p}{y_1}x+\frac{px_1}{y_1}$.

iii) $OM: y=\frac{y_1}{x_1}x$ και $\delta: x=-\frac{p}{2}$.

Οι συντεταγμένες του Α είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων $x=-\frac{p}{2}$ και $y=\frac{y_1}{x_1}x$. Επίσης, αξιοποιούμε τη σχέση $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$.

iv) Η ευθεία ΕΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{p}{y_1}=\lambda_\varepsilon$.

Η Έλλειψη

72. i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ **ii)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

iii) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **iv)** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{49}=1$.

73. i) $2\alpha=6,\ 2\beta=2,\ E(0,2\sqrt{2})$, $E'(0,-2\sqrt{2})$ και $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

ii) $2\alpha=12,\ 2\beta=8,\ E(0,2\sqrt{5})$, $E'(0,-2\sqrt{5})$ και $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

74. i) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

ii) $E'(-4,0), E(4,0), B'(0,-2)$ και $B(0,2)$.

iii) 16 τ.μ.

75. i) Έχουμε $\Gamma\left(\gamma,\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$ και $\Delta\left(\gamma,-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$.

ii)

$$(\Gamma E)=\frac{1}{2}(\Gamma\Delta)=\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha}=\alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

iii) Έχουμε $(\Gamma E')+(\Gamma E)=2\alpha$.

76. i) Από τις σχέσεις

$$x_1^2+4y_1^2=52 \text{ και } x_2^2+4y_2^2=52$$

αφαιρώντας κατά μέλη.

ii) α) Έχουμε

$$\frac{x_1+x_2}{2}=5 \Leftrightarrow x_1+x_2=10$$

και

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow y_1+y_2=5.$$

Στη συνέχεια αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

β) $x+2y=10$.

77. i) $E'(-1,0)$ και $E(1,0)$.

ii) $\varepsilon=\frac{1}{2}$

iii) Έστω $M(x_1,y_1)$. Οπότε, έχουμε

$$(ME)=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2-2x_1+1+3-\frac{3}{4}x_1^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2-2x_1+4}=\sqrt{\frac{(x_1-4)^2}{4}}$$

$$=\frac{|x_1-4|}{2}.$$

Επίσης

$$d(M,\delta)=\frac{|x_1-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x_1-4|.$$

Άρα $\frac{(ME)}{d(M,\delta)}=\frac{1}{2}=\varepsilon.$

78. i) Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ και $y=2x+1.$

Επομένως $\frac{x^2}{4}+\frac{(2x+1)^2}{2}=1$

$$\Leftrightarrow x^2+2(2x+1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+8x-2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες $x_1<x_2$, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta=64+72=136>0.$

ii) Από τους τύπους Vieta έχουμε

$$x_1+x_2=-\frac{8}{9}.$$

iii) $M\left(-\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right).$

79. i) $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

ii) $(ME')^2+(ME)^2$

$$=(x_1+3)^2+y_1^2+(x_1-3)^2+y_1^2$$

$$=2x_1^2+2y_1^2+18.$$

iii) Σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης έχουμε

$$(ME')+(ME)=2\alpha=10.$$

iv) Αποδείξαμε ότι

$$(ME')+(ME)=10.$$

Επομένως

$$(ME')^2+(ME)^2+2(ME')\cdot(ME)=100.$$

Στη συνέχεια αξιοποιούμε το ερώτημα **ii)**.

80. i) Η δοθείσα σχέση γράφεται $(ME')+(ME)=8.$ Δηλαδή $2\alpha=8.$

ii) α) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$

β) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$

81. i) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) Οι συντεταγμένες του σημείου Λ επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης (c).

iii) Έχουμε $\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{y_1-1}{2+x_1}\cdot\frac{y_1+1}{-2+x_1}$

$$=\frac{y_1^2-1}{x_1^2-4}=-\frac{1}{4}$$

και $\varepsilon^2-1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}.$

82. i) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$x=\gamma \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \ \text{με} \ y<0.$$

ii) $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

83. i) Η έλλειψη (c) έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) $\varepsilon: x+y=5.$

84. i) $E'(-3,0)$ και $E(3,0).$

ii) α) $y=-\frac{3}{5}x+5.$

β) Έχουμε

$$\Gamma'\left(-3,\frac{16}{5}\right) \ \text{και} \ Z\left(-3,\frac{34}{5}\right).$$

Επομένως

$(E'Z)=\frac{34}{5}$ και

$$(\text{ΕΓ}')=\sqrt{6^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{34}{5}.$$

85. **i)** $\text{E}'(-4,0)$ και $\text{E}(4,0)$.

ii) $4x+5y=25$.

iii) $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\text{E}'\text{T}}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=-1$.

86. **i)** $y=\frac{1}{2}x+2$.

ii) $y=-2x-3$

iii) Έχουμε $\text{M}(-2,1)$, $\text{K}(-2,0)$ και $\Lambda(0,-3)$. Άρα $\overrightarrow{\text{O}\Lambda}=(0,-3)$ και $\overrightarrow{\text{MK}}=(0,-1)$.

87. **i)** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{\text{ME}}=(2-x_1,-y_1)$ και $\overrightarrow{\text{EK}}=\left(2,\frac{4-2x_1}{y_1}\right)$.

Επομένως $\overrightarrow{\text{ME}}\cdot\overrightarrow{\text{EK}}=0$.

88. **i)** $y=-x+5$ και $y=-x-5$.

ii) Η απόσταση των δύο ευθειών του ερωτήματος **i)** είναι $d=\frac{10}{\sqrt{2}}$. Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι $\text{E}=d^2=\frac{100}{2}=50$ τ.μ.

89. **i)** $2\alpha=6$ και $2\beta=4$.

ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

iii) $x-2y=5$ και $x-2y=-5$.

90. **i)** $\text{A}'\left(-2\sqrt{2},0\right)$ και $\text{A}\left(2\sqrt{2},0\right)$

ii) $\Gamma\left(0,\ 2-\sqrt{2}\right)$ και $\Delta\left(0,2+\sqrt{2}\right)$

iii) Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) στο σημείο Μ έχει εξίσωση $x+2y=4$.

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $\text{Z}(0,2)$ επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

91. **i)** $2\alpha=6\sqrt{2}$ και $2\beta=2\sqrt{2}$.

ii) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1$.

iii) $x+3y=6$ και $x+3y=-6$.

92. **i)** $\text{E}'\left(0,-2\sqrt{3}\right)$ και $\text{E}\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

ii) $y=2\sqrt{3}$

iii) $\text{M}\left(1,\ 2\sqrt{3}\right)$

iv) $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$ και $\text{K}(4,0)$.

Επομένως

$\lambda_{\text{E}'\text{K}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda_\eta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Άρα $\lambda_{\text{E}'\text{K}}\cdot\lambda_\eta=-1$.

93. **i)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

ii) $\varepsilon: y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$ και $\eta: x=2$.

iii) Έχουμε $\Gamma\left(2,\ 2-\sqrt{2}\right)$. Επομένως,

$$\lambda_{\text{MA}'}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

και $\lambda_{\Gamma\text{O}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Η Υπερβολή

94. **i)** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$

ii) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{192}=1$

iii) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

95. **i)** $\frac{y^2}{9}-x^2=1$

ii) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1.$

96. **i)** $E'\left(-\sqrt{29},0\right)$, $E\left(\sqrt{29},0\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{29}}{5}$

και ασύμπτωτες $y=\pm\frac{2}{5}x.$

ii) $E'\left(0,-7\sqrt{2}\right)$, $E\left(0,7\sqrt{2}\right)$, $\varepsilon=\sqrt{2}$

και ασύμπτωτες $y=\pm x.$

iii) $E'\left(-\frac{4\sqrt{10}}{3},0\right)$, $E\left(\frac{4\sqrt{10}}{3},0\right)$,

$\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{3}$ και ασύμπτωτες

$y=\pm\frac{1}{3}x.$

iv) $E'\left(0,-\sqrt{109}\right)$, $E\left(0,\sqrt{109}\right)$

$\varepsilon=\frac{\sqrt{109}}{10}$

και οι ασύμπτωτες $y=\pm\frac{10}{3}x.$

97. **i)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

ii) $\frac{y^2}{4}-x^2=1.$

98. **i)** $A(2,0)$ και $B(-2,0)$

ii) $x^2-y^2=2.$

99. **i)** Οι εστίες είναι τα σημεία

$E'\left(-\sqrt{5},0\right)$ και $E\left(\sqrt{5},0\right).$

Οι κορυφές είναι τα σημεία $A'(-3,0), A(3,0)$, $B'(0,-2)$ και $B(0,2)$.

ii) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1.$

100. **i)** $y=\pm\sqrt{3}x.$

ii) $(x-2)^2+y^2=4.$

iii) $O(0,0)$, $M\left(1,\sqrt{3}\right)$ και $N\left(1,-\sqrt{3}\right).$

101. **i)** $E'(-4,0)$ και $E(4,0).$

ii) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$

102. **i)** $P(-13,12)$ και $\Sigma(13,12)$.

ii) Οι κορυφές της υπερβολής (c) είναι τα σημεία $A'(-5,0)$ και $A(5,0)$. Ο κύκλος με διάμετρο $P\Sigma$ έχει εξίσωση $x^2+(y-12)^2=169.$ Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A' και A επαληθεύουν την εξίσωση του παραπάνω κύκλου.

103. **i)** Έχουμε

$$\varepsilon=3 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=3 \Leftrightarrow \gamma^2=9\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=9\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2=8\alpha^2.$$

ii) **α)** $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=4.$

β) $E'\left(-3\sqrt{2},0\right)$ και $E\left(3\sqrt{2},0\right).$

104. **i)** $2\alpha=24$ και $2\beta=10.$

ii) $y=-\frac{12}{5}x+\frac{156}{5}.$

iii) **α)** $(EZ)=d(E,\varepsilon)$

$$=\frac{|5\cdot 13-12\cdot 0|}{\sqrt{5^2+12^2}}=5=\beta.$$

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$(OZ)^2=(OE)^2-(EZ)^2$$

$$=\gamma^2-\beta^2=\alpha^2.$$

105. **i)** $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$.

ii) Αν $M(x_1, y_1)$, τότε $(OM)^2 = 2x_1^2 - 2$.

Επίσης $(E'M) = \sqrt{2}|x_1 + 1|$

και $(EM) = \sqrt{2}|x_1 - 1|$.

Επομένως,

$(E'M) \cdot (EM) = 2(x_1^2 - 1) = 2x_1^2 - 2.$

Ένας άλλος τρόπος είναι να αξιοποιήσουμε τον ορισμό της υπερβολής. Δηλαδή, να αξιοποιήσουμε τη σχέση

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha$$

υψώνοντας στο τετράγωνο.

106. **i)** Έχουμε

$$\varepsilon = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \gamma^2 = 5\alpha^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5\alpha^2$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 = 4\alpha^2$$
$$\Leftrightarrow \beta = 2\alpha.$$

ii) **α)** Σύμφωνα με τον ορισμό της υπερβολής έχουμε

$|(ME') - (ME)| = 2\alpha.$

Άρα $|(ME') - 4\alpha| = 2\alpha$

Τελικά $(ME') = 2\alpha.$

β) Έχουμε

$(ME)^2 + (ME')^2 = 16\alpha^2 + 4\alpha^2 = 20\alpha^2.$

Επίσης

$$(E'E)^2 = 4\gamma^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= 4(\alpha^2 + 4\alpha^2) = 20\alpha^2.$$

Επομένως

$(ME)^2 + (ME')^2 = (E'E)^2.$

107. **i)** $E'(-5,0)$ και $\rho_1 = 4$

ii) **α)** Έχουμε $(ME') = \rho_1 + \rho_2$.

Δηλαδή $(ME') = 4 + (ME)$.

β) Αποδείξαμε ότι

$(ME') = 4 + (ME)$.

Επομένως $(ME') - (ME) = 4$.

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, το σημείο M ανήκει στον δεξιό κλάδο της υπερβολής η οποία έχει εστίες τα σημεία E', E και σταθερή διαφορά $2\alpha = 4$.

108. **i)** $E'(-3,0), E(3,0)$ και $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

ii) **α)** Έχουμε

$$(ME')^2 = (x_1 + 3)^2 + y_1^2$$
$$= x_1^2 + 6x_1 + 9 + y_1^2$$

και

$$(ME)^2 = (x_1 - 3)^2 + y_1^2$$
$$= x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2.$$

Επομένως,

$(ME')^2 - (ME)^2 = 12x_1.$

β) Έχουμε

$(ME')^2 - (ME)^2 = 12x_1 > 0.$

Άρα, $(ME')^2 > (ME)^2$

δηλαδή $(ME') > (ME)$.

γ) Αξιοποιούμε τον ορισμό της υπερβολής και το **ii) β)**.

δ) Αποδείξαμε ότι

$(ME')^2 - (ME)^2 = 12x_1$.

Δηλαδή

$[(ME') - (ME)] \cdot [(ME') + (ME)]$

$= 12x_1$. Και επειδή

$(ME') - (ME) = 4$ **(1)**

συμπεραίνουμε ότι

$(ME') + (ME) = 3x_1$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε

$$2(ME') = 3x_1 + 4$$

και

$$2(ME) = 3x_1 - 4.$$

109. **α)** $\alpha = 1$ και $\beta = \sqrt{2}$

β) $\varepsilon = \sqrt{3}$

γ) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

110. **i)** Έχουμε

$\varepsilon=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \gamma^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2\alpha^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2 \Leftrightarrow \alpha=\beta.$

Επίσης

$\frac{(-5)^2}{\alpha^2}-\frac{3^2}{\beta^2}=1$

$\Leftrightarrow 25-9=\alpha^2 \Leftrightarrow 16=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha=4.$

Τελικά $\alpha=\beta=4$.

ii) $5x+3y+16=0$.

111. **i)** $y=x-1$

ii) $K(0,-1)$ και $\Lambda(4,3)$

iii) Έχουμε $\frac{0+4}{2}=2$ και $\frac{-1+3}{2}=1$.

112. **i)** Θέτουμε $x=t+\frac{1}{t}$ και $y=t-\frac{1}{t}$.

Επομένως

$x+y=2t$ και $x-y=\frac{2}{t}$.

Άρα $(x+y)(x-y)=4$

ή ισοδύναμα $x^2-y^2=4$.

Ένας πιο απλός τρόπος είναι να διαπιστώσουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση της δοθείσας υπερβολής.

ii) $y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$.

113. **i)** $\alpha=2$ και $\beta=3$.

ii) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{13\sqrt{3}}{3}$

iii) **α)** $P(13,0)$ και $\Sigma(4,6)$.

β) Έχουμε $\lambda_{P\Sigma}\cdot\lambda_{\varepsilon}=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=-1$.

114. **i)** $x^2-y^2=1$

ii) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{2}$.

iii) Έχουμε $P\left(\frac{5}{2},0\right)$ και $\Sigma\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

115. **i)** $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ και $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

ii) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}$ και $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}$.

116. **i)** $y=2x-1$ και $y=2x+1$

ii) $y=-2x+1$ και $y=2x+1$.

117. **i)** $y=-x+1$

ii) $E=\frac{1}{2}$ τ.μ.

118. **i)** Το σύστημα των εξισώσεων των δύο γραμμών έχει μοναδική λύση $(x,y)=(3,-1)$.

ii) Η εφαπτομένη της υπερβολής (c) στο σημείο της $M(3,-1)$ έχει εξίσωση

$x\cdot 3-y\cdot(-1)=8$

$\Leftrightarrow 3x+y=8 \Leftrightarrow y=-3x+8.$

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής Τομής

119. **i)** $\kappa=4$

ii) $M(4,8)$.

120. **i)** $\lambda=1$

ii) $M(1,2)$.

121. **i)** $\kappa\in(-9,+\infty)$

ii) Για $\kappa=-8$ η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) στα σημεία

$A(2,4)$ και $B(4,16)$.

122. **i)** $p=4$ **ii)** $M\left(\frac{1}{2},2\right)$.

123. • Αν $\lambda=0$, τότε η (ε) τέμνει τη (c) σε ένα μόνο σημείο.

- Αν $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, τότε η (ε) τέμνει τη (c) σε δύο σημεία.
- Αν $\lambda = 1$, τότε η (ε) εφάπτεται της παραβολής (c).
- Αν $\lambda \in (1, +\infty)$, τότε η (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την (c).

124. Από το σύστημα των εξισώσεων των (ε) και (c) προκύπτει η εξίσωση

$$(\alpha x + \alpha)^2 = 2px$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 x^2 + 2(\alpha^2 - p)x + \alpha^2 = 0.$$

Οπότε, η (ε) εφάπτεται της (c) αν και μόνο αν η παραπάνω εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 0.$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύουν

$$\alpha^2 \neq 0 \quad \text{και} \quad 4(\alpha^2 - p)^2 - 4\alpha^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad -2\alpha^2 p + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad p = 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow p = 2\alpha^2, \quad \text{αφού} \quad p \neq 0.$$

125. **i)** Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{8}$. Οπότε, η ευθεία (ε) του κύκλου (c_1) αν και μόνο αν

$$d(K, \varepsilon) = \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 3 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow |\beta - 3| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |\beta - 3|^2 = \left(\sqrt{8} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\beta - 3)^2 = 8(\lambda^2 + 1).$$

ii) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της παραβολής (c_2) αν και μόνο αν η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 - 4\lambda x - 4\beta = 0,$$

που προκύπτει από το σύστημα των εξισώσεων των (ε) και (c_2), έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$. Δηλαδή,

$$16\lambda^2 + 16\beta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\beta.$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κωνικών (c_1) και (c_2) αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$(\beta - 3)^2 = 8(\lambda^2 + 1) \quad \text{και} \quad \lambda^2 = -\beta.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\beta = -1$$

και

$$\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1, \quad \text{αφού} \quad \lambda > 0.$$

126. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x = -2y + 5$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$\frac{(-2y+5)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(4y^2 - 20y + 25) + 9y^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 25y^2 - 80y + 64 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-80)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 64 = 0.$$

Άρα, η ευθεία (ε) εφάπτεται της έλλειψης (c). Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $y = \dfrac{8}{5}$, οπότε

$$x = -2 \cdot \frac{8}{5} + 5 = \frac{9}{5}.$$

Επομένως, το σημείο επαφής των (ε) και (c) είναι το σημείο $M\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$.

127. **i)** $\lambda=\pm1$
ii) $\lambda=3$ και $\beta=\pm8$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 237.
2. Βλ. σελ. 237.
3. Βλ. σελ. 237, 238.
4. Βλ. σελ. 238.
5. Βλ. σελ. 239.
6. Βλ. σελ. 277.
7. Βλ. σελ. 303.
8. Βλ. σελ. 308.
9. Βλ. σελ. 309.
10. Βλ. σελ. 329.
11. Βλ. σελ. 330.
12. Βλ. σελ. 333.
13. Βλ. σελ. 334.
14. Βλ. σελ. 334.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Λ
6. Σ
7. Σ
8. Σ
9. Σ
10. Σ
11. Λ
12. Λ
13. Λ
14. Σ
15. Σ
16. Σ
17. Λ
18. Σ
19. Λ
20. Λ
21. Σ

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Βλ. Θεωρία
Α2. Βλ. Θεωρία
Α3. **α)** Σωστό **β)** Λάθος
γ) Σωστό **δ)** Σωστό
ε) Λάθος.

Θέμα Β

Β1. $E\left(\frac{1}{2},0\right)$ και $\delta: x=-\frac{1}{2}$.

Β2. $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Β3. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο κωνικών τομών.

Β4. Οι δύο εφαπτόμενες ευθείες έχουν συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2=-\sqrt{2}.$$

Επομένως

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{-2}{2}=-1.$$

Θέμα Γ

Γ1. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

Γ2. $y=\pm\sqrt{3}x.$

Γ3. Το σύστημα των εξισώσεων των (η) και (c) ανάγεται στην επίλυση εξίσωσης β΄ βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=36>0.$

Θέμα Δ

Δ1. $\lambda\neq 0.$

Δ2. $K(3\lambda,-\lambda)$ και $\rho=\sqrt{10}|\lambda|$.

Δ3. Θέτουμε $x=3\lambda$ και $y=-\lambda.$

Επομένως, $x=-3y$ ή ισοδύναμα $y=-\frac{1}{3}x.$ Άρα, τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-\frac{1}{3}x.$

Δ4. Έστω $M(x_0,y_0)$ κοινό σημείο όλων των δοθέντων κύκλων. Έχουμε λοιπόν $\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=\lambda(3x_0-y_0)$ για κάθε $\lambda\neq 0.$ Δηλαδή,

$(3x_0-y_0)\lambda-\left(\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}\right)=0$ για κάθε $\lambda\neq 0$ ή ισοδύναμα

$$3x_0-y_0=0 \text{ και } \frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=0.$$

Τελικά $x_0=0$ και $y_0=0.$ Άρα, όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από το σημείο $O(0,0).$

Δ5. Αποδείξαμε ότι τα κέντρα των δοθέντων βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{3}x.$ Επίσης, αποδείξαμε ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο $O(0,0).$ Άρα, κάθε ένας από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στην ευθεία (η) η οποία διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon).$ Η ευθεία (η) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=3$ και εξίσωση $y=3x.$

Θέματα για Επανάληψη

1. **i)** $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{EZ}} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

ii) Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{AK}} // \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Άρα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

Επίσης, $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EK}}$. Και επειδή $\overrightarrow{\mathrm{EK}} // \overrightarrow{\mathrm{EZ}}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{EK}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$.

Επομένως, $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{3}{4}\vec{\alpha} + \mu\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$.

iii) $\lambda = \frac{3}{2}$ και $\mu = 3$.

iv) Αξιοποιούμε τα ερωτήματα **i)** και **ii)**.

2. **i)** Από τη σχέση $\sqrt{2}\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|$ υψώνοντας στο τετράγωνο.

ii) $\theta = \frac{\pi}{3}$.

iii) $\left|\vec{\beta}\right| = \sqrt{3} - 1$ και $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$.

3. **i)** Έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|\cdot\text{συν}\frac{\pi}{4}$$

$$= \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\sqrt{2}\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\vec{\alpha}\right|^2$$

και $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Επομένως, $\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|^2$

και τελικά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.

ii) Έχουμε $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = \left(\sqrt{2}\left|\vec{\alpha}\right|\right)^2$.

Δηλαδή,

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2,$$

αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.

iii) Έχουμε

$$\left|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right|^2 = 9\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 16\left|\vec{\beta}\right|^2 + 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 25\left|\vec{\alpha}\right|^2.$$

4. **i)** Έχουμε $\left|\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|\right| \le \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$.

Δηλαδή $\left|1 - \nu\right| \le \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \nu + 1$

ή ισοδύναμα $\nu - 1 \le \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \le \nu + 1$.

Όμως, $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \in \mathbb{N}^*$.

ii) Έχουμε $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = \nu^2$.

Δηλαδή

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \nu^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \nu^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \nu^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}.$$

iii) Έχουμε

$$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$= 1 + \nu^2 + 1 = \nu^2 + 2.$$

iv) Έχουμε

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1\cdot\nu} = -\frac{1}{2\nu}.$$

5. **i)** Έχουμε $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}\right|^2$

$$= \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 4\left|\vec{\gamma}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 4\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$$

$$= 1 + 1 + 4 + 2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right)$$

$$= 6 + 2(-3) = 0.$$

ii) Αποδείξαμε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$

Δηλαδή, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-2\vec{\gamma}$

και συνεπώς $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2|\vec{\gamma}|=2.$

Επίσης, $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=1+1=2.$

iii) Από τη σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

Άρα, $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

iv) Έχουμε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

Επομένως $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

Άρα, η σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$

γράφεται $\vec{\beta}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$,

δηλαδή $\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$.

6. **i)** $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|-3\vec{\gamma}|=3|\vec{\gamma}|$

και

$$|\vec{\alpha}|+|2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}+\frac{8}{3}|\vec{\gamma}|=3|\vec{\gamma}|$$

ii) Με βάση τη σχέση του ερωτήματος **i)** υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

iii) Από το ερώτημα **ii)** προκύπτει ότι

$$\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}.$$

Οπότε, $\vec{\beta}\uparrow\uparrow 4\vec{\alpha}$.

Επίσης $|\vec{\beta}|=|4\vec{\alpha}|$

iv) Αξιοποιούμε τη δοθείσα ισότητα διανυσμάτων και το ερώτημα **iii).**

7. **i)** Η δοθείσα ισότητα γράφεται

$$\left(|\vec{\alpha}|-2\right)^2+\left(|\vec{\beta}|-3\right)^2=0.$$

ii) $|\vec{\gamma}|=6\sqrt{2}$

iii) $\theta=\frac{\pi}{4}$

iv) $\lambda=-\frac{3}{2}$

8. **i)** $\overrightarrow{B\Gamma}^2=|8\vec{\alpha}-6\vec{\beta}|^2$

ii) Έχουμε

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}.$$

Οπότε

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$
$$=5\vec{\alpha}^2-2\vec{\beta}^2+3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$$

Άρα, $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$.

iii) $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{21}$.

iv) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$

9. **i)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

$$=2\cdot1\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3}=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1.$$

ii) Έχουμε

$$\left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)//\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}\neq\vec{0}.$$

Οπότε, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\gamma}-\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}.$$

Όμως

$$\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\lambda\vec{\beta}^2=0$$
$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2-2\cdot(-1)+\lambda\cdot(-1)-2\lambda|\vec{\beta}|^2=0$$
$$\Leftrightarrow 4+2-\lambda-2\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda=6\Leftrightarrow\lambda=2.$$

Επομένως, $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

iii) $|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)^2$

$= \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$= |\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 + 4\cdot(-1) = 4$

Οπότε, $|\vec{\gamma}| = 2$.

iv) Έχουμε

$$\text{συν}\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως,

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$= |\vec{\alpha}|^2 + 2\cdot(-1) = 2$

Επομένως, η σχέση **(1)** γράφεται

$$\text{συν}\theta = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{3}.$$

Δηλαδή, $\theta = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμως, $\theta \in [0, \pi]$.

Άρα, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. i) $\frac{2\pi}{3}$.

ii) α) Έχουμε $(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha} = 0$.

Δηλαδή $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} - 2|\vec{\alpha}|^2 = 0$.

και τελικά $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 2$.

β) Έχουμε

$(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}) \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Επομένως $(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}) // \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Και επειδή $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \neq \vec{0}$, λόγω του ερωτήματος **i)**, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

γ) Αποδείξαμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

Δηλαδή $\vec{\gamma} = (\lambda + 2)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$.

Όμως,

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = 4$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \lambda\vec{\beta}^2 = 4$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)\cdot(-1) + \lambda|\vec{\beta}|^2 = 4$

$\Leftrightarrow -\lambda - 2 + 4\lambda = 4$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$.

11. i) Έχουμε

$\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$

$= |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0$.

ii) Έχουμε

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = 0$.

Επομένως, $\vec{\gamma} \perp \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$.

Όμως, $\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$

και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Άρα, $\vec{\gamma} // \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

iii) α) Με απαγωγή σε άτοπο, παρατηρώντας ότι η σχέση

$$|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3,$$

γράφεται

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = 3.$$

β) Αποδείξαμε ότι

$\vec{\gamma} // \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Επομένως υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Άρα,

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\lambda\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}\Leftrightarrow 9=\lambda\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow \lambda=3.$$

Τελικά $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

12. i) Έχουμε

$$\left|\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right)^2$$
$$=\vec{\alpha}^2+x^2\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}x$$
$$=\left|\vec{\alpha}\right|^2+x^2\left|\vec{\beta}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x$$
$$=1+x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x$$
$$=x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+1.$$

Άρα,

$$\left|\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right|=\sqrt{x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+1}$$

Δηλαδή

$$f(x)=\sqrt{x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Έχουμε

$$x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+1$$
$$=x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\sigma\upsilon\nu^2\theta+1-\sigma\upsilon\nu^2\theta$$
$$=\left(x+\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2+\eta\mu^2\theta$$
$$\geq\eta\mu^2\theta \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$f(x)=\sqrt{x^2+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+1}\geq\sqrt{\eta\mu^2\theta}$$
$$=\left|\eta\mu\theta\right| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

iii) Αποδείξαμε ότι

$f(x)\geq\left|\eta\mu\theta\right|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για

$$x=-\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Άρα, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο το $f(-\sigma\upsilon\nu\theta)=\left|\eta\mu\theta\right|$. Επομένως, ο αριθμός 0 είναι η ελάχιστη τιμή της f αν και μόνο αν $\left|\eta\mu\theta\right|=0$ ή ισοδύναμα

$$\theta=0 \quad \text{ή} \quad \theta=\pi.$$

Επιπλέον, $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|$.

13. i) Έστω $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$.

Έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=(1,2)\Leftrightarrow(x_1-3,\ y_1-1)=(1,2)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-3=1\\ y_1-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4\\ y_1=3\end{cases}$$

Άρα, $B(4,3)$. Επίσης, επειδή το ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει

$$\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x_2,\ y_2)=(1,2)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1\\ y_2=2\end{cases}$$

Επομένως, $\Gamma(1,\ 2)$.

ii) Έχουμε

$$(OB)=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

και

$$(A\Gamma)=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}.$$

iii) Έχουμε

$$\overrightarrow{OA}=(3,1) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Gamma}=(1,2).$$

Επομένως,

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|}$$
$$=\frac{3\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pm\frac{\pi}{4},$$

$\kappa\in\mathbb{Z}$.

Και επειδή $\theta\in[0,\pi]$, ως γωνία διανυσμάτων, συμπεραίνουμε ότι $\theta=\frac{\pi}{4}$.

iv) Είναι

$$B'(4,-3) \text{ και } \overrightarrow{OB'}=(4,\ -3).$$

Αναζητούμε $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιους, ώστε

$$\overrightarrow{OB'}=\kappa\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{O\Gamma}$$

$\Leftrightarrow (4,-3)=\kappa(3,1)+\Lambda(1,2)$

$\Leftrightarrow (4,-3)=(3\kappa+\lambda,\ \kappa+2\lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa+\lambda=4 \\ \kappa+2\lambda=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{-13}{5} \\ \kappa=\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Άρα, $\overrightarrow{OB'}=\frac{11}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{13}{5}\overrightarrow{O\Gamma}$.

14. **i)** Δεν υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$\lambda=0$ και $2\lambda+1=0$.

ii) Αναζητούμε σημείο $K(x_0, y_0)$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ να ισχύει

$\lambda x_0+(2\lambda+1)y_0+1=0$

$\Leftrightarrow (x_0+2y_0)\lambda+(y_0+1)=0$

Δηλαδή,

$$\begin{cases} x_0+2y_0=0 \\ y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

Άρα, όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $K(2,-1)$.

iii) $\varepsilon_1: x+3y+1=0$

iv) Εξετάζουμε αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$\frac{-\lambda}{2\lambda+1}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\lambda=2\lambda+1\Leftrightarrow 0=1$,

αδύνατον.

Άρα, δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

15. **i)** Έχουμε

$x^2+y^2+2xy+4x+4y+3=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+4(x+y)+3=0$

$\Leftrightarrow x+y=-1$ ή $x+y=-3$

ii) $\sqrt{2}$

iii) $x+y+2=0$.

16. **i)** $\Gamma(2\alpha,-2)$ και $\Delta(2\alpha+1,3)$.

ii) **α)** Έχουμε

$\alpha=2$ και $\Gamma\Delta: y=5x-22$.

β) $M(6,8)$.

17. **i)** $K\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ii) $\Gamma(3,1)$ και $\Delta(2,3)$.

iii) $\frac{49}{4}$ τ.μ.

18. **i)** $A(0,1)$

ii) **α)** Έχουμε

$y_1=x_1+1$ και $y_2=2x_2+1$.

Επομένως

$\overrightarrow{KB}=(x_1-2,\ x_1-3)$

και

$\overrightarrow{K\Gamma}=(x_2-2,\ 2x_2-3)$.

Όμως, τα σημεία K, B, Γ είναι συνευθειακά.

Άρα, $\det\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{K\Gamma}\right)=0$.

β) $x=2$.

19. **i)** Το σύστημα $1=0$ και $\lambda=0$ είναι αδύνατο. Αναζητούμε σημείο $M(x_0,y_0)$ τέτοιο ώστε

$x_0+\lambda y_0-2\lambda-1=0$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή

$(y_0-2)\lambda+x_0-1=0$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

ή ισοδύναμα

$y_0-2=0$ και $x_0-1=0$.

Άρα, η ευθεία (ε_λ) διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) $d(\lambda)=\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii) Έχουμε

$$d(\lambda)\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|2\lambda+1|^2\le5(\lambda^2+1)$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda^2+4\lambda+1\le5\lambda^2+5$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4\ge0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2\ge0,$$

ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\lambda=2$.

iv) $\varepsilon_2: x+2y-5=0$.

20. **i)** $\alpha^2-\alpha+1\neq0$ για κάθε $\alpha\in R$

ii) Έχουμε

$$(\alpha^2-\alpha+1)\cdot0+(2-5\alpha)\cdot0+(2\alpha^2+3\alpha)=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \alpha=-\frac{3}{2}.$$

Για τις δύο αυτές τιμές του αριθμού α προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση η ίδια ευθεία

$$\varepsilon_0: x+2y=0.$$

iii) Έχουμε

$\varepsilon_0: x+2y=0$ και $\varepsilon_1: x-3y+5=0$.

Τα διανύσματα

$$\vec{\delta_0}=(2,-1),\ \vec{\delta_1}=(-3,-1)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_0) και (ε_1) αντίστοιχα. Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων, τότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\delta_0}\cdot\vec{\delta_1}}{|\vec{\delta_0}|\cdot|\vec{\delta_1}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

Επομένως,

$$\theta=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{3}.$$

iv) Οι ευθείες (ε_0) και (ε_1) τέμνονται στο σημείο $P(-2,1)$ και οι συντεταγμένες του σημείου P επαληθεύουν τη δοθείσα εξίσωση.

21. **i)** Οι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases}x+3y-7=0\\y=5x-3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3(5x-3)-7=0\\y=5x-3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2.\end{cases}$$

Άρα, $A(1,2)$

και $AB: 7x-3y-1=0$.

ii) $B\Gamma: y=3x+1\Leftrightarrow3x-y+1=0$.

iii) $(A\Delta)=d(A,B\Gamma)$

$$=\frac{|3\cdot1-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

iv) Η κορυφή Γ ανήκει στην ευθεία ΒΓ και συνεπώς $\Gamma(\kappa,3\kappa+1)$ για κάποιο $\kappa\in\mathbb{R}$.

Το μέσο $M\left(\dfrac{\kappa-2}{2},\dfrac{3\kappa-4}{2}\right)$ του τμήματος ΒΓ ανήκει στη διάμεσο $AM: y=5x-3$ και συνεπώς

$$\frac{3\kappa-4}{2}=5\frac{\kappa-2}{2}-3$$
$$\Leftrightarrow3\kappa-4=5(\kappa-2)-6$$
$$\Leftrightarrow-2\kappa=-12\Leftrightarrow\kappa=6.$$

Άρα, $\Gamma(6,19)$.

22. **i)** $\alpha\neq1$.

ii) Οι ευθείες $\varepsilon_0: y=-1$ και $\varepsilon_{-2}: x=2$ τέμνονται στο σημείο $P(2,-1)$ και οι συντεταγμένες του σημείου P επαληθεύουν τη δοθείσα εξίσωση.

iii) $2x+y-3=0$.

iv) $3x+y-5=0$.

23. **i)** Έχουμε $\overrightarrow{OM}=(2,-1)$

και $\overrightarrow{AB}=(-\alpha,\beta)$.

Οπότε, η σχέση $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$

ισοδύναμα γράφεται $-2\alpha-\beta=-4$ δηλαδή $2\alpha+\beta=4$.

ii) Έχουμε

$$(OAB)=\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}\alpha\cdot(-2\alpha+4)$$
$$=-\alpha^2+2\alpha=1-\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)$$
$$=1-(\alpha-1)^2\leq 1$$

για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\alpha=1 \text{ και } \beta=-2+4=2.$$

iii) $K\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$.

24. **i)** Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(3,3)$

και $\overrightarrow{AM}=(\kappa-1,\kappa-3)$.

Οπότε, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-6\neq 0$

για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Επομένως, τα σημεία A, B και M αποτελούν κορυφές τριγώνου για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. Το εμβαδό του τριγώνου αυτά είναι

$$(AMB)=\frac{1}{2}|-6|=3 \text{ τ.μ.}$$

ii) Θέτουμε

$$\kappa-1=x \quad\text{και}\quad \kappa+1=y.$$

Οπότε,

$$\kappa=x+1 \quad\text{και}\quad \kappa=y-1.$$

Επομένως,

$$y-1=x+1$$

ή ισοδύναμα

$$y=x+2.$$

Άρα, το σημείο M κινείται στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=x+2$.

iii) $B'(5,5)$

iv) $M\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

v) Παρατηρούμε ότι

$$(AM)+(MB)=(AM)+(MB')\geq(AB').$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα σημεία A, M και B′ είναι συνευθειακά. Δηλαδή αν και μόνο αν $M\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$. Άρα, η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $(AM)+(MB)$ είναι ίση με $(AB')=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

25. **i)** Δεν υπάρχει τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu^2+1=0 \text{ και } \mu+1=0$$

ii) $\mu^2+1\neq 0$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$

iii) Αναζητούμε σημείο $P(x_0,y_0)$ τέτοιο, ώστε

$$\left(\mu^2+1\right)x_0+(\mu+1)y_0$$
$$-3\mu^2-4\mu-7=0 \text{ για κάθε } \mu\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x_0-3)\mu^2+(y_0-4)\mu$$
$$+x_0+y_0-7=0 \text{ για κάθε } \mu\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x_0-3=0 \text{ και } y_0-4=0$$
$$\text{και } x_0+y_0-7=0$$
$$\Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } y_0=4.$$

Άρα, όλες οι ευθείες (ε_μ) διέρχονται από το σημείο $P(3,4)$.

iv) Το σημείο $P(3,4)$ από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες (ε_μ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (c) αφού

$$(OP)=\sqrt{3^2+4^2}=5<6=\rho.$$

Άρα, κάθε ευθεία (ε_μ) τέμνει τον κύκλο (c) σε δύο σημεία.

26. **i)** Ο κύκλος

$$c:(x-6)^2+(y-8)^2=5^2.$$

με κέντρο το σημείο $K(6,8)$ και ακτίνα $\rho=5$.

ii) $\min(OM)=(OK)-\rho=10-5=5$

$\max(OM) = (OK) + \rho = 10 + 5 = 15.$

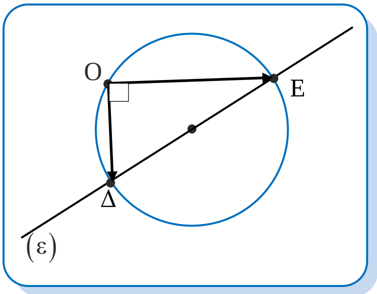
iii) $A(6,3)$.

27. **i)** $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\lambda^2 + 4(\lambda+1)^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Το κέντρο του (c_λ) είναι το $K(\lambda, \lambda+1)$ και ανήκει στην ευθεία $y = x+1$.

iii) $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$.

iv) Παρατηρούμε ότι το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο του κύκλου (c_λ) και όχι της ευθείας (ε).



Επίσης

$$\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OE} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Delta} \perp \overrightarrow{OE}.$$

Άρα, η ΔΕ είναι διάμετρος του κύκλου (c_λ) και συνεπώς το μέσο της, δηλαδή το κέντρο $K(\lambda, \lambda+1)$ είναι σημείο της (ε).

Άρα,

$$\lambda + (\lambda+1) - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

28. **i)** Έχουμε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 4\text{συν}^2\theta + 16\text{συν}\theta$$
$$= 4\left(4 + \text{συν}^2\theta + 4\text{συν}\theta\right)$$
$$= 4(\text{συν}\theta + 2)^2 > 0$$

για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$.

ii) $K(-2, -\text{συν}\theta)$ και

$$\rho = \frac{\sqrt{4(\text{συν}\theta+2)^2}}{2} = |\text{συν}\theta + 2|$$
$$= \text{συν}\theta + 2.$$

iii) $\theta = \pi$

iv) **α)** $y = 0$ και $y = -\dfrac{4}{3}x$.

β) $\min = (OK) - \rho = \sqrt{5} - 1$

και

$\max = (OK) + \rho = \sqrt{5} + 1.$

29. **i)** $E = 2$

ii) $\dfrac{\pi}{2}$

iii) $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$

iv) $d(K, \varepsilon) - \rho = 2 - \dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

30. **i)** Έχουμε

$$\delta = (OK) = 4 = 5 - 1 = \rho_2 - \rho_1.$$

ii) Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) εφάπτονται στο σημείο $A(-1,0)$ και η κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο αυτό είναι η $\varepsilon: x = -1$.

iii) Η διάκεντρος των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Ο κύκλος (c_1) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$, ενώ ο κύκλος (c_2) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$ και $\Gamma(9,0)$. Επομένως ο ζητούμενος κύκλος έχει διάμετρο το τμήμα ΒΓ. Δηλαδή έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(5,0)$ και ακτίνα $\rho = 4$. Η εξίσωσή του είναι

$$(x-5)^2 + y^2 = 16.$$

31. **i)** $K(4,2), \Lambda(0,6), \rho_1 = 4$ και $\rho_2 = 4$

ii) $(K\Lambda) = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} < \rho_1 + \rho_2$

iii) Οι συντεταγμένες των Δ, Ε επαληθεύουν τις εξισώσεις των (c_1)

και (c_2) οπότε επαληθεύουν και την εξίσωση

$$\left(x^2+y^2-8x-4y+4\right)$$
$$-\left(x^2+y^2-12y+20\right)=0$$

$\Leftrightarrow -8x+8y-16=0 \Leftrightarrow y=x+2$.

iv) Έχουμε

$$(\Delta K)=(KE)=(E\Lambda)=(\Lambda\Delta)=4$$

και

$$(K\Lambda)^2=(\Delta K)^2+(\Delta\Lambda)^2.$$

32. **i)** Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$x^2+y^2-2(\lambda+1)x-4(\lambda+1)y$$
$$+(10\lambda+5)=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}^*$$

και

$$A^2+B^2-4\Gamma=20\lambda^2>0$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

ii) Οι κύκλοι έχουν κέντρα τα σημεία $K\left(\lambda+1,\ 2(\lambda+1)\right)$ και ακτίνες

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{20\lambda^2}$$
$$=|\lambda|\sqrt{5}, \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

Θέτουμε $K(x,y)$. Οπότε

$$x=\lambda+1 \text{ και } y=2(\lambda+1).$$

Δηλαδή, $y=2x$.

iii) Οι κύκλοι

$$c_1: x^2+y^2-4x-8y+15=0$$

και

$$c_{-1}: x^2+y^2-5=0$$

έχουν κοινό σημείο το $P(1,2)$ και οι συντεταγμένες του σημείου P επαληθεύουν τη δοθείσα εξίσωση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

iv) $$d(K,\varepsilon)=\frac{|\lambda+1+4(\lambda+1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$=|\lambda|\sqrt{5}=\rho.$$

33. **i)** Έστω (x,y) τυχαίο σημείο ζητούμενης διχοτόμου. Τότε έχουμε

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|12x-5y|}{13}=\frac{|3x+4y|}{5}$$
$$\Leftrightarrow 3x-11y=0 \text{ ή } 11x+3y=0.$$

ii) Έστω $K(x_0,y_0)$ το κέντρο του κύκλου. Τότε έχουμε

$$3x_0-11y_0=0 \Leftrightarrow 3x_0=11y_0$$

και

$$d(K,\varepsilon_2)=\rho \Leftrightarrow \frac{|3x_0+4y_0|}{5}=9$$
$$\Leftrightarrow |3y_0|=9$$
$$\Leftrightarrow y_0=\pm 3.$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τους κύκλους

$$c_1: (x-11)^2+(y-3)^2=81$$

και

$$c_2: (x+11)^2+(y+3)^2=81$$

iii) Τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ είναι τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Ο προς τους δύο κύκλους. Το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ορθογώνιο στο Α. Επομένως

$$(OA)^2=(OK)^2-(KA)^2$$
$$\Leftrightarrow (OA)^2=\left(\sqrt{(\pm 11)^2+(\pm 3)^2}\right)^2-9^2$$
$$\Leftrightarrow (OA)^2=130-81=49$$
$$\Leftrightarrow (OA)=7=(OB).$$

34. **i)** $\varepsilon_1: y=x+1$ και $\varepsilon_2: y=-x-1$.

ii) $B(0,1)$ και $\Gamma(0,-1)$.

iii) Η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ είναι $x^2+y^2=1$. Η εστία της παραβολής (c) είναι το σημείο $E(1,0)$. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του Ε επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου. Επίσης $d(O,\delta)=1=\rho$. Άρα, ο κύκλος εφάπτεται στη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c).

35. **i)** $A\left(\alpha, \alpha\sqrt{2}\right)$, $B\left(\alpha, -\alpha\sqrt{2}\right)$

ii) $\varepsilon_1: x + y\sqrt{2} = 3\alpha$, $\Gamma(3\alpha, 0)$

iii) $\varepsilon_2: y\sqrt{2} - x - \alpha = 0$, $\Delta(-\alpha, 0)$

iv) $\alpha = 2$

36. **i)** $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \dfrac{\alpha^4}{4} + 2\alpha^2 + 4 > 0$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Κέντρο $K\left(\dfrac{\alpha^2}{4}, \alpha\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha^4}{4} + 2\alpha^2 + 4}}{2}.$$

ii) $c: y^2 = 4x$. Η εστία $E(1,0)$ και η διευθετούσα $\delta: x = -1$.

iii) Αναζητούμε σημείο με συντεταγμένες (x_0, y_0) τέτοιο, ώστε

$2x_0^2 + 2y_0^2 - \alpha^2 x_0 - 4\alpha y_0 + \alpha^2 - 2 = 0$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (1 - x_0)\alpha^2 - 4y_0\alpha$

$+\left(2x_0^2 + 2y_0^2 - 2\right) = 0$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ -4y_0 = 0 \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Άρα, ... $E(1,0)$.

iv) Με βάση τον ορισμό της παραβολής έχουμε

$$d(M, \delta) = (ME) = \rho.$$

Άρα, όλοι οι κύκλοι (c_α) εφάπτονται στη διευθετούσα $\delta: x = -1$. Η ευθεία (δ) είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των κύκλων (c_α) αφού τα κέντρα τους δεν είναι συνευθειακά σημεία.

37. **i)** Έχουμε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 64\sigma\upsilon\nu^2\theta + 100\eta\mu^2\theta$

$= 64\left(1 - \eta\mu^2\theta\right) + 100\eta\mu^2\theta$

$= 64 + 36\eta\mu^2\theta > 0$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(4\sigma\upsilon\nu\theta, -5\eta\mu\theta)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{64 + 36\eta\mu^2\theta}}{2} \geq \frac{\sqrt{64}}{2} = 4.$$

ii) Οι συντεταγμένες του σημείου K επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης (c).

iii) Εστίες: $E'(0, -3)$, $E(0, 3)$.

Κορυφές: $A'(0, -5)$, $A(0, 5)$

$B'(-4, 0)$, $B(4, 0)$.

Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{3}{5}$.

iv) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$.

38. **i)** $d(\alpha) = \dfrac{\left|\alpha - \dfrac{1}{8}\alpha^2 - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\left|8\alpha - \alpha^2 - 4\right|}{8\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\left|\alpha^2 - 8\alpha + 32\right|}{8\sqrt{2}}$.

Όμως

$\alpha^2 - 8\alpha + 32 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Η σχέση $d(\alpha) \geq \sqrt{2}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\alpha^2 - 8\alpha + 32 \geq 8 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 4)^2 \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία, άρα και η ισοδύναμή της αρχική σχέση, ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 4$.

iii) $M(4, 2)$.

iv) Η εφαπτομένη (η) της παραβολής (c) στο σημείο M έχει εξίσωση $y = x - 2$.

39. **i)** $\alpha=4$ και $\beta=2\sqrt{3}$.

ii) $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$.

iii) Η έλλειψη (c) έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επομένως, τα σημεία $M_1(2,-3)$ και $M_2(-2,-3)$ είναι σημεία της έλλειψης (c). Οι εφαπτόμενες της (c) στα σημεία M_1 και M_2 έχουν αντίστοιχες εξισώσεις

$$\frac{x\cdot 2}{16}+\frac{y\cdot(-3)}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{8}-\frac{y}{4}=1$$

και

$$\frac{x\cdot(-2)}{16}+\frac{y\cdot(-3)}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{8}+\frac{y}{4}=-1.$$

40. **i)** Οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) $E'(-2,0)$, $E(2,0)$ και $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

iii) $y=2x-1$.

iv) **α)** $(E\Gamma)=\frac{3}{2}$ και $(EM)=3$.

β) $(M\Gamma)^2=\frac{45}{4}$ και

$$\frac{3}{4}(EM)\cdot(E'M)=\frac{3}{4}\cdot 3\cdot 5=\frac{45}{4}.$$

41. **i)** $y=2x$ και $y=-2x$.

ii) $K\left(\frac{2}{2x_1-y_1},\frac{4}{2x_1-y_1}\right)$ και

$$\Lambda\left(\frac{2}{2x_1+y_1},\frac{-4}{2x_1+y_1}\right).$$

iii) Έχουμε

$$\frac{\frac{2}{2x_1-y_1}+\frac{2}{2x_1+y_1}}{2}=\frac{4x_1}{4x_1^2-y_1^2}=\frac{4x_1}{4}=x_1$$

και

$$\frac{\frac{4}{2x_1-y_1}+\frac{-4}{2x_1+y_1}}{2}=\frac{4y_1}{4x_1^2-y_1^2}=\frac{4y_1}{4}=y_1.$$

iv) Έχουμε

$$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{O\Lambda}=\frac{4}{4x_1^2-y_1^2}-\frac{16}{4x_1^2-y_1^2}=\frac{4}{4}-\frac{16}{4}=-3.$$

v) $$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{O\Lambda}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-8}{4x_1^2-y_1^2}-\frac{8}{4x_1^2-y_1^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-8}{4}-\frac{8}{4}\right|=2\text{ τ.μ.}$$

42. **i)** $y=x-1$

ii) $y=-x+3$

iii) $P(0,-1)$ και $\Sigma(0,3)$.

iv) Ο κύκλος με διάμετρο $P\Sigma$ έχει εξίσωση $x^2+(y-1)^2=4$.

Οι εστίες της υπερβολής (c) είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{3},0)$ και $E(\sqrt{3},0)$.

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων E' και E επαληθεύουν την εξίσωση του παραπάνω κύκλου.

Βιβλιογραφία

Π. ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗΣ – Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ, «Θέματα Διανυσματικού Λογισμού» (Μαθηματική Βιβλιοθήκη).

Θ. ΚΑΖΑΝΤΖΗΣ – Ε. ΜΗΤΣΙΟΥ – Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ, «Εξετάσεις 95 – Θέματα» (Μαθηματική Βιβλιοθήκη).

Γ. ΤΑΣΣΟΠΟΥΛΟΣ «Διανυσματικός Λογισμός» (Πελεκάνος).

Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ, «Γενικά Θέματα Μαθηματικών» (Γκατζούλη).

Π. ΚΟΥΤΡΟΥΜΠΑΣ – Π. ΜΥΤΑΡΕΛΛΗΣ, «Επαναληπτικά Θέματα 1ης Δέσμης», (Μαθηματική Βιβλιοθήκη).

Δ. ΓΕΩΡΓΑΚΙΛΑΣ – Τ. ΘΕΟΔΩΡΟΠΟΥΛΟΣ, «Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία» (Μαθηματική Βιβλιοθήκη).

Σ. ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – Γ. ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ, «Ασκήσεις Διανυσματικού Λογισμού» (Σπηλιώτη).

Ι. ΠΑΝΑΚΗΣ, «Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού».

Δ. ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, «Διανυσματικός Λογισμός και Αναλυτική Γεωμετρία» (Πράξη).

Ν. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, «Αναλυτική Γεωμετρία» (Παπαδημητρόπουλος).

Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ – Π. ΜΙΜΙΛΙΔΗΣ – Δ. ΠΕΤΡΙΔΗΣ, «Θέματα και Διαγωνίσματα Μαθηματικών» (Πυραμίδα).

Γ. ΜΠΑΪΛΑΚΗΣ, «Γενικά Θέματα Εξετάσεων» (Πελεκάνος).

Γ. ΜΠΑΪΛΑΚΗΣ, «Κριτήρια Αξιολόγησης Μαθηματικών» (Σαββάλας).

Α. ΚΟΥΡΚΟΥΛΟΣ, «Αναλυτική Γεωμετρία» (Ε.Σ.Σ.Κ.).

Α. ΤΣΟΥΛΦΑΝΙΔΗΣ, «Αναλυτική Γεωμετρία» (Πατάκης).

Περιοδικά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ
Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ
ΤΟ φ
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ
ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ
ΔΙΑΣΤΑΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ
ΚΒΑΗΜ
KVANTUM
CRUX
THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
THE MATHEMATICAL GAZETTE
THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL
MATHEMATICAL SPECTRUM
ELEMENTE DER MATHEMATIK
MATHEMATICS MAGAZINE
THE MATHEMATICS TEACHER