5ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

ΗΜΑΘΙΑ ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Α' - Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

ΑΓΙΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΝΑΟΥΣΑΣ

5ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

ΗΜΑΘΙΑ ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις που κρατάτε στα χέρια σας έχουν σκοπό την υποστήριξη του διδακτικού έργου κατά τη διάρκεια του 5ου Μαθηματικού Καλοκαιρινού Σχολείου που διοργανώνουν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και το παράρτημα της Ημαθίας στον Άγιο Νικόλαο Νάουσας τον Αύγουστο του 2011.

Οι περισσότερες αφορούν θεωρία και ασκήσεις. Η έκτασή τους είναι πολύ μεγαλύτερη από τις ανάγκες της μιας διδακτικής εβδομάδας του καλοκαιρινού σχολείου δίνοντας κίνητρο στον μαθητή που αγαπάει τα μαθηματικά να ασχοληθεί και τον υπόλοιπο καιρό με αυτά. Πιστεύουμε ότι μπορούν να βοηθήσουν τον μαθητή και για το σχολείο του, αλλά και για την προσπάθεια του για επιτυχία στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Οι σημειώσεις περιλαμβάνουν στοιχεία από την Άλγεβρα, τη Γεωμετρία, τη Θεωρία αριθμών, τη Συνδυαστική και κάποια ειδικά θέματα.

Η Δ.Ε. του Παρατήματος Ημαθίας και η Επιτροπή διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εκφράζουν τις ευχαριστίες τους προς όλους τους συναδέλφους που συνεισέφεραν για τη δημιουργία των σημειώσεων αυτών.

Η Δ.Ε. του Παραρτήματος της ΕΜΕ και η Επιτροπή Διαγωνισμών της ΕΜΕ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Σπυρίδη Κατερίνα, μαθηματικός, Βέροια

e-mail: cat_spyridi@mycosmos.gr

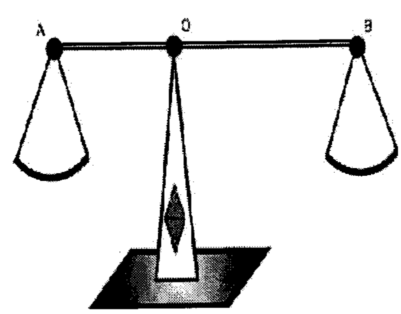
⇒ ΠΡΑΞΕΩΝ

1. Ένας υπάλληλος μιας επιχείρησης μπορεί να αμοιφθεί με βάση δύο διαφορετικά προγράμματα.
Α' πρόγραμμα: 1.000.000 τον πρώτο χρόνο και αύξηση 200.000 κάθε χρόνο.
Β' πρόγραμμα: 500.000 το πρώτο εξάμηνο και αύξηση 50.000 κάθε εξάμηνο.
Ποιο πρόγραμμα συμφέρει να διαλέξει ο υπάλληλος;

2. Ένας καταστηματάρχης θέλοντας να κάνει εικονικές εκπτώσεις, αύξησε τις τιμές κατά 20% και πουλά με έκπτωση 20%. Είναι τώρα πιο κερδισμένος ή πιο χαμένος και πόσο τοις % ;

3. Ένας υφασματοπώλης αγοράζει το τρεχούμενο μέτρο ενός υφάσματος 5.000 δρχ. και πουλά το τετραγωνικό μέτρο 8.000 . Αν το φάρδος του υφάσματος είναι 75 εκατοστά, πόσο τοις % κερδίζει;

4. Ένας καταστηματάρχης είχε μία ζυγαριά με δύο δίσκους όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να κλέβει τους πελάτες του, κόντυνε τον ένα βραχίονα ΟΑ της φάλαγγας ώστε βάζοντας τα σταθμά στον δίσκο Α και το εμπόρευμα στο δίσκο Β να κλέβει 20%. Μια φορά όμως μπερδεύτηκε και έβαλε τα σταθμά στο δίσκο Β και το εμπόρευμα στο δίσκο Α. Πόσο τοις % έχασε από αυτή τη ζύγιση; (τα ποσοστά υπολογίζονται πάνω στο βάρος των σταθμών)



5. Τι είναι προτιμότερο για κάποιον απατεώνα που πουλά ζάχαρη α) να αυξήσει την τιμή της κατά 20% β) να κλέβει από το ζύγισμα 20%. Πόσο τοις % πιο προσοδοφόρος είναι ο ένας τρόπος από τον άλλο;

6. Σε μία ιχθυοκαλλιέργεια τα ψάρια κάθε χρόνο αυξάνονται κατά 100% . Μετά την αύξηση, το 40% των ψαριών πωλούνται στην αγορά. Αυτό επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο. Μετά από πόσα χρόνια ο πληθυσμός των ψαριών (μετά την πώληση) θα γίνει τουλάχιστον δεκαπλάσιος από τον αρχικό πληθυσμό;

7. Ένα νούφαρο που διπλασιάζεται σε μέγεθος κάθε μέρα, κάνει 30 μέρες για να καλύψει την επιφάνεια μιας λίμνης. Να βρείτε πόσες μέρες θα έκαναν δύο νούφαρα για να καλύψουν τη λίμνη.

8. Ένα γατάκι έπεσε σ' ένα πηγάδι βάθους 10 μέτρων. Κάθε μέρα ανέβαινε 3 μέτρα, αλλά το βράδυ γλιστρούσε πίσω 2 μέτρα. Σε πόσες μέρες βγήκε το γατάκι από το πηγάδι;

9. Ένας ηλικιωμένος Αραβας είπε στους τρεις γιους του ότι τους αφήνει κληρονομιά τις καμήλες του. Ο μεγαλύτερος γιος θα έπαιρνε τις μισές καμήλες, ο μεσαίος το 1/3 και ο μικρότερος το 1/9 των καμηλών του. Αφού πέθανε ο πατέρας τους, πήγαν να δουν τις καμήλες αλλά διαπίστωσαν πως ήταν 17 και δεν μπορούσαν να τις μοιράσουν όπως τους είχε πει. Δεν ήθελαν να πουλήσουν ούτε ν' αγοράσουν καμία. Εκείνη τη στιγμή εμφανίστηκε καβάλα στην καμήλα του ο Αμπντουλάχ, ο οποίος βρήκε τρόπο να μοιράσουν τις καμήλες όπως ήθελε ο πατέρας τους. Τι τους είπε να κάνουν;

10. Πόσο είναι το 1/2 των 2/3 των 3/4 των 4/5 των 5/6 των 6/7 των 7/8 των 8/9 των 9/10 του χίλια;

11. Σε ένα κουρείο ένας πελάτης ρωτά τον "περίεργο" κουρέα μετά το ξύρισμα τι του οφείλει, και εκείνος απάντησε: Άνοιξε το συρτάρι, δες πόσα έχει μέσα, βάλε άλλα τόσα και πάρε ρέστα 10.000 δρχ. Το ίδιο έγινε άλλες δύο φορές με άλλους δύο πελάτες και την τελευταία φορά δεν έμεινε στο συρτάρι τίποτα. Πόσα χρήματα βρήκε στο συρτάρι ο πρώτος και πόσα οι άλλοι δύο;

12. Στις εξετάσεις ενός διαγωνισμού κάποιος απάντησε σε 20 ερωτήματα. Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 2 μονάδες και για κάθε λανθασμένη απάντηση έχανε 1 μονάδα. Η συνολική βαθμολογία του ήταν 25 μονάδες. Να βρείτε σε πόσα ερωτήματα απάντησε σωστά.

13. Σ' ένα παιχνίδι ενός καζίνο, αν ο παίχτης κερδίσει τη δεύτερη παρτίδα, κερδίζει τα διπλάσια χρήματα, απ' όσα κέρδισε στην πρώτη παρτίδα. Αν κερδίσει και στην τρίτη παρτίδα, κερδίζει τα τριπλάσια χρήματα απ' όσα κέρδισε στη δεύτερη παρτίδα κ.ο.κ, στην τέταρτη παρτίδα κερδίζει τα τετραπλάσια χρήματα απ' όσα κέρδισε στην τρίτη παρτίδα και στην πέμπτη παρτίδα κερδίζει τα πενταπλάσια χρήματα απ' όσα κέρδισε στην τέταρτη παρτίδα. Ο κύριος Τυχερίδης πήγε στο παιχνίδι και κέρδισε συνολικά 12.000 €Πόσα κέρδισε πρώτη παρτίδα;

14. Ξόδεψε κάποιος τα μισά των μισών χρημάτων του και τα μισά των υπολοίπων και του έμειναν 300 δρχ. Πόσες δρχ. είχε αρχικά;

15. Μία στρατιωτική φάλαγγα αποτελείται από 61 οχήματα που κινούνται πάνω σε ένα δρόμο με σταθερή ταχύτητα και σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Σ' ένα σημείο της διαδρομής στέκεται ένας παρατηρητής που αρχίζει να χρονομετρά μόλις το πρώτο αυτοκίνητο περνά από μπροστά του. Χρειάστηκαν ακριβώς 22 λεπτά για να περάσουν τα 11 πρώτα αυτοκίνητα από μπροστά του. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να περάσει όλη η φάλαγγα;

16. Τρείς ποδηλάτες Α, Β, Γ κινούνται σε ένα κυκλικό στίβο με σταθερές ταχύτητες και κατά την ίδια φορά. Ο Α προσπερνά τον Β κάθε 12 λεπτά και ο Β προσπερνά τον Γ κάθε 6 λεπτά. Κάθε πόσα λεπτά προσπερνά ο Α τον Γ;

17. Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο ενός κύκλου και κινούνται κατά την ίδια φορά με σταθερές ταχύτητες. Το Α διατρέχει όλο τον κύκλο σε 12 δευτερόλεπτα, ενώ το Β σε 30 δευτερόλεπτα. Μετά από πόσο χρόνο τα δύο κινητά θα συναντηθούν για πρώτη φορά; Μετά από πόσο χρόνο (από τη στιγμή της εκκίνησης) θα συναντηθούν για πρώτη φορά στο σημείο εκκίνησης;

18. Ένα ρολόι πηγαίνει κάθε ώρα 4 λεπτά μπροστά. Ένα άλλο πηγαίνει κάθε ώρα 2 λεπτά πίσω. Μία μέρα στις 12 το μεσημέρι βάλαμε και τα δύο στη σωστή ώρα. Κάποια στιγμή το απόγευμα της ίδιας μέρας το ένα έδειχνε 21 λεπτά περισσότερο από το άλλο. Τι ώρα έδειχνε κάθε ρολόι;

19. Έχουμε ένα χαλασμένο ρολόι το οποίο χάνει 24 λεπτά κάθε ώρα. Το ρυθμίσαμε στις 12:00 το μεσημέρι να δείχνει τη σωστή ώρα και τώρα δείχνει 3:00. Σταμάτησε όμως να λειτουργεί εδώ και μία ώρα. Τι ώρα είναι τώρα;

20. Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που
όταν διαιρεθεί δια 2 αφήνει υπόλοιπο 1
όταν διαιρεθεί δια 3 αφήνει υπόλοιπο 2
όταν διαιρεθεί δια 4 αφήνει υπόλοιπο 3 κ.ο.κ.
....
όταν διαιρεθεί δια 10 αφήνει υπόλοιπο 9.

21. Ο Πέτρος στο σχολείο κατά τη διάρκεια ενός διαλείματος μετρούσε τους μαθητές. Αν τους μετρούσε δύο-δύο περίσσευε ένας, μετρώντας τους τρεις-τρεις περίσσευαν δύο, τέσσερις-τέσσερις περίσσευαν τρεις, πέντε-πέντε περίσσευαν τέσσερις, έξι-έξι περίσσευαν πέντε. Αν όμως τους μετρούσε επτά-επτά δεν περίσσευε κανείς. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών αν γνωρίζετε ότι είναι λιγότεροι από 200.

22. Σε μια τάξη υπάρχουν 23 μαθητές. Ο γυμναστής τους παρέταξε σε μια ευθεία και αρχίζοντας από τον 1^{o}, διάλεξε τους μαθητές που βρίσκονταν στις περιττές θέσεις και τους έδωσε μια μπάλα να παίξουν. Κατόπιν αρχίζοντας από τον τελευταίο, διάλεξε πάλι τους μαθητές που βρίσκονταν στις περιττές θέσεις και τους έδωσε μια άλλη μπάλα για να παίξουν. Πόσοι μαθητές δεν έπαιξαν μπάλα;

23. Ο Κώστας και η Μαρία, που είναι δίδυμοι, στα γεννέθλιά τους έβγαλαν τους φίλους τους για να τους κεράσουν. Ο Κώστας για 2 αναψυκτικά και 3 καφέδες πλήρωσε 13 €Η Μαρία για 3 αναψυκτικά και 4 καφέδες πλήρωσε 18 €Να βρρείτε πόσο κοστίζει το αναψυκτικό και πόσο ο καφές.

24. Τρεις φίλες η Άννα, η Βαγγελιώ και η Γεωργία μετρούν τα παγωτά που έφαγε η καθεμία μέχρι τώρα. Προσθέτοντας τα παγωτά που έφαγε η Άννα και η Βαγγελιώ βγαίνουν 22. Προσθέτοντας τα παγωτά που έφαγε η Βαγγελιώ και η Γεωργία βγαίνουν 27. Προσθέτοντας τα παγωτά που έφαγε η Γεωργία και η Άννα βγαίνουν 25. Να βρείτε πόσα παγωτά έφαγε η καθεμιά.

⇒ ΛΟΓΙΚΗΣ

1. Βάζω στο τραπέζι οποιονδήποτε αριθμό κερμάτων, π.χ. 10 κέρματα, άλλα κορώνα, άλλα γράμματα. Γυρίζω την πλάτη μου ώστε να μην βλέπω τα κέρματα και κάποιος αναποδογυρίζει τα κέρματα (μπορεί να αναποδογυρίσει όσα κέρματα θέλει και οσεσδήποτε φορές το καθένα με οποιαδήποτε σειρά). Σε κάθε αναποδογύρισμα με ενημερώνει με την λέξη «γύρισα». Κατόπιν κρύβει κάτω από την παλάμη του ένα κέρμα και ζητά να μαντέψω αν είναι κορώνα η γράμμα. Γυρίζοντας εγώ μπροστά και βλέποντας τα υπόλοιπα κέρματα βρίσκω με σιγουριά αν το κρυμμένο κέρμα είναι κορώνα ή γράμμα. Βρείτε τον τρόπο.

2. Τοποθετούμε στο τραπέζι 3 διαφορετικά μικρά αντικείμενα, π.χ. 3 κέρματα σε 3 θέσεις που τις ονομάζουμε Α, Β, Γ. Ζητούμε από κάποιον φίλο μας να διαλέξει νοερά (δηλ. χωρίς να μας το δείξει) ένα από τα τρία αντικείμενα. Γυρίζουμε τις πλάτες μας προς αυτόν και του ζητούμε να αλλάξει τις θέσεις των αντικειμένων όσες φορές θέλει ανακοινώνοντας κάθε φορά την αλλαγή που κάνει. Π.χ. μας λέει «Α με Β» που σημαίνει ότι αλλάζει τις θέσεις των αντικειμένων που βρίσκονται σ' αυτές τις θέσεις. Αυτό γίνεται όσες φορές θέλει. Σε κάποια αλλαγή αλλάζει τις θέσεις των δύο αντικειμένων που δεν διάλεξε. Αυτή την αλλαγή δεν μας την ανακοινώνει. Αυτή η αλλαγή μπορεί να γίνει ή στην αρχή ή στο τέλος ή ενδιάμεσα των άλλων αλλαγών. Αφού τελειώσει τις αλλαγές, γυρίζουμε προς αυτόν, και βλέποντας τις νέες θέσεις των 3 αντικειμένων, βρίσκουμε ποιο διάλεξε. Βρείτε τον τρόπο.

3. Από μία τράπουλα 52 χαρτιών παίρνουμε στη τύχη 4. Τοποθετούμε τα χαρτιά αυτά πάνω στο τραπέζι με όψη πάνω και σκεπάζουμε κάθε χαρτί με τόσα χαρτιά με όψη κάτω όσοι είναι η διαφορά του χαρτιού από το 10. Π.χ. ένα τριάρι θα το σκεπάσουμε με 10-3=7 . Ένα εξάρι θα το σκεπάσουμε με 10-6=4 χαρτιά κ.ο.κ.
Τα χαρτιά που περίσσεψαν από μία τέτοια διαδικασία ήταν 29. Ποιο ήταν το άθροισμα των 4 αρχικών χαρτιών;

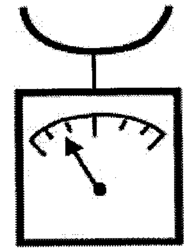
4. Πόσοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 1 ως 1000 που δεν λήγουν σε 3 και όταν διαιρούνται δια 7 αφήνουν υπόλοιπο 2;

5. Οι συνηθισμένες εφημερίδες διπλώνονται έτσι, ώστε κάθε φύλλο χαρτιού να γίνεται 4 σελίδες. Σε μία τέτοια εφημερίδα, οι σελίδες 9 και 23 βρίσκονται στο ίδιο φύλλο χαρτιού. Πόσες σελίδες έχει η εφημερίδα;

6. Στο παζάρι της Βέροιας μια χωρική Α είχε 60 αυγά και τα πουλούσε προς 140 δρχ. τα 3. Μία άλλη χωρική είχε 70 αυγά και τα πουλούσε προς 300 δρχ. τα 7. Για να μην κουράζονται και οι δύο έβαλαν όλα τα αυγά μαζί και πουλούσε μόνο η Α τα 10 αυγά 440 δρχ. (όσο δηλ. θα τα πουλούσαν ξεχωριστά). Με τον τρόπο αυτό η Α έκανε τα 60+70=130 αυγά 13 δεκάδες και τα πούλησε 13*440= 5720 δρχ. Όταν κατόπιν θέλησαν να μοιραστούν τα χρήματα παρατήρησαν ότι τους έλειπαν 80 δρχ. Διότι η Α με τα 60 αυγά που ήταν 60:3=20 τριάδες θα έπαιρνε (αν τα πουλούς μόνη της) 20*140=2800 δρχ. Η Β, απ' τα 70 αυγά που ήταν 70:7=10 επτάδες θα έπαιρνε 100*300=3000 δρχ. Έτσι αν τα πουλούσαν ξεχωριστά θα έπαιρναν συνολικά 2800+3000=5800 δρχ. ενώ τώρα πήραν 5720 δρχ. Πώς χάθηκαν οι 5800-5720=80 δρχ ;

7. Ανακατώνοντας μία ποσότητα γάλατος με νερό μα αναλογία γάλα : νερό =3:2 κάνουμε 8 μπολ κρέμας. Αν ανακατέψουμε την ίδια ποσότητα γάλατος με νερό με αναλογία όμως γάλα : νερό = 2:3 πόσα μπολ κρέμας θα κάνουμε; (Υποτίθεται ότι τα υπόλοιπα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν ζάχαρη κ.λ.π. δεν καταλαμβάνουν όγκο.)

8. Έχουμε 9 σφαίρες, 3 άσπρες, 3 κόκκινες και 3 πράσινες. Οι σφαίρες των 2 χρωμάτων ζυγίζουν κάθε μία 100 γρ. ενώ οι σφαίρες του άλλου χρώματος ζυγίζουν κάθε μία 110 γρ. Έχουμε και μία ζυγαριά ακριβείας με δείκτη (χωρίς σταθμά) όπως αυτή που δείχνει το σχήμα. Πώς μπορούμε με μία μόνο ζύγιση να βρούμε ποιες είναι οι βαρύτερες σφαίρες;



9. Ένας ορειβάτης ξεκίνησε από τη βάση ενός βουνού στις 8:00 π.μ. και έφτασε στην κορυφή του βουνού στις 4:00 μ.μ. Αφού διανυκτέρευσε εκεί, την επόμενη το πρωί ξεκίνησε στις 8:00 π.μ. και ακολουθώντας το ίδιο μονοπάτι έφτασε στη βάση στις 4:00 μ.μ. Από ένα σημείο της διαδρομής πέρασε ακριβώς την ίδια ώρα και ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας αν και προσπάθησε να το αποφύγει. ξηγείστε το αναπόφευκτο αυτού του συμβάντος. (Υποτίθεται ότι ο ορειβάτης δεν κινείται με σταθερή ταχύτητα αλλά μπορεί να αυξομειώνει την ταχύτητά του ώστε να αποφύγει το παραπάνω συμβάν)

10. Κάποια κυρία έχει ένα κουτί με σοκολατάκια, ένα με μπισκότα και ένα με καραμέλες. Κάθε κουτί έχει μια ετικέτα στην οποία αναγράφεται το περιεχόμενό του. Οι ετικέτες, όμως, έχουν μπει και στα τρία λάθος. Μπορείς να βρεις τι περιέχει κάθε κουτί ανοίγοντας μόνο το ένα από αυτά;

11. Τρεις φίλοι, ο κύριος Κόκκινος, ο κύριος Μπλε και ο κύριος Πράσινος, κάθονται και συζητούν. Ο ένας φοράει κόκκινο, ο άλλος μπλε και ο τρίτος πράσινο κοστούμι. Τον λόγο παίρνει αυτός που φοράει το μπλε κοστούμι και λέει: "Προσέξατε κάτι; Κανένας μας δεν φοράει κοστούμι ίδιο με τ' όνομά του". "Πράγματι, έχεις δίκιο. Δεν το 'χα προσέξει", συμπληρώνει ο κύριος Κόκκινος. Τι χρώμα κοστούμι φοράει ο καθένας;

12. Ο Νίκος κάνει την εξής δήλωση: "Όπως όλος ο κόσμος έτσι και 'γω, λέω πάντοτε ψέματα". Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από τη δήλωσή του; Λέει πάντα αλήθεια, πάντοτε ψέματα ή πότε αλήθεια και πότε ψέματα; Επίσης η δήλωσή του είναι αληθής ή ψευδής;

13. Έχουμε τρία δοχεία. Το ένα χωράει 10, το άλλο 7 και το τρίτο 3 λίτρα νερό. Αυτό που χωράει 10 είναι γεμάτο και τ' άλλα δύο άδεια. Πως μπορούμε να βάλουμε σε ένα από τα δοχεία ακριβώς 5 λίτρα νερό, χωρίς ζυγαριά, κάνοντας μόνο μεταφορές νερού απ' το ένα δοχείο στο άλλο;

14. Σε μία φιλική συγκέντρωση παρευρέθηκαν 10 άτομα. Κάθε ένας έκανε χειραψία με όλους τους υπόλοιπους. Πόσες συνολικά χειραψίες έγιναν;

15. Ένας σύλλογος έχει αναλάβει να διοργανώσει ένα τουρνουά πινγκ-πονγκ. Οι αγώνες είναι νοκ-άουτ, που σημαίνει πως όποιος χάνει δεν ξανα-αγωνίζεται, ενώ δεν υπάρχει περίπτωση ισοπαλίας μεταξύ των δύο αθλητών. Όποιος κερδίσει προκρίνεται στον επόμενο γύρο, μέχρι τελικά να αναδειχθεί ένας νικητής. Δεν γίνονται αγώνες για την 3η, 4η, κλπ. θέση. Ο υπεύθυνος του τουρνουά θέλει να μπορεί να υπολογίσει γρήγορα τον ελάχιστο συνολικό αριθμό των αγώνων που θα απαιτηθούν για την ανάδειξη ενός νικητή ώστε να κανονίσει το πρόγραμμα της διοργάνωσης. Και για να το επιτύχει αυτό θα πρέπει να ξέρει εκ των προτέρων έναν τύπο υπολογισμού του αριθμού των αγώνων που απαιτούνται, αν δηλώσουν συμμετοχή x αθλητές. Μπορείτε να του υποδείξετε τον τύπο αυτόν; Και το σημαντικότερο: μπορείτε να τον πείσετε με λογικά επιχειρήματα ότι έχετε δίκιο;

16. Μια γνωστή σοκολατοβιομηχανία σκέφτηκε την ακόλουθη προσφορά για να διαφημίσει τα προϊόντα της: Κάθε επτά χαρτιά περιτυλίγματος της σοκολάτας τους που θα τους έφερνε κάποιος, θα του έκαναν μία σοκολάτα δώρο. Ένας μικρός μέτρησε τα χαρτιά από τις σοκολάτες που είχε φάει και τα έβγαλε 49. Πόσες σοκολάτες δικαιούται να πάρει δωρεάν;

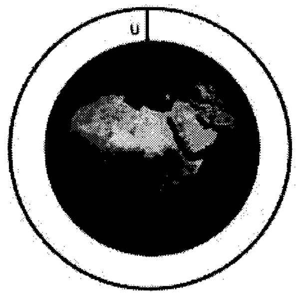
17. Ένας κύριος επιστρέφει σπίτι με το σκύλο του, μετά από βόλτα που τον είχε βγάλει. Ο κύριος περπατάει με σταθερή ταχύτητα 4 χιλιομέτρων την ώρα. Επειδή ο σκύλος του ήταν πολύ ανήσυχος, 8 χιλιόμετρα πριν φτάσουν, του αφήνει το λουρί για να τρέξει σπίτι. Ο σκύλος τρέχει με σταθερή ταχύτητα 10 χιλιομέτρων την ώρα. Μόλις φτάνει στο σπίτι και βλέπει την πόρτα κλειστή, κάνει ακαριαία μεταβολή και επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα προς το αφεντικό του. Μόλις τον φτάσει κάνει πάλι μεταβολή και ξανακατευθύνεται προς το σπίτι. Αυτό το μπρος-πίσω του σκύλου επαναλαμβάνεται μέχρι που φτάνει ο κύριος στο σπίτι και του ανοίγει την πόρτα. Πόση απόσταση θα έχει διανύσει ο σκύλος από τη στιγμή που του άφησε το λουρί;

Υπόδειξη: Οι φυσικοί λύνουν αυτό το πρόβλημα πιο γρήγορα από τους μαθηματικούς ;-)

18. Ο Πέτρος και η Μαρία ζουν μαζί με τα 12 παιδιά τους. Κάποια από αυτά είναι από τον προηγούμενο γάμο του Πέτρου και κάποια από τον προηγούμενο γάμο της Μαρίας. Ο καθένας τους συνδέεται άμεσα με 9 από τα παιδιά αυτά. Πόσα παιδιά απέκτησαν μαζί;

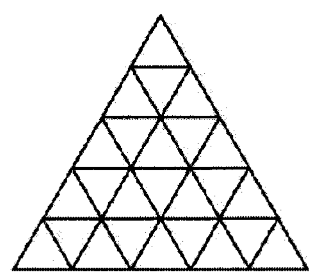
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Υποθέστε ότι η γη είναι τελείως σφαιρική και λεία. Δένουμε σφικτά τη γη με ένα σκοινί στον ισημερινό της. Κόβουμε κατόπιν το σκοινί και προθέτουμε ένα μέτρο σκοινί. Έτσι τι σκοινί χαλαρώνει και απέχει από τη γη μία απόσταση υ. Πόση είναι η απόσταση αυτή; (Η ακτίνα της γης είναι 6.400 χιλιόμετρα)

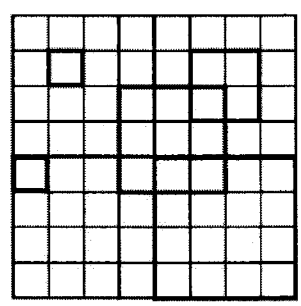


2. Αν σε ένα ορθογώνιο αυξήσουμε τις διαστάσεις κατά 1 m., το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 10 m2 . Πόσο ελαττώνεται το εμβαδόν αν μειώσουμε τις διαστάσεις κατά 1 m;

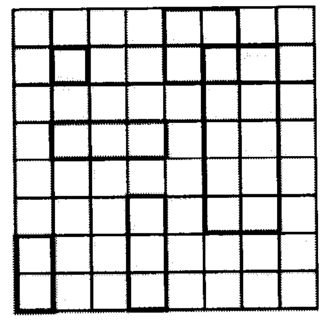
3. Στο διπλανό ισόπλευρο τρίγωνο κάθε πλευρά έχει διαιρεθεί σε 5 ίσα τμήματα και τα σημεία των διαιρέσεων έχουν ενωθεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσα τρίγωνα όλων των μεγεθών υπάρχουν στο σχήμα;



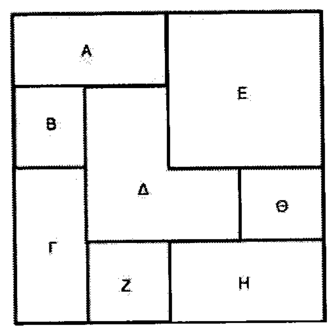
4. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από 8*8=64 μικρά τετράγωνα. Πόσα συνολικά τετράγωνα όλων των μεγεθών υπάρχουν στο σχήμα;



5. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από 8*8=64 μικρά τετράγωνα. Πόσα συνολικά ορθογώνια όλων των μεγεθών υπάρχουν στο σχήμα;



6. Το διπλανό σχήμα δείχνει 8 τετράγωνα χαρτιά του ίδιου μεγέθους που επικαλύπτουν μερικώς το ένα το άλλο. Ποια είναι η σειρά των χαρτιών από πάνω προς τα κάτω;



ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε. Μ. Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ Γυμνασίου

Σαραφοπούλου Χαρίκλεια

Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης

ΣΤΑΓΟΝΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- **Φυσικοί** λέγονται οι αριθμοί τους οποίους συναντάμε στη φύση (0,1,2,3,…) Τους φυσικούς αριθμούς τους χωρίζουμε σε άρτιους (ζυγούς) και σε περιττούς (μονούς).

  Άρτιος λέγεται κάθε φυσικός αριθμός ο οποίος διαιρείται με το 2, ενώ **περιττός** όταν δεν διαιρείται με το 2.

- **Ρητοί αριθμοί** λέγονται εκείνοι που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ είναι ακέραιος και ν φυσικός αριθμός διάφορος του μηδέν.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στρογγυλοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία αντικαθιστούμε έναν αριθμό με έναν άλλο λίγο μεγαλύτερο ή λίγο μικρότερο.
Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Επιλέγουμε την τάξη στην οποία θα κάνουμε τη στρογγυλοποίηση (η αξία ενός ψηφίου σε απλές μονάδες καθορίζεται από τη θέση που κατέχει. Έτσι όταν αναφερόμαστε στην τάξη ενός ψηφίου αναφερόμαστε στην αξία ουσιαστικά του ψηφίου, π.χ. τάξη μονάδων, εκατοντάδων, χιλιάδων κ.ο.κ.)
2. Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως επόμενης τάξης προς τα δεξιά οπότε και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
   i. Αν το στοιχείο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 τότε αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία με μηδέν.
   ii. Αν το στοιχείο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9 τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα το στοιχείο της τάξης

που θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε και αντικαθιστούμε όλα τα υπόλοιπα με μηδέν.

Παραδείγματα

1. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί : 8487,3452 και 68645 στην πλησιέστερη
   - **i.** Δεκάδα
   - **ii.** Εκατοντάδα
   - **iii.** Χιλιάδα

Λύση

- **i.** Στην πλησιέστερη δεκάδα: 8490, 3450, 68650
- **ii.** Στην πλησιέστερη εκατοντάδα: 8500, 3500,68600
- **iii.** Στην πλησιέστερη χιλιάδα: 8000, 3000, 69000

2. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί : 5,7853 και 9,3218 στο πλησιέστερο
   - i. Δέκατο
   - ii. Εκατοστό

Λύση

- **i.** Στο πλησιέστερο δέκατο: 5,8000 ή 5,8 και 9,3000 ή 9,3
- **ii.** Στο πλησιέστερο εκατοστό: 5,7900 ή 5,79 και 9,3200 ή 9,32

<u>Πράξεις φυσικών αριθμών</u>

Πρόσθεση

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης λέγεται **άθροισμα.**

Το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι πάντα φυσικός αριθμός.

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ και είναι οι εξής:

- **Αντιμεταθετική**: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- **Προσεταιριστική**: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
- **Ουδέτερο στοιχείο**: $\alpha+0=0+\alpha$

Αφαίρεση

Η **αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία όταν δίνονται δύο αριθμοί Μ (μειωτέος) και Α(αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο Α δίνει το Μ.

Για να γίνει η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς πρέπει να ισχύει: Μ>Α ή Μ=Α

Αν Μ=Α τότε η διαφορά είναι μηδέν.

Πολλαπλασιασμός

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών α, β λέγεται γινόμενο και συμβολίζεται ως: $\alpha \cdot \beta$ ή $\alpha\beta$.

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ και είναι οι εξής:

- **Αντιμεταθετική**: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική**: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
- **Ουδέτερο στοιχείο**: $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$

Η ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ λέγεται **επιμεριστική** ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δύναμη α^ν **με βάση** α **και εκθέτη τον φυσικό αριθμό ν είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με α,** δηλαδή

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ορίζουμε : $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = 1$ **και αν** $\alpha \neq 0$**, τότε:** $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. $\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$,
2. $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$,
3. $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$,
4. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, αν $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$,

5. $(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$,

6. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$, αν $\beta\neq 0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Αριθμητική παράσταση ονομάζουμε κάθε έκφραση αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τις γνωστές πράξεις.

Τιμή της αριθμητικής παράστασης ονομάζουμε τον αριθμό που προκύπτει αν εκτελεστούν όλες οι πράξεις.

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή της παράστασης ακολουθούμε μία σειρά η οποία και ονομάζεται προτεραιότητα των πράξεων, η οποία έχει ως εξής:

1. *Υπολογίζουμε τις δυνάμεις*
2. *Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται*
3. *Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται.*

Αν στην αριθμητική μας παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις τότε προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=6{,}8\div 3{,}4+\left(4{,}2^2-3{,}7^2\right)\cdot 4$$

Λύση

$$A=6{,}8\div 3{,}4+\left(4{,}2^2-3{,}7^2\right)\cdot 4=$$

$$=6{,}8\div 3{,}4+(17{,}64-13{,}69)\cdot 4=$$

$$=6{,}8\div 3{,}4+3{,}95\cdot 4=$$

$$=2+15{,}8=17{,}8$$

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ένα κλάσμα παριστάνεται με $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. Ο αριθμός μ ονομάζεται **αριθμητής** του κλάσματος και ο ν **παρονομαστής**.

Ομώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, ενώ **ετερώνυμα** τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή.

Ισοδύναμα ονομάζονται δύο κλάσματα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος μιας ποσότητας.

Για να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (διάφορο του μηδενός).

Απλοποίηση ενός κλάσματος είναι η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε ένα ισοδύναμο με μικρότερους όρους.

Ένα κλάσμα ονομάζεται **ανάγωγο** όταν δεν μπορεί να απλοποιηθεί.

Ένα κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα όταν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή.

Όταν ο αριθμητής του κλάσματος είναι μηδέν τότε το κλάσμα είναι ίσο με το μηδέν.

❖ **Σύγκριση κλασμάτων**

Αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

Αν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα:

- Τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές.
- Αν τα κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

Παραδείγματα

1. Να συγκριθούν τα παρακάτω κλάσματα:

   i. $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

   ii. $\frac{4}{9}, \frac{4}{6}$

iii. $\frac{5}{6},\frac{7}{9}$

Λύση

i. Τα κλάσματα έχουν ίδιο παρονομαστή άρα $\frac{2}{5}<\frac{4}{5}$

ii. Τα κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή άρα: $\frac{4}{9}<\frac{4}{6}$

iii. Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα επομένως τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και τα συγκρίνουμε:
$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot3}{6\cdot3}=\frac{15}{18}$ και $\frac{7}{9}=\frac{7\cdot2}{9\cdot2}=\frac{14}{18}$ επομένως $\frac{15}{18}>\frac{14}{18}$ ή $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$

2. Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$\frac{1}{8},\frac{5}{3},\frac{4}{32},\frac{15}{8},\frac{15}{9},\frac{30}{16}$

Λύση

Ισοδύναμα είναι τα κλάσματα : $\frac{1}{8}=\frac{4}{32}$, $\frac{5}{3}=\frac{15}{9}$, $\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Μεταβλητή ονομάζουμε το γράμμα το οποίο παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

Εξίσωση ονομάζουμε την ισότητα που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές. Οι μεταβλητές ονομάζονται **άγνωστοι** της εξίσωσης.

Παράδειγμα

Η ισότητα $x+5=8$ είναι μία εξίσωση. Η μεταβλητή x λέγεται άγνωστος της εξίσωσης

Στην εξίσωση η παράσταση που βρίσκεται πριν το ίσον λέγεται **πρώτο μέλος** ενώ η παράσταση που βρίσκεται μετά το ίσον λέγεται **δεύτερο μέλος**.

Ρίζα ή **λύση** της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που την επαληθεύει.

Παράδειγμα

Η ισότητα $x+5=8$ είναι μία εξίσωση. Η μεταβλητή x λέγεται άγνωστος της εξίσωσης. Το $x+5$ που βρίσκεται αριστερά του ίσον λέγεται πρώτο μέλος ενώ το 8 που βρίσκεται δεξιά του ίσον λέγεται δεύτερο μέλος.

Ο αριθμός 3 που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης.

Μια εξίσωση θα λέγεται **ταυτότητα**, αν επαληθεύεται για κάθε τιμή της μεταβλητής.

Μια εξίσωση θα λέγεται **αδύνατη**, αν δεν επαληθεύεται για καμία τιμή της μεταβλητής.

Παραδείγματα

Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι ταυτότητα γιατί επαληθεύεται για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει ο x.
Η εξίσωση $0 \cdot x = 8$ είναι αδύνατη γιατί δεν επαληθεύεται από καμία τιμή που μπορεί να πάρει ο x.

Τρόπος λύσης μιας εξίσωσης

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση λέγεται επίλυση της εξίσωσης αυτής.

<u>Βασικές εξισώσεις:</u>

Οι λύσεις των βασικών εξισώσεων είναι:

- $x + a = \beta \Leftrightarrow x = \beta - a$
- $x - a = \beta \Leftrightarrow x = \beta + a$
- $a - x = \beta \Leftrightarrow x = a - \beta$
- $a \cdot x = \beta \Leftrightarrow x = \beta \div a$
- $a \div x = \beta \Leftrightarrow x = a \div \beta$
- $x \div a = \beta \Leftrightarrow x = a \cdot \beta$

Γενικά για να λύσουμε μια εξίσωση α ΄ βαθμού ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

i. Απαλείφουμε τους παρονομαστές (αν υπάρχουν) πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
ii. Κάνουμε τους σημειωμένους πολλαπλασιασμούς.
iii. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.
iv. Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους (όταν ένας όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο ενώ όταν παραμένει στο ίδιο μέλος μένει με το ίδιο πρόσημο)

v. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

vi. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου αν είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Παραδείγματα

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
   i. $3x=9$
   ii. $x \div 6=2$
   iii. $x+5=13$
   iv. $6-x=2$

Λύση

i. $3x=9 \Leftrightarrow x=9 \div 3=3$

ii. $x \div 6=2 \Leftrightarrow x=2 \cdot 6=12$

iii. $x+5=13 \Leftrightarrow x=13-5=8$

iv. $6-x=2 \Leftrightarrow x=6-2=4$

2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{5}-1=\frac{1}{2}$$

Λύση

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι : Ε.Κ.Π.(5,2)=10

Άρα θα έχουμε:

$$10 \cdot \frac{3x-1}{5}-10 \cdot 1=10 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (3 \cdot x-1)-10=5 \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot x-2-10=5 \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot x=5+10+2 \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot x=17 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{17}{6}$$

ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Πολλές φορές για να εκφράσουμε θερμοκρασίες ή αποστάσεις από τη επιφάνεια της θάλασσας εκτός από τους αριθμούς χρησιμοποιούμε και τις εκφράσεις <<πάνω>>, <<κάτω>>, <<μείωση>> ,<<αύξηση>>. Στα μαθηματικά αντί να γράφουμε <<7m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας >> ή <<5^o C κάτω από το μηδέν>> γράφουμε -7 ή -5.

Παρατηρούμε ότι μπροστά από τον αριθμό βάζουμε το πρόσημο <<-> (πλήν)
Θετικοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν το πρόσημο (+) ενώ αρνητικοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν το πρόσημο (-)

Ομόσημοι ονομάζονται δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ετερόσημοι ονομάζονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

❖ <u>**Απόλυτη τιμή του αριθμού α**</u>

Έστω Α ένα σημείο του άξονα στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός α. Την απόσταση ΟΑ λέμε **απόλυτη τιμή** του α και συμβολίζεται $|\alpha|$. Δηλαδή είναι

$|\alpha| = \alpha$, αν $\alpha \geq 0$, ενώ $|\alpha| = -\alpha$, αν $\alpha \leq 0$.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Παράδειγμα

Οι αριθμοί -6,+6 είναι αντίθετοι

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, αν $\beta \neq 0$

3. $|\alpha|^2 = \alpha^2$, και γενικά $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$

4. $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$

5. $|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

6. $|\alpha| = \beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

7. $|\alpha| = \theta$, $\theta>0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$ ή $\alpha = -\theta$

Σύγκριση των ρητών αριθμών

Όταν έχουμε να συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα.
Μεταξύ δύο θετικών αριθμών μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. Για να προσθέσουμε ομόσημους ρητούς αριθμούς , προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο εξαγόμενο βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Β. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές και στο εξαγόμενο βάζουμε το πρόσημο αυτού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Γ. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $(+12,6)+(+3)=+15,6$
2. $(-12,6)+(-3)=-15,6$
3. $(+12,6)+(-3)=+9,6$

4. (-12,6)+(+3)=-9,6

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να αφαιρέσουμε έναν ρητό αριθμό β από έναν α προσθέτουμε στο **μειωτέο** τον αντίθετο του **αφαιρετέου** β. Δηλαδή

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

π χ . (+12,6)-(+3)=(+12,6)+(-3)=+9,6

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ

Α. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς , πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο εξαγόμενο βάζουμε το πρόσημο (+), αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι ή το πρόσημο (-), αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

Ένας μνημονικός κανόνας για τη εύρεση προσήμου για τον πολλαπλασιασμό (ο ίδιος ισχύει και για τη διαίρεση) είναι ο παρακάτω:

$(+)\cdot(+)=(+)$

$(-)\cdot(-)=(+)$

$(+)\cdot(-)=(-)$

$(-)\cdot(+)=(-)$

Για παράδειγμα, έχουμε:

1. (+5).(+3) = + 15
2. (+5). (-3) = - 15
3. (-5) .(-3) =+15

Δύο ρητοί αριθμοί που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**

Ο αντίστροφος ενός αριθμού α ($α \neq 0$) συμβολίζεται με $\frac{1}{α}$.

Β. Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς , διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε (+), αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι ή το πρόσημο (-),

αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι .

Το πηλίκο α : β γράφεται: $\frac{α}{β}$

Ισχύει:

$$\frac{α}{β} = α \cdot \frac{1}{β} ,$$

δηλαδή η διαίρεση με ένα ρητό ανάγεται στον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο.

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ</u>

Η εξαγωγή των παρενθέσεων σ' ένα αλγεβρικό άθροισμα γίνεται με τη βοήθεια των εξής κανόνων:

- **Αν η παρένθεση έχει μπροστά το πρόσημο (+) (ή δεν έχει πρόσημο), τότε παραλείπουμε τις παρενθέσεις χωρίς να αλλάζουν πρόσημο οι περιεχόμενοι όροι.**
- **Αν η παρένθεση έχει μπροστά το πρόσημο (-), τότε απαλείφουμε τις παρενθέσεις αλλάζοντας τα πρόσημα όλων των όρων.**
- **Δεν απαλείφουμε τις παρενθέσεις, αν αυτές είναι συνδεμένες με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με άλλες παραστάσεις ή είναι υψωμένες σε δύναμη.**

- Η σειρά εκτέλεσης των πράξεων είναι η εξής:
  - εκτελούμε τις δυνάμεις
  - υπολογίζουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις
  - και τέλος εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις

Ασκήσεις στα κλάσματα

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $\frac{x-7}{11}=0$

ii. $\frac{x+6}{13}=1$

iii. $\frac{17-\omega}{17}=0$

iv. $\frac{65+x}{95}=1$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\frac{3}{8}=\frac{x}{24}$

ii. $\frac{5}{6}=\frac{x}{42}$

iii. $\frac{7}{9}=\frac{28}{y}$

3. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{7}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{10}{9}$;

4. Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στο άθροισμα των κλασμάτων $\frac{1}{5}$ και $\frac{3}{4}$ για να προκύψει η μονάδα;

5. Αν $x=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{4}$ και $\psi=2+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}$ να βρεθεί το πηλίκο $x\div\psi$

Ασκήσεις στις εξισώσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:
   i. 7x-15=3x-9
   ii. 8(x+2)-5=2(x+3)
   iii. 3y-4=5y+2
   iv. 4ω-2=2(2ω-1)
2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{2x-7}{4}$

ii. $\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{-6-5y}{7}$

iii. $\dfrac{3\omega+5}{2}-\dfrac{3\omega-2}{4}=3$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\dfrac{4(x-1)}{5}-4=\dfrac{7(x-4)}{10}-\dfrac{3}{5}$

ii. $\dfrac{2x-4}{7}-\dfrac{2x-26}{3}=5-\dfrac{3x+5}{2}$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1) Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

i. Α = (-2+4) - (-7+2-1) - (8-6)

ii. $B=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3})-(-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2})+\dfrac{3}{4}$

iii. $\Gamma=\left(\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{3}\right)\div\dfrac{1}{6}+\left(3\cdot\dfrac{4}{9}\right)+\left(2\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}\right)$

iv. $\Delta=\dfrac{\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{6}\right)\div\dfrac{5}{6}}{8-4\dfrac{2}{5}}$

v. $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6}\right)\div\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\right)\div\dfrac{2}{3}+1$

2) Να υπολογιστούν οι τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

i. $A=5{,}4^2-(2^3-0{,}6\cdot 0{,}5)-0{,}4^2-0{,}1^2\cdot 4$

ii. $B=(5{,}6\div 7+0{,}8)\cdot(5\div 10+3)$

iii. $72{,}1+9{,}6\div 0{,}2-4^3\div 16$

iv. $7{,}3^2-(2^3-0{,}8\cdot 0{,}5)-0{,}6^2-0{,}1^2\cdot 7$

3) Αν $\alpha=3$ και $\beta=1$ να επαληθευτούν οι ισότητες :

i. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

ii. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

4) Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

i. $A=(\frac{2}{3}-1)-[3-(1-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3})+(-3+\frac{11}{6}+\frac{1}{2})]$

ii. $B=[\frac{1}{2}-(\frac{3}{4}+4)-0.5]-[0.1-(0.01-0.4-\frac{3}{4}+\frac{1}{2})+\frac{2}{5}]$

iii. $\Gamma= 2003[(-1)^{2002}+(-1)^{2003}]^{2004}-[(-2)^{-3}]^2+\frac{1}{(-8)^2}$

(ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Ε.Μ.Ε. 2002)

5) Να αποδειχθεί ότι:

$$[2+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3+\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}]\div(1+\frac{77}{228})=5.$$

6) Να βρεθεί το πρόσημο του αριθμού:

$$A=\frac{(-2)(-4)(-6)....(-2010)}{(-1)(-3)(-5)....(-2009)}$$

7) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = (200 + 196 + 192 +....+ 8 + 4) - (198 + 194 + 190 +....+ 6 + 2)$$

(ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Ε.Μ.Ε. 1999)

8) Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = 2004 + 2005\cdot 2004 - 2006\cdot 2003$$

9) Να υπολογιστεί η τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

i. $A = (2^{10} : 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9\ 3) + 5 (2^3 +3^2)$

ii. $B = 5\ (2^3 - 1) + 8 (3^3 - 20) - 8 (5^2 - 15)$

10) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης .

$$A = 2003 \cdot [\,(-1)^{2002} + (-1)^{2003}]^{2004} - [\,(-2)^{-3}\,]^{2} + \frac{1}{(-8)^2}$$

(ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Ε.Μ.Ε 2002)

11) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = [\,(-1)^{10} + (-1)^{11}\,] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10} - 20$$

(ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Ε.Μ.Ε 2002)

12) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(36^8 \cdot 5^9 \cdot 7 - 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^8) : 6^8}{(6^8 \cdot 5^7 19 + 2^9 \cdot 15^8) \cdot 5}$$

13) Αν $\alpha = 2004$ και $\beta = \dfrac{-1}{2004}$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = [\,(\alpha^2 \beta^3)^{-2} \quad (\alpha\beta^3)^4]: \,(\alpha^3 : \beta^{-1})^{-3}$$

14) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\left(\alpha\beta^{-2}\right)^3 \left(\beta\alpha^{-3}\right)^{-2}}{\left(\alpha^2\beta^{-2}\right)^3 : \left(\alpha^{-3}\beta^3\right)^2} \cdot \left(\frac{\alpha^{-3}\beta^6}{\alpha^{-1}\beta^4}\right)^{-2}$$

15) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} - (2 - 5^{10})^0$$

$$B = \left(3 - \frac{2}{3}\right)\,(-2)^{-2} + 7 - 5 \cdot 2^{-3} + [\,(-2)^{-1}\,]^2$$

16) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\psi}\right)\left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi}\right) \cdot \frac{\chi\psi}{\chi - \psi}, \quad \text{αν } \chi = 2^{-1},\ \psi = -3,$$

$$B = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha\beta}{2}, \ \text{αν } \alpha = 2^{-2},\ \beta = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2},\ \gamma = -2.$$

17) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης όταν χ =1

$$A=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\chi-4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{\chi-3}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{\chi-2}+(-1)^{\chi-1}-(-1)^{\chi}$$

18) Αν είναι: $x=-1$ και $\psi=3$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2x^2-y^3}{(x+y)^2-6x^5}-\frac{5(2x+1)^3}{x^3-y^2}$$

Ερωτήσεις τύπου Σωστού –Λάθους

1. Ο επόμενος φυσικός αριθμός του μηδενός είναι το 1 Σ Λ
2. Ένας περιττός αριθμός βρίσκεται μεταξύ δύο άρτιων Σ Λ
3. Αν ο ν είναι άρτιος τότε ο ν+1 είναι περιττός Σ Λ
4. Αν ο ν+1 είναι περιττός τότε ο ν+3 είναι περιττός. Σ
5. Ο τελευταίος φυσικός αριθμός είναι 999999999999 Σ Λ
6. Από το 13 έως το 19 υπάρχουν 5 περιττοί αριθμοί Σ Λ
7. Για τη γραφή όλων των φυσικών αριθμών χρησιμοποιούμε 9 ψηφία Σ Λ
8. Ισχύει α-β=β-α Σ Λ
9. Ισχύει 2(α-β)= 2α-2β Σ Λ
10. Ισχύει ότι $3^2=3\cdot 2$ Σ Λ
11. Ισχύει ότι $1^{2011}=2011\cdot 1$ Σ Λ
12. Ισχύει ότι $2^6=12$ Σ Λ
13. $\frac{7}{11}<\frac{7}{9}$ Σ Λ
14. $\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$ Σ Λ
15. Ισχύει ότι: $\frac{x+2}{7}>\frac{x}{7}$ Σ Λ
16. Ισχύει ότι: $\frac{4}{\chi+5}>\frac{4}{x}$ Σ Λ
17. Η εξίσωση $\frac{x}{3}=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 3 Σ Λ
18. Η εξίσωση αx=β έχει πάντα δύο ρίζες. Σ Λ
19. Η εξίσωση -3x=β έχει πάντα αρνητικές ρίζες. Σ Λ
20. Μπορούμε σε μια εξίσωση να αλλάξουμε τα πρόσημα όλων των όρων. Σ Λ

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄- Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παναγιώτης Μυταρέλλης

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω οι αριθμοί $\alpha = 1 + 2^3$, $\beta = 2 + 1^3$, $\gamma = (2+1)^3$, $\delta = 3^2 + 1$. Να τους διατάξετε κατά αύξουσα σειρά.
2. Έστω $\alpha = 6^3 \cdot 8^4$ και $\beta = 2^9 \cdot 12^3$, να δειχθεί ότι $\alpha = \beta$.
3. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $2007 + 2007 \cdot 2008 - 2006 \cdot 2009$.
4. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $(4^5 \cdot 2^{13}) : 8^7 - (27^4 \cdot 9^5) : 3^{21}$.
5. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A = 10^5 - 9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 - 9$.
6. Να συγκριθούν οι αριθμοί $A = 2^{2009} - 2^{2008} + 2^{2007}$ και $B = 3^{2009} - 2 \cdot 3^{2008} - 3^{2007}$.
7. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{3}{2}$ να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων:
   $A = \dfrac{\alpha + \beta}{\beta}$, $B = \dfrac{3\alpha + 4\beta}{5\beta}$, $\Gamma = \dfrac{3\alpha - 2\beta}{5\alpha}$, $\Delta = \dfrac{3\alpha + \beta}{4\alpha + 3\beta}$.
8. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης
   $$\mathrm{A} = \left(\frac{5}{7} + \frac{55}{77} + \frac{555}{777}\right) : \frac{5}{7} - \frac{111}{500} : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{50} + \frac{1}{500}\right).$$
9. Έστω $\mathrm{A} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100}$ να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{2} < \mathrm{A} < 1$.
10. Αν ν φυσικός αριθμός να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων
    $A = 3 \cdot (-1)^{\nu} - 5 \cdot (-1)^{\nu+1} + 3 \cdot (-1)^{\nu+2} - (-1)^{\nu+3}$ και
    $\mathrm{B} = (-1)^{\nu} + 2(-1)^{2\nu} - 7(-1)^{3\nu}$.
11. Αν $\alpha - \beta = 5$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A = 7 - (\alpha + 8) - [9 - (\beta - 4)]$.
12. Να βρεθεί φυσικός αριθμός n για τον οποίο ισχύει $\dfrac{1}{2} < \dfrac{n}{3} < \dfrac{4}{5}$.
13. Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί x, y, z για τους οποίους ισχύει

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{35}{16}.$$

14. Να δειχθεί ότι $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2009}{2010}=2009-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2010}$.
15. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=(2^{3^4}:2^{4^3}-2006^0):(16^4\cdot 2-1)$.
16. Σ' ένα τρίγωνο η μικρότερη γωνία είναι 15°. Πόσο μπορεί να είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου;
17. Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=2003(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4(-1)^{\nu+2}$.
18. Να εκφράσετε την παράσταση $\mathrm{A}=3\cdot 2^{18}\cdot[1-(-1)^3]-2^6\cdot(3^2-1)\cdot(3^3-11)\cdot(3^4-17)$ ως δύναμη με βάση το 2.

Η έννοια της μεταβλητής
Αλγεβρικές παραστάσεις

Μεταβλητή λέμε το γράμμα (ελληνικό ή λατινικό) που παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό.
Με τη βοήθεια της μεταβλητής είναι δυνατό να διατυπώσουμε σε μαθηματικά διάφορες εκφράσεις της καθημερινής μας ζωής. Παράδειγμα: «Η ηλικία του πατέρα είναι τετραπλάσια από την ηλικία του γιού του».
Αν συμβολίσουμε με x την ηλικία του γιού, τότε η ηλικία του πατέρα είναι $4x$.

Αριθμητική παράσταση λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς π.χ. $7+3\cdot(-4)-7^2:2$.

Αλγεβρική παράσταση λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές π.χ. $3x^2-5x+x^2-1$. Οι προσθετέοι λέγονται όροι αυτής.
Μια ιδιότητα που μας βοηθάει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις είναι η επιμεριστική ιδιότητα.
Αυτή λέει: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ ή $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$

Π.χ. $3x+7x=x(3+7)=10x$

$$5x-4x+6x=(5-4+6)x=7x$$

$$\begin{aligned}2008\cdot 2007-2008\cdot 2006+1&=2008(2007-2006)+1\\&=2008\cdot 1+1\\&=2009\end{aligned}$$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να αντιστοιχήσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με ένα στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $x+3x-2x$	I. x
β) $-3x-x+7x$	II. $2x$
γ) $x+x+x+x$	III. $3x$
	IV. $4x$

2. Να αντιστοιχήσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $(7x+3)-(2x-6)$	V. $-2x-1$
β) $(-3x+5)+(x-6)$	VI. $4x-1$
γ) $-(3x+5)-(x-6)$	VII. $-4x+1$
	VIII. $5x+9$

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις επόμενες ερωτήσεις.

Έστω ότι έχουμε έναν αριθμό x

α) Το διπλάσιο του αριθμού, μειωμένο κατά 4 είναι:

Α. $3x-2$ Β. $2x-4$ Γ. $4x-2$ Δ. $2x-4$

β) Το μισό του αριθμού αυτού, αυξημένο κατά 2 είναι:

Α. $\frac{x}{2}-2$ Β. $2x+2$ Γ. $\frac{x}{2}+2$ Δ. $2x-2$

γ) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, τότε η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$), ισούται με:

Α. 1 Β. 0 Γ. -1 Δ. τίποτα από τα προηγούμενα

δ) Η παράσταση $3x-7x-2$ είναι ίση με:

Α. $4x-2$ Β. $-4x+2$ Γ. $-2(2x+1)$ Δ. $2(2x-1)$

ε) Η παράσταση $x(x-1)-(x-1)$ είναι ίση με:

Α. $(x-1)^2$ Β. $x-1$ Γ. x^2-1 Δ. τίποτα από τα προηγούμενα

Ασκήσεις Α

1. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
   i. Το διπλάσιο ενός αριθμού, αυξημένο κατά 3.
   ii. Το άθροισμα δύο αριθμών, πολλαπλασιαζόμενο επί 7.
   iii. Το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών.
   iv. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου που η βάση του είναι κατά 2cm μικρότερη από τις άλλες πλευρές του.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   α. $3x-5y-x+y$ β. $-7x+x-2-3x+5$
   γ. $\varphi-3\varphi+4\varphi-9\varphi$ δ. $\omega-3y+5y-3\omega+y-3$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   α. $2(x-3y)-(x+2y-1)$ β. $2-5(-2x+1)-(x-1)$
   γ. $3-2[x-2(x-3)]$ δ. $2y-[7-3(1-y)]$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:
   $\mathrm{A}=4x-7y-y+x$, όταν $x=-3$ και $y=-4$
   $B=\varphi-t+3\varphi+4t-2$, όταν $\varphi=2$ και $t=-3$

Ασκήσεις Β

1. Αν $x^{2009}+y^{2009}=0, y\neq 0$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $\dfrac{x^{4018}}{y^{4018}}$.
2. Αν $\alpha+4\beta=5$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A=8-(\alpha+7\beta)-3(2\alpha-1)-3(7\beta-1)$.

3. Αν α, β, γ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma=20$ και $3\alpha+2\beta+3\gamma=67$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A=(2\alpha+\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta+4\gamma)$.
4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $(x-1)(x+1)-x^2+3$.

5. Ι) Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης:
   $A=\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)$.
   ΙΙ) Να βρεθεί ο αριθμός: $991\cdot104-825\cdot270+721\cdot166$.

6. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\dfrac{175\cdot351-177}{175^2-1}$ είναι ακέραιος.

Εξισώσεις α' βαθμού

Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων:

- Για δύο αριθμούς α, β ισχύει μια μόνο από τις σχέσεις:
  $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$

- Αν $\alpha=\beta$ τότε:
$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$$
$$\alpha-\gamma=\beta-\gamma$$
$$\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$$
$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma},\ \mu\varepsilon\,\gamma\neq 0.$$

- Αν $-\alpha=\beta$ τότε $\alpha=-\beta$.

Μια ισότητα που περιέχει ένα άγνωστο αριθμό, που τον συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα x, ονομάζεται εξίσωση. Π.χ. $3x+5=10+x$.

Η παράσταση $3x+5$ ονομάζεται πρώτο μέλος της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $10+x$ λέγεται δεύτερο μέλος αυτής.

Σε μια εξίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό του.

Δηλαδή
$$3x+5=10+x$$
$$3x+x=10-5$$
$$2x=5$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{5}{2}$$
$$x=\frac{5}{2}$$

Εξίσωση α' βαθμού με άγνωστο το x λέμε κάθε εξίσωση που έχει τη μορφή $\alpha x+\beta=0,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq 0$.

Αν $\alpha=0$ τότε έχουμε $0x+\beta=0\begin{cases}\xrightarrow{\beta\neq 0}\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\\ \xrightarrow[\beta=0]{}\alpha\acute{o}\rho\iota\sigma\tau\eta\end{cases}$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες:
   i. Η εξίσωση $8x = 24$ έχει λύσει τον αριθμό 3.
   ii. Η εξίσωση $2x = 0$ είναι αδύνατη.
   iii. Η εξίσωση $0x = 3$ είναι ταυτότητα.
   iv. Η εξίσωση $2x = 5x$ έχει μοναδική λύση.
   v. Αν $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις επόμενες ερωτήσεις:
   i. Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 3$ έχει λύση τον αριθμό:

      Α. 1 Β. 0 Γ. 6 Δ. 9

   ii. Η εξισωση $-11x = 0$ έχει λύση τον αριθμό:

      Α. 1 Β. 11 Γ. 0 Δ. $\frac{1}{11}$

   iii. Η εξίσωση $-x = 5$ έχει λύση τον αριθμό:

      Α. 5 Β. -5 Γ. 6 Δ. 1

3. Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με την λύση της στη στήλη Β:

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $-5x = 10$	I. $\frac{2}{3}$
β) $-\frac{1}{3}x = 4$	II. 7
γ) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$	III. -2
δ) $3x = 7 + 4x$	IV. -7
	V. $-\frac{4}{3}$

4. Ένας γάιδαρος μεταφέρει 15 σακούλες αλάτι και 2 κιλά ελιές, ενώ ένα μουλάρι μεταφέρει 2 σακούλες αλάτι και 40 κιλά ελιές,

γάιδαρος διαμαρτύρεται. Τι διαμαρτύρεσαι (του απαντά το μουλάρι),το ίδιο βάρος μεταφέρουμε. Αν η ποσότητα σε κιλά μιας σακούλας είναι x και το μουλάρι λέει την αλήθεια, ποια από τις εξισώσεις αποδίδει το πρόβλημα;

Α. $40x-15=2$ Β. $2(x-15)=40x$ Γ. $15x+2=2x+40$
Δ. καμία

Ασκήσεις Α

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x+5=3x-4$ β) $-x=0$ γ) $-8=-x$
δ) $-3x+21=0$ ε) $12x-4=3x+5$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $3-(-x+2)=2(x+1)-4$
β) $5x-3(2-x)=2x-8$
γ) $5-2(3-x)=8-3(x+1)+5x$
δ) $3(x-1)-2(x-1)=x-1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\dfrac{x+4}{5}=-3$
β) $\dfrac{x}{4}+3=1+\dfrac{x}{3}$
γ) $\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{2}{3}=7-\dfrac{1-x}{2}$
δ) $\dfrac{3-2x}{6}-\dfrac{5-x}{4}=2x-1$
ε) $4-2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}\right)=-\left(\dfrac{x}{6}+2\right)-1$

4. Αν η εξίσωση $\dfrac{x-\alpha}{2}=x-3\alpha$ έχει λύση την $x=10$, να βρεθεί η τιμή του α.
5. Έστω οι παραστάσεις $A=2x-3$ και $B=2(x-1)$. Για ποια τιμή του x είναι $3A=B$
6. Δίνεται η εξίσωση $3\mu x-(2x-\mu)=3-2(x-\mu)$
α) Για $\mu=2$ να λυθεί η εξίσωση.
β) Για ποια τιμή του μ η εξίσωση έχει λύση την $x=-1$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β

1. Να λυθεί εξίσωση $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$.

2. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (με άγνωστο το x), $\lambda(x+1)=x+\lambda^2$ είναι εξίσωση α' βαθμού; Στη συνέχεια για $\lambda=1$ να λυθεί η εξίσωση.

3. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB}=8$, $\mathrm{A\Gamma}=x+10$, $\mathrm{B\Gamma}=2x+4$. Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, να βρεθεί η τιμή του x.

4. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB}=3x-1$, $\mathrm{A\Gamma}=x+3$, $\mathrm{B\Gamma}=7x-9$. Να εξετασθεί αν υπάρχει x ώστε το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.

5. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού ν, ώστε οι παρακάτω παραστάσεις να είναι φυσικοί αριθμοί:

   α) $\frac{7}{\nu-3}$ β) $\frac{6}{2\nu+1}$

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση (με άγνωστο το x) $\alpha(x-\beta)=\beta-x$, έχει λύση για κάθε τιμή των α,β. Στη συνέχεια να βρεθούν οι αριθμοί α,β αν γνωρίζουμε ότι έχει μοναδική λύση την $x=4$.

7. Να λυθεί η εξίσωση $2x+\frac{3x}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{5x}{4}-6=x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+6$.

Επίλυση τύπων

Σε πολλές επιστήμες χρησιμοποιούμε ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους μεγέθη.

Για παράδειγμα το εμβαδό E ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Όταν έχουμε μια ισότητα στην οποία γνωρίζουμε τις τιμές που παίρνουν όλες οι μεταβλητές εκτός από μία, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της άγνωστης μεταβλητής.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1)

	Α	Β	Γ
Η σχέση $x = 2\psi t$ όταν λυθεί ως προς x γίνεται:	$\psi = \frac{2x}{t}$	$\psi = \frac{x}{2t}$	$\psi = \frac{2t}{x}$
Η σχέση $\alpha + \beta x = \frac{\gamma}{2}$ όταν λυθεί ως προς x γίνεται:	$x = \frac{\gamma - 2\alpha}{2\beta}$	$x = \frac{2\alpha - \gamma}{2\beta}$	$x = \frac{\gamma - 2\alpha}{\beta}$
Η σχέση $E = \frac{(\beta + \mathrm{B})\upsilon}{2}$ όταν λυθεί ως προς υ γίνεται:	$\upsilon = \frac{\beta + \mathrm{B}}{2\mathrm{E}}$	$\upsilon = \frac{\mathrm{E}}{\beta + \mathrm{B}}$	$\upsilon = \frac{2\mathrm{E}}{\beta + \mathrm{B}}$

2) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες:

i. Η σχέση $P = P_0 + \varepsilon \cdot h$ αν λυθεί ως προς h γίνεται $h = \frac{P_0 - P}{\varepsilon}$.

ii. Η σχέση $\alpha = \beta\left(\gamma + \frac{1}{\delta}\right)$ αν λυθεί ως προς δ γίνεται $\delta = \frac{\beta}{\alpha - \beta\gamma}$.

3) Η μέση ταχύτητα υ ενός αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο $\upsilon = \frac{s}{t}$, όπου s το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο σε χρόνο t. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μέση ταχύτητα σε km/h:	70		80
Διάστημα s σε km:		522	400
Χρόνος t σε h:	4	9	

Ασκήσεις

1. Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς τη μεταβλητή που ζητείται:

   i. $L = 2\pi\rho$ ως προς ρ.

   ii. $F = \mathrm{K}\dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ ως προς q_2.

   iii. $S = \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2$ ως προς υ_0.

   iv. $\dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ ως προς x.

   v. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ ως προς R_2.

2. Δίνονται οι τύποι:

   $S = \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ (1) και $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ (2)

   α) Να λύσετε τον τύπο (2) ως προς α.

   β) Να δειχθεί ότι $S = \dfrac{\upsilon + \upsilon_0}{2}t$.

Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης, εργαζόμαστε συνήθως ως εξής:

- ✓ Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε,
- ✓ Διαβάζοντας προσεκτικά την άσκηση μετατρέπουμε τα λόγια σε σχέση, δηλαδή κατασκευάζουμε την εξίσωση,
- ✓ Λύνουμε την εξίσωση,
- ✓ Ελέγχουμε αν η λύση είναι συμβατή με τις συνθήκες του προβλήματος.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ο Νίκος είναι 41 χρονών και ο γιός του ο Χρήστος είναι 5 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του Νίκου θα είναι τριπλάσια από του Χρήστου;

Λύση: Έστω από x χρόνια η ηλικία του Νίκου θα είναι τριπλάσια από του Χρήστου. Ο Νίκος θα είναι $\left(41+x\right)$ χρονών και ο Χρήστος $\left(5+x\right)$ χρονών. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύει:

$$3(5+x)=41+x$$
$$15+3x=41+x$$
$$2x=26$$
$$x=13$$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 7 είναι ίσο με 49. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις περιγράφει το πρόβλημα:
   α) $3x-7=49$ β) $3x+7=49$ γ) $7(x+3)=49$ δ) $7x-3=49$

2. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 126. Αν x ο μεγαλύτερος από αυτούς, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις περιγράφει το πρόβλημα:
   α) $3x+3=126$ β) $3x=126$ γ) $3x-3=126$ δ) $x+6=126$

3. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που έχει εξίσωση $\frac{1}{2}x+5=2x-1$.

Ασκήσεις Α

1. Να βρεθεί ένας αριθμός που το τριπλάσιό του, αν το ελαττώσουμε κατά 9, δίνει το τριπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 6.

2. Να βρεθεί ο αριθμός που πρέπει να αφαιρεθεί από τους όρους του κλάσματος $\frac{7}{11}$, ώστε να προκύψει κλάσμα ίσο με $\frac{3}{7}$.

3. Διψήφιου αριθμού το ψηφίο των δεκάδων είναι διπλάσιο του ψηφίου των μονάδων. Αν εναλλάξουμε την θέση των ψηφίων του, προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 27. Να βρεθεί ο αριθμός.

4. Σε μια εκδρομή ενός Γυμνασίου, οι μαθητές της Γ' τάξης ήταν διπλάσιοι από τους μαθητές της Β' τάξης και οι μαθητές της Β' τάξης ήταν τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών της Α' τάξης. Αν όλοι οι μαθητές ήταν 108 να βρείτε πόσοι μαθητές από κάθε τάξη συμμετείχαν στην εκδρομή.

5. Έχουμε 13 κέρματα των 20 και 50 λεπτών, που όλα μαζί κάνουν 5€. Πόσα κέρματα έχουμε από κάθε είδος;

6. Ένα ποσό 9000€ μοιράστηκε σε τρείς φίλους. Ο πρώτος πήρε 3600€ περισσότερα από το δεύτερο, ο οποίος πήρε 1200€ περισσότερα από τον τρίτο. Ποιο ποσό πήρε ο καθένας;

7. Να βρείτε τη γωνία α, που είναι κατά 18° μικρότερη από το διπλάσιο της παραπληρωματικής της.

Ασκήσεις Β

1. Μια βρύση γεμίζει μια άδεια δεξαμενή σε 12 ώρες και μια άλλη σε 8 ώρες. Να βρείτε σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν είναι άδεια και

   α) ανοιχτούν και οι δύο βρύσες μαζί

   β) η δεύτερη βρύση ανοίξει δύο ώρες αργότερα από την πρώτη.

2. Μια οικογένεια ξόδεψε τον προηγούμενο χρόνο το $\frac{1}{12}$ των εσόδων της για την εξόφληση ενός δανείου, το $\frac{1}{3}$ για διατροφή, το $\frac{1}{6}$ για αγορά τεχνολογικού εξοπλισμού, το $\frac{1}{15}$ για ρουχισμό και το $\frac{1}{4}$ για τα υπόλοιπα έξοδα. Έτσι της έμειναν 3120€ για αποταμίευση. Να βρείτε πόσα ήταν τα έσοδα της οικογένειας.

3. Σε μια ανθοδέσμη υπήρχαν γαρύφαλλα, τριαντάφυλλα και ζουμπούλια, όλα τα λουλούδια εκτός από 9 είναι γαρύφαλλα, όλα τα λουλούδια εκτός από 12 είναι τριαντάφυλλα, όλα τα λουλούδια εκτός από 15 είναι ζουμπούλια. Πόσα λουλούδια έχει η ανθοδέσμη και πόσα από κάθε είδος;
4. Ο Ανδρέας έχει τριπλάσια ηλικία από το Βασίλη, ενώ σε 10 χρόνια θα έχει διπλάσια. Να βρείτε πόσο χρονών είναι ο Ανδρέας.
5. Η Μαρία διάβασε ένα βιβλίο 300 σελίδων σε 4 ημέρες. Αν κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη, πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;
6. Μια εταιρία προσλαμβάνει έναν ανώτατο οικονομικό διευθυντή με τη συμφωνία ότι για ένα χρόνο θα πάρει 80.000€ και ένα αυτοκίνητο. Μετά από 10 μήνες η εταιρία απολύει τον διευθυντή και του δίνει 60.000€ και το αυτοκίνητο. Να βρείτε πόσο κοστίζει το αυτοκίνητο.
7. Ένα αυτοκίνητο διένυσε με σταθερή ταχύτητα μια απόσταση σε 5 ώρες, ενώ αν έτρεχε με 40 χιλιόμετρα την ώρα λιγότερα, θα χρειαζόταν για την ίδια απόσταση 7 ώρες. Να βρεθεί η απόσταση αυτή.

Ανισώσεις α’ βαθμού

Αν για δύο αριθμούς α, β γνωρίζουμε ότι ο α είναι μικρότερος του β, τότε συμβολικά το αποδίδουμε με τη σχέση $\alpha < \beta$ ή $\beta > \alpha$.

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\alpha \leq \beta$ που σημαίνει ότι το α είναι μικρότερο ή ίσο του β.

<u>Ιδιότητες:</u>

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

και $\dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

και $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$.

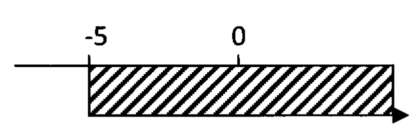
Ανίσωση α’ βαθμού με άγνωστο το x λέμε κάθε σχέση της μορφής $\alpha x + \beta < 0$ ή $\alpha x + \beta > 0$, με $\alpha \neq 0$.

Η διαδικασία επίλυσης φαίνετε στα παραδείγματα:

1) Να λυθεί η ανίσωση $1 - 5(-x+2) < 10x - (3x-1)$

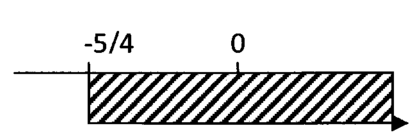
$$1 + 5x - 10 < 10x - 3x + 1$$
$$5x - 10x + 3x < 1 - 1 + 10$$
$$-2x < 10$$
$$\frac{-2x}{-2} > \frac{10}{-2}$$
$$x > -5$$

Οι λύσεις γραφικά φαίνονται στο σχήμα:



2) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{3}{2}(2x+1) > x - 1$

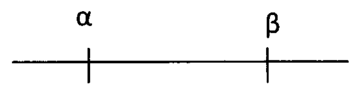
$$3(2x+1) > 2x - 2$$
$$6x + 3 > 2x - 2$$
$$6x - 2x > -3 - 2$$
$$4x > -5$$
$$\frac{4x}{4} > \frac{-5}{4}$$



Τελικά $x > \dfrac{-5}{4}$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη Σωστό αν είναι σωστές ή Λάθος αν είναι λανθασμένες:
   i. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.
   ii. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
   iii. Αν $a < 0$ και $\alpha x < \beta$ τότε $x < \frac{\beta}{\alpha}$.
   iv. Η ανίσωση $0x < \beta$ με $\beta > 0$ αληθεύει για κάθε αριθμό.
   v. Η ανίσωση $0x > \beta$ με $\beta > 0$ είναι αδύνατη.

2. Δίνονται οι αριθμοί α και β του σχήματος 

   Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο κάθε φορά σύμβολο από τα <, >, =, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
   α) α……β β) α+3……β+3 γ) β-7……α-7
   δ) 3β……3^{α} ε)-2α……-2β στ) α-γ……β-γ

3. Να αντιστοιχήσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $0x < 1$	α) αδύνατη
2. $0x \leq 0$	β) αόριστη
3. $0x < -2$	γ) $x < -1$
4. $-x < 1$	δ) $x > -1$
5. $-x < 0$	ε) $x > 0$

4. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $2x - 4 < 0$ και $-3x + 3 \leq 0$ είναι:
   α) $x < 1$ β) $x \geq 2$ γ) $1 \leq x < 2$ δ) $1 < x \leq 2$

Ασκήσεις Α

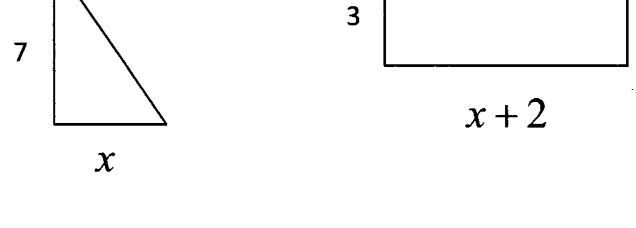
1. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και μετά να παραστήσετε τις λύσεις κάθε ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:
   α) $x+2(5x-3)<1-3(2x-1)$
   β) $1-5(2x-3)\geq -3(x+4)-(x-2)$
   γ) $3x-2[-1+(2x-3)2]\leq x-1$
   δ) $\dfrac{-3x+1}{2}\leq 1$
   ε) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-2}{2}>\dfrac{x}{6}-1$
   στ) $\dfrac{x}{2}-x-\dfrac{3x+1}{5}\leq 1-\dfrac{2x-5}{3}$

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
   α) $3x>6$ και $2x-1>0$
   β) $3x-2(x-1)>1-(x-1)$ και $1-3(-2x)\leq x-(-9x+2)$
   γ) $\dfrac{x}{2}<1+x$ και $1-\dfrac{3x-1}{4}>\dfrac{x}{2}$
   δ) $1-\dfrac{3(x-1)}{2}<x-\dfrac{5(x-2)}{6}$ και $\dfrac{x}{2}>\dfrac{2(x-1)}{3}$
   ε) $1\leq 2x-1<3$
   στ) $2x+5\leq 5x-1\leq 4x+1$

3. Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος x για τον οποίο ισχύει $\dfrac{1}{2}x-1>\dfrac{x}{4}$.

4. Να βρείτε τρείς διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που το άθροισμά τους είναι μικρότερο από το 16 και μεγαλύτερο του 12.

5. Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου στο σχήμα να μην ξεπερνάει το εμβαδό του ορθογωνίου.



Ασκήσεις Β

1. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η ρίζα της εξίσωσης $3x-\alpha=2-x$ να είναι μεγαλύτερη του 3.

2. Αν η ελάχιστη τιμή της μεταβλητής y είναι 5 να βρείτε τη μέγιστη τιμή της μεταβλητής x, όπου $y=-2x+3$.

3. Να λυθεί η ανίσωση
$$\frac{3x+1}{2}+\frac{4x+1}{3}+\frac{5x+1}{4}+\cdots+\frac{101x+1}{100}>\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}+\cdots$$

4. Εννέα ίδια βιβλία κοστίζουν λιγότερο από 10€ συνολικά και δέκα ίδια βιβλία κοστίζουν περισσότερο από 11€ συνολικά. Πόσο κοστίζει το ένα βιβλίο με προσέγγιση εκατοστού;

5. Σε μια πόλη, για να κινηθεί ένας επιβάτης με τα μέσα μαζικής μεταφοράς για ένα μήνα έχει δύο επιλογές:
   - αγοράζοντας κάρτα απεριορίστων διαδρομών με κόστος 38€, ή
   - πληρώνοντας εισιτήριο σε κάθε διαδρομή αξίας 0,8€.

   Πόσες το πολύ διαδρομές πρέπει να κάνει ένας επιβάτης σε ένα μήνα για να <u>μη</u> συμφέρει η κάρτα απεριορίστων διαδρομών;

6. Αν η λύση της εξίσωσης $\dfrac{3x-1}{2}=x-2$ είναι και λύση της ανίσωσης $\dfrac{x-\lambda}{3}<x-1+\dfrac{\lambda}{2}$, να βρείτε τις τιμές του λ.

7. Έστω η διπλή ανίσωση $\dfrac{3x-8}{2}<3x-2\le 5x-3$

   α) να λυθεί η διπλή ανίσωση,

   β) αν α ο μικρότερος ακέραιος που επαληθεύει τη διπλή ανίσωση, να λύσετε την εξίσωση $y+\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\dfrac{y-3}{3}\right)=\dfrac{1+3\alpha(y-2)}{2}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

1. Να λυθεί η εξίσωση
$$\frac{x}{6}+\frac{3x}{6}+\frac{5x}{6}+\cdots+\frac{2009x}{6}=\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{3}+\cdots+\frac{1004x}{3}+335.$$
2. Ένας επιστήμονας και ο βοηθός τους ανέλαβαν μια έρευνα σε χημικό εργαστήριο από την οποία θα εισπράξουν 85.116€. ο επιστήμονας θα απασχοληθεί για 42 ημέρες και ο βοηθός του για 45 ημέρες. Η ημερήσια αμοιβή του επιστήμονα είναι κατά 40% μεγαλύτερη της ημερήσιας αμοιβής του βοηθού του. Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο καθένας στο τέλος της έρευνας;
3. Αν ο αριθμός x είναι θετικός ακέραιος και το κλάσμα $\frac{3-x}{2}$ είναι αριθμός αρνητικός και μεγαλύτερος του -1, να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους των οποίων το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με x.
4. Ένας αθλητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία, το βιβλίο Α κοστίζει 60% των χρημάτων (ευρώ) που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του. Αν είχε 80 λεπτά περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν και τα δύο βιβλία μαζί. Να βρείτε πόσα χρήματα κοστίζει καθένα από τα δύο βιβλία.
5. Σ' ένα Γυμνάσιο η Β' τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή. Δύο γραφεία παρέχουν εκδρομικά λεωφορεία με τις εξής προσφορές:
Γραφείο 1^{o}: 300€ και 1,20€ το χιλιόμετρο
Γραφείο 2^{o}: 390€ και 0,90€ το χιλιόμετρο
Να εξετάσετε πόσα τουλάχιστον χιλιόμετρα πρέπει να κάνει το λεωφορείο για να συμφέρει η προσφορά του 2^{ου} γραφείου.
6. Δίνονται οι παραστάσεις
$$A=\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot 5^{2}-3^{0}+x}{[1-(-1)^{2009}]^{0}},\quad B=\frac{[(-2)^{3}+(-1)^{3}]}{9+\frac{x}{2}}$$
Αν είναι $A=6B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.
7. Ο Ανδρέας μπορεί να κατασκευάσει ένα τοίχο μόνος του αν δουλέψει 12 ώρες, ενώ ο Βαγγέλης μόνος του κατασκευάζει τον ίδιο τοίχο σε 12 ώρες. Αν δουλέψουν και οι δύο μαζί, τότε η εργασία τους μειώνετε σε απόδοση κατά 1 τετραγωνικό μέτρο την

ώρα για τον καθένα, τελειώνουν όμως τον τοίχο σε 6 ώρες. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι ο τοίχος.

8. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού, προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

9. Αν $\alpha+2\beta+\frac{\gamma}{2}=0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A=\alpha^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)^2\cdot(\alpha+2\beta)^2.$$

10. Το 6% του αριθμού $\alpha\neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος $K=\dfrac{9\alpha-3\beta}{6\alpha-\beta}$.

11. Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι και ισχύει $\alpha+\beta=1000$, είναι δυνατόν να ισχύει $3\alpha+5\beta=3005$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

12. Να λυθεί η εξίσωση $x+2x+3x+\ldots+100x=2^2\cdot 5^3\cdot 101$.

13. Καθένας από τους αριθμούς $A=888\ldots8$ και $B=444\ldots4$ έχει 2009 ψηφία, ενώ καθένας από τους αριθμούς $\Gamma=333\ldots3$ και $\Delta=666\ldots67$ έχει 2008 ψηφία. Ποιος από τους αριθμούς $x=A\cdot\Gamma$ και $y=\mathrm{B}\cdot\Delta$ είναι μεγαλύτερος και πόσο;

14. Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%, ενώ το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του. Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή $0^2 = 0$ ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Δηλαδή αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$.

Βάση του ορισμού προκύπτουν τα εξής:

Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \geq 0$

$$\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$$

$$\sqrt{\alpha^2} = \alpha$$

Π.χ. Να υπολογισθεί η $\sqrt{9}$

$\sqrt{9} = 3$ γιατί $3 > 0$ και $3^2 = 9$.

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός.

Π.χ. η $\sqrt{-16}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -16.

Με λίγα λόγια ότι μπαίνει στη ρίζα είναι θετικός ή μηδέν καθώς και ότι βγαίνει από τη ρίζα είναι θετικός ή μηδέν.

Προσοχή: Αν $a < 0$ τότε $\alpha^2 > 0$ οπότε ορίζεται η $\sqrt{\alpha^2}$, αλλά εδώ δε μας κάνει α, αφού $\alpha < 0$, ενώ ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα της ρίζας είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδέν.

Τελικά με τι ισούται η $\sqrt{\alpha^2}$, με $a < 0$;

Π.χ. $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = -(-7)$

Γενικότερα $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$, με $a < 0$.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι σωστές, ή Λάθος αν είναι λανθασμένες:
   α) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \geq 0$
   β) Αν $\alpha \geq 0$ και $\sqrt{\alpha} = x$ τότε $\alpha^2 = x$
   γ) Αν $x^2 = \alpha$ τότε $\sqrt{\alpha} = x$
   δ) Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$, με $\alpha \geq 0$
   ε) $\sqrt{(-5)^2} = -5$
   στ) $-\sqrt{(-4)^2} = -4$

2) Αν $x > 0$ να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:
   i. Αν $\sqrt{x} = 3$ τότε ο x ισούται με:
      α) 9 β) 6 γ) -6 δ) δεν ορίζεται
   ii. Αν $\sqrt{25} = x$ τότε ο x ισούται με:
      α) 12,5 β) 5 γ) 625 δ) η σχέση είναι αδύνατη
   iii. Αν $\sqrt{x} = -9$ τότε για το x ισχύει:
      α) $x = 3$ β) $x = -3$ γ) $x = 81$ δ) η σχέση είναι αδύνατη

3) Να αντιστοιχήσετε κάθε αριθμό της στήλης Α στην τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β:

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) 0,09	1) 0,2
β) 0,16	2) 0,3
γ) 0,0025	3) 0,05
δ) 0,4	4) 0,4

Ασκήσεις Α

1. Να υπολογίσετε τις επόμενες τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{81}$ β) $\sqrt{144}$ γ) $\sqrt{1,44}$ δ) $\sqrt{529}$
   ε) $\sqrt{\frac{36}{49}}$ στ) $\sqrt{\frac{1}{64}}$ ζ) $\sqrt{\frac{900}{121}}$ η) $\sqrt{\frac{625}{196}}$

2. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:
   α) $\sqrt{7+\sqrt{4}}$ β) $\sqrt{25-\sqrt{81}}$ γ) $\sqrt{70-\sqrt{31+\sqrt{25}}}$
   δ) $\sqrt{5-\sqrt{10+2\sqrt{9}}}$ ε) $\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-\sqrt{9}}}}$

3. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις σχέσεις:
   α) $x^2=36$ β) $x^2=1$ γ) $x^2=\frac{9}{4}$ δ) $x^2=1$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
   α) $x^2=25$ β) $x^2=36$ γ) $x^2=\frac{49}{4}$ δ) $x^2=1$

5. Να συγκριθούν οι αριθμοί:
   α) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ και $\sqrt{4\cdot 9}$
   β) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}$ και $\sqrt{25\cdot 9}$.
   Τι παρατηρείτε;

6. Να συγκριθούν οι αριθμοί:
   α) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ και $\sqrt{\frac{9}{4}}$
   β) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ και $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$
   Τι παρατηρείτε;

7. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι μεταξύ 4000 και 5000, και είναι τετράγωνα ακεραίων.

Ασκήσεις Β

1. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 27 γίνεται ίσο με το τετραπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;
2. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν μειωθεί κατά 54 γίνεται ίσο με το $\frac{1}{3}$ του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;
3. Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{2x+6}+\sqrt{15-3x}$,
   α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση Α έχει νόημα,
   β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α για $x=5$
4. Αν ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ να λυθεί ως προς γ.
5. Δίνεται ο θετικός ακέραιος α όπου το ψηφίο των μονάδων του είναι το 2. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός x τέτοιος ώστε $x=\sqrt{\alpha}$.

Άρρητοι αριθμοί – πραγματικοί αριθμοί

Ένας αριθμός ονομάζεται άρρητος, όταν δεν είναι ρητός, θυμίζουμε ότι ρητός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που γράφεται ως πηλίκο ακεραίων αριθμών.

Ένας άρρητος είναι το $\sqrt{2}$.

Γενικότερα η τετραγωνική ρίζα ενός ρητού αριθμού, που δεν είναι τετράγωνο άλλου ρητού αριθμού, είναι άρρητος αριθμός.

Πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται όλοι οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας.

Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστές, ή Λάθος αν είναι λανθασμένες:
   α) Αν ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι ρητός, τότε είναι άρρητος.
   β) Ισχύει $1 < \sqrt{2}$
   γ) Ισχύει $4 < \sqrt{5} < 6$
   δ) Ο αριθμός 0,33333… είναι ρητός
   ε) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 2 απ' ότι στο 1
   στ) Ο αριθμός $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$ είναι άρρητος.

2. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
   $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, 7\sqrt{2}, \sqrt{45}$.

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:
   α) Η λύση της εξίσωσης $3x + \sqrt{5}x = \sqrt{2}x$ είναι:
   I) 0 II) $-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ III) $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}$ IV) τίποτα από τα προηγούμενα
   β) Οι λύσεις της ανίσωσης $\sqrt{2}x < \sqrt{3}x + 1$ είναι:
   I) $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ II) $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ III) $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ IV) $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Ασκήσεις Α

1. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:
   $0, 3, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{7+\sqrt{5}}, \sqrt{2}-\sqrt{3}$
2. Να λυθούν οι εξισώσεις
   α) $x^2 = 2$ β) $x^2 = 10$ γ) $x^2 = -5$ δ) $x^2 = 11$
3. Να βρείτε μεταξύ ποιών διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται ο αριθμός $\sqrt{12}$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιόν από τους παραπάνω ακεραίους βρίσκεται πλησιέστερα.
4. Να λυθεί η εξίσωση $x\sqrt{3} - 2 = \sqrt{3}(2x+1)$.
5. α) Να δειχθεί ότι $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   β) να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - 7(\sqrt{2}-1)$

Ασκήσεις Β

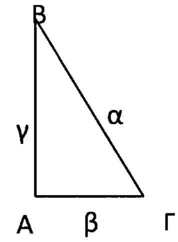
1. να βρεθεί ο μικρότερος φυσικός αριθμός n ώστε ο αριθμός $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}}$ να είναι φυσικός αριθμός.
2. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2009 + 2008 \cdot 2009}$ είναι φυσικός αριθμός
3. Να δειχθεί ότι $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3$.
4. Δίνεται ο αριθμός $A = 1234567891011\ldots99100101$.
   α) Να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του
   β) Να δειχθεί ότι ο Α δεν είναι τετράγωνο ακεραίου (ή ισοδύναμα ο $\sqrt{A}$ είναι άρρητος).

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

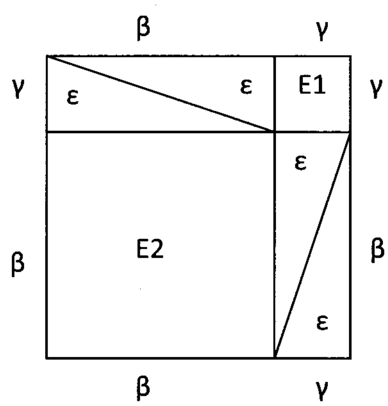
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει ένα βασικό θεώρημα, το οποίο αποδίδεται στο μεγάλο Έλληνα, μαθηματικό και φιλόσοφο, Πυθαγόρα από τη Σάμο. Το θεώρημα αυτό, γνωστό πια ως πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

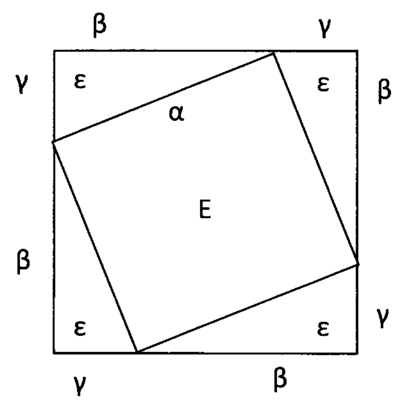
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

Δηλαδή ισχύει ότι $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$



Μια από τις πολλές αποδείξεις φαίνετε στα παρακάτω σχήματα:
Έχουμε δύο τετράγωνα πλευράς το καθένα β+γ.





Το εμβαδό βάση των δύο τετραγώνων μπορεί να εκφραστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, από το ένα έχουμε ότι είναι $E_1 + E_2 + 4\varepsilon$ και από το άλλο $E + 4\varepsilon$ οπότε ισχύει $E_1 + E_2 + \cancel{4\varepsilon} = E + \cancel{4\varepsilon}$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

Ισχύει και το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος.
Δηλαδή αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.
Μερικές βασικές εφαρμογές του πυθαγορείου θεωρήματος είναι:

- Αν γνωρίζουμε την πλευρά ενός τετραγώνου μπορούμε να βρούμε τη διαγώνιό του (ή πιο γενικά αν γνωρίζουμε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου)

- Αν γνωρίζουμε τις βάσεις και τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου μπορούμε να βρούμε το ύψος του, κατ' επέκταση το εμβαδό του.
- Αν γνωρίζουμε τη βάση και τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου μπορούμε να βρούμε το ύψος του, που αντιστοιχεί στη βάση, κατ' επέκταση και το εμβαδό του.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστές ή Λάθος, αν είναι λανθασμένες:

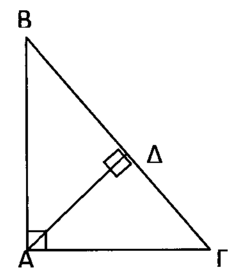
   Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

   α) $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$

   β) $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2$

   γ) $\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{B\Delta}^2$

   δ) $\mathrm{AB}^2 - \mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{\Delta\Gamma}^2$

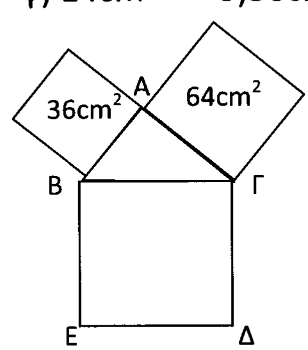


2) Αν οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι α=3cm, β=4cm, γ=5cm τότε θα ισχύει ότι:

   α) $\widehat{A} = 90^\circ$ β) $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$ γ) $\widehat{\mathrm{B}} = 90^\circ$ δ) τίποτα από τα παραπάνω

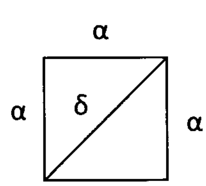
3) Στο διπλανό σχήμα το εμβαδό του τετραγώνου ΒΓΔΕ είναι:

   α) 28cm^2 β) 100cm^2 γ) 14cm^2 δ)50cm^2



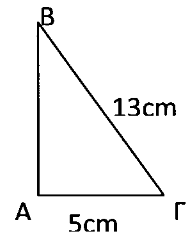
4) Στο διπλανό τετράγωνο πλευράς $\alpha = \sqrt{2}cm$ η διαγώνιός του δ ισούται:

   α) δ=4cm β) δ=2cm γ) $\sqrt{18}cm$ δ) $\sqrt{8}cm$



5) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο είναι α=13cm, β=5cm, τότε η γ ισούται:

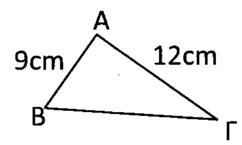
α) 8cm β) 6cm γ)11cm δ) 12cm



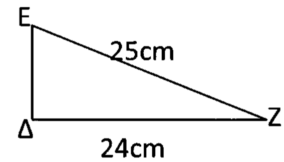
Ασκήσεις Α

1. Να υπολογίσετε την πλευρά x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

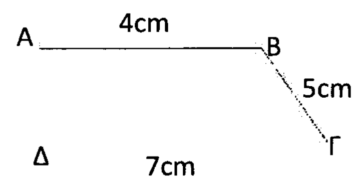
α)



β)

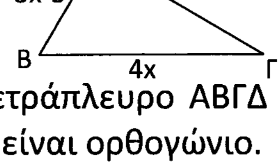


2. Να υπολογίσετε το ύψος του διπλανού τραπεζίου:

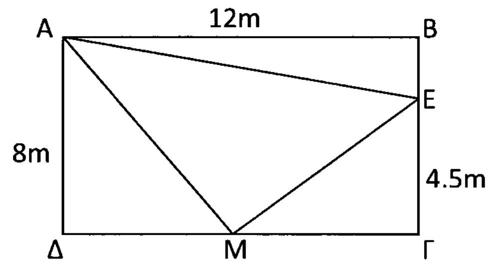


3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με ΑΒ=8cm και ΑΓ=6cm και το ύψος του ΑΔ. Να υπολογίσετε:
   α) την υποτείνουσα ΒΓ
   β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ
   γ) το ύψος ΑΔ
   δ) τα μήκη ΒΔ, ΔΓ.

4. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 48cm.
   α) Να βρείτε τον αριθμό x
   β) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

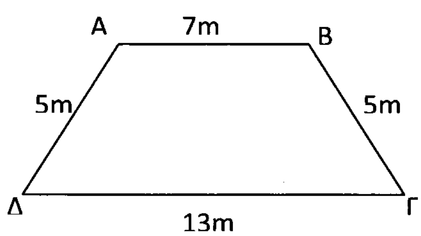


5. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ορθογώνιο.



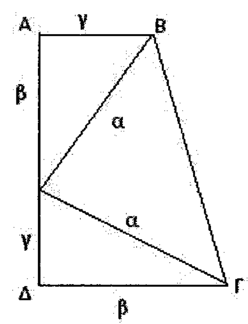
6. Μια χορδή ΑΒ ενός κύκλου ακτίνας R=5cm έχει μήκος 8cm. Να βρείτε το απόστημα d της χορδής αυτής.

7. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ. Να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου καθώς και τα μήκη των διαγωνίων του.



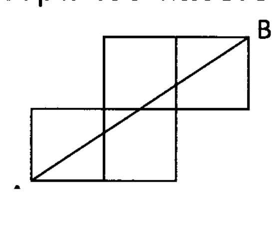
Ασκήσεις Β

1) Να εξηγήσετε γιατί το διπλανό σχήμα δίνει μια απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος.

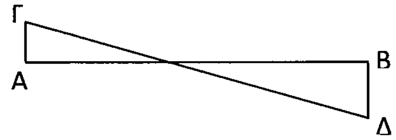


2) Ομοίως να εξηγήσετε γιατί το διπλανό σχήμα δίνει μια απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος.(το σχήμα λείπει)

3) Πόσο είναι το μήκος του ΑΒ αν η πλευρά του καθενός από τα 4 τετράγωνα του σχήματος είναι 1.

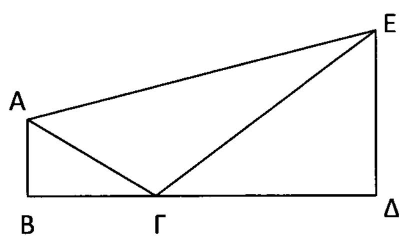


4) Στο επόμενο σχήμα να βρεθεί η απόσταση ΓΔ αν γνωρίζουμε ότι AB=8m, AΓ=2m και BΔ=4m.

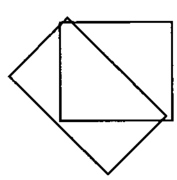


5) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες μεταξύ τους. Να δειχθεί ότι $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$.

6) Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel E\Delta$, $\widehat{B} = 90^\circ$, $B\widehat{A\Gamma} = \Gamma\widehat{E}\Delta = 45^\circ$, $\Delta E = 2AB$ και $AB = \alpha$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ συναρτήσει του Α.



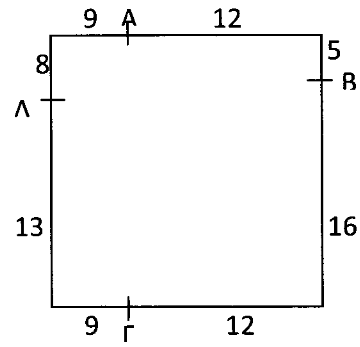
7) Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, πλευράς α, ενώ το τετράπλευρο ΑΖΕΓ είναι ορθογώνιο. Να υπολογισθεί η πλευρά ΑΖ συναρτήσει του α.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1. Σ' ένα τετράγωνο πλευράς 21εκ. βρίσκονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ σε θέσεις και αποστάσεις από τις κορυφές όπως δείχνει το σχήμα:

   Να δειχθεί ότι $A\Delta + \Delta B + 1 > AB + A\Gamma$.



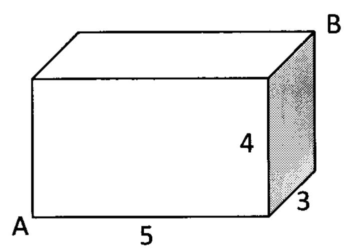
2. Να υπολογισθεί η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5$.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α=12cm και ΑΜ η διάμεσός του. Αν Ε το μέσο του ΑΜ να υπολογισθεί το μήκος του ΒΕ.

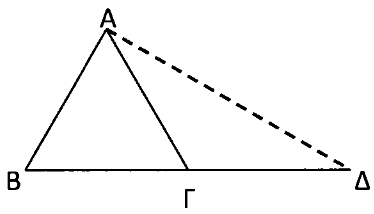
4. Να υπολογισθεί ο αριθμός $\sqrt{2^{2^3}}$.

5. Το μήκος του συντομότερου δρόμου από το σημείο Α στο σημείο Β παραμένοντας πάνω στις έδρες του διπλανού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

   Α. 10 Β. $3+\sqrt{41}$ Γ. $4+\sqrt{34}$ Δ. $\sqrt{80}$ Ε. $\sqrt{74}$

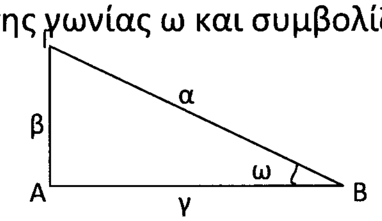


6. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α=3. Προεκτείνουμε την ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Να υπολογισθεί η πλευρά ΑΔ.



Εφαπτόμενη οξείας γωνίας

Αν έχουμε μια οξεία γωνία ω και θεωρήσουμε τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως μια οξεία γωνία τους την ω, τότε ο λόγος της απέναντι από την ω κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη στην ω κάθετη πλευρά είναι σταθερός (δηλαδή ο ίδιος για όλα αυτά τα τρίγωνα) και λέγεται εφαπτόμενη της γωνίας ω και συμβολίζεται $\varepsilon\varphi\,\omega$.



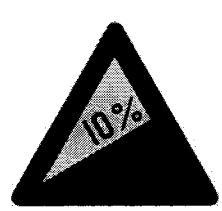
Έχουμε λοιπόν

$$\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{\text{απέναντι από την } \omega \text{ κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη στην } \omega \text{ κάθετη πλευρά}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Αν $\omega = \theta$ τότε $\varepsilon\varphi\,\omega = \varepsilon\varphi\,\theta$.

<u>Κλίση δρόμου</u>

Αν ένας (ευθύγραμμος) δρόμος δ σχηματίζει οξεία γωνία ω με το οριζόντιο επίπεδο, τότε η εφαπτόμενη της γωνίας ω λέγεται κλίση του δρόμου δ.



Βλέπουμε πινακίδες με την ένδειξη:

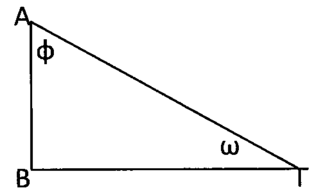
Που σημαίνει ότι σε κάθε 100m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10m.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ που φαίνεται δίπλα είναι:

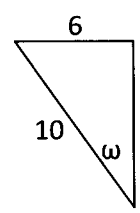
   Α. α) $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ β) $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}}$ γ) $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}}$

   Β. α) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ β) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ γ) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}}$



2. Στο διπλανό σχήμα η $\varepsilon\varphi\omega$ είναι ίση με:

   α) $\frac{3}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{3}{4}$ δ) $\frac{4}{3}$

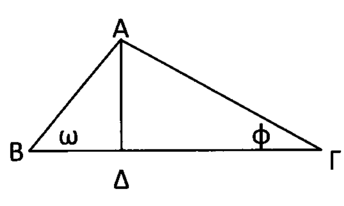


3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν $\varepsilon\varphi\Gamma < 1$ να διατάξετε τις πλευρές του τριγώνου από την μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.

4. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν $\mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$ να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς, $\varepsilon\varphi\widehat{\mathrm{B}}$, $\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma}$, 1.

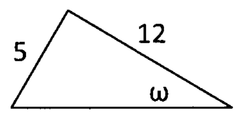
5. Στο διπλανό σχήμα η ω, φ είναι οξείες και $\Delta\mathrm{B} < \Delta\Gamma$ τότε:

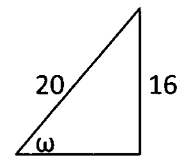
   α) $\varepsilon\varphi\omega > \varepsilon\varphi\varphi$ β) $\varepsilon\varphi\omega < \varepsilon\varphi\varphi$ γ) $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\varphi$



Ασκήσεις

1) Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi\,\omega$:



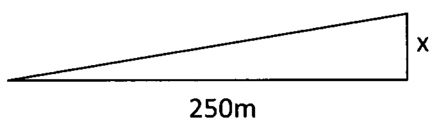


2) Να κατασκευάσετε μια οξεία γωνία ω, ώστε $\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{4}{3}$.

3) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν $\varepsilon\varphi\mathrm{B} > 1$ να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

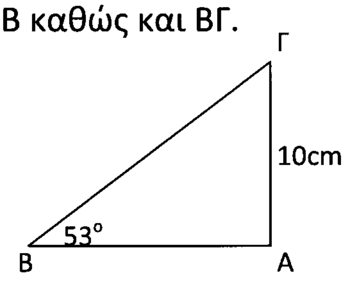
α) $\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}$ β) $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} - 1$ γ) $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} - 1$

4) Αν η κλίση του διπλανού δρόμου είναι 8% να υπολογίσετε το ύψος x:

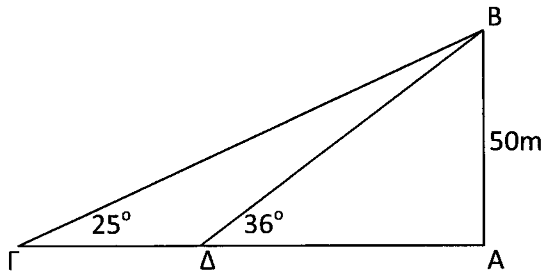


5) Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\varepsilon\varphi 68^\circ$ και $\varepsilon\varphi 22^\circ$ είναι αντίστροφοι αριθμοί.

6) Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος έχουμε $\widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 53^\circ$ καθώς και ΑΓ=10cm. Να υπολογισθούν οι πλευρές ΑΒ καθώς και ΒΓ.



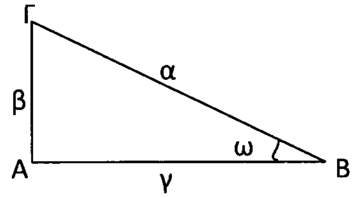
7) Βάση του διπλανού σχήματος να υπολογισθούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ, ΑΓ και ΓΔ.



Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Αν έχουμε μια οξεία γωνία ω και θεωρήσουμε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως μια οξεία γωνία τους την ω, τότε:

- Ο λόγος της απέναντι από την ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα είναι σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω και συμβολίζεται $\eta\mu\,\omega$.
- Ο λόγος της προσκείμενης στην ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα είναι σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω και συμβολίζεται $\sigma\upsilon\nu\,\omega$.



Οπότε:

$$\eta\mu\,\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ \omega\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ \omega\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν $\omega = \theta$ τότε $\eta\mu\,\omega = \eta\mu\,\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\,\omega = \sigma\upsilon\nu\,\theta$.

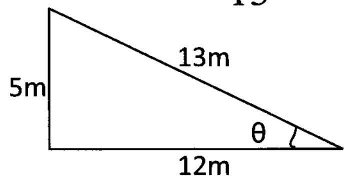
Βάση των παραπάνω έχουμε για $0 < \omega < 90^\circ$

$0 < \eta\mu\,\omega < 1\ \ \kappa\alpha\iota\ 0 < \sigma\upsilon\nu\,\omega < 1$ καθώς και $\varepsilon\varphi\,\omega = \dfrac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}$.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο το

- $\eta\mu\theta$ ισούται α) $\frac{12}{13}$ β) $\frac{5}{12}$ γ) $\frac{13}{12}$ δ) $\frac{5}{13}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta$ ισούται α) $\frac{12}{13}$ β) $\frac{5}{13}$ γ) $\frac{5}{12}$ δ) $\frac{13}{12}$



2. Δίνεται το διπλανό σχήμα. Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$ β) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A\Gamma}}$ γ) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Gamma\mathrm{E}}$

δ) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ ε) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\Delta}$ στ) $\eta\mu\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$

ζ) $\eta\mu\theta = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\Gamma\Delta}$ η) $\eta\mu\theta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Gamma\Delta}$ θ) $\eta\mu\theta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A\Gamma}}$

3. Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που <u>δεν</u> μπορούν να εκφράζουν το συνημίτονο οξείας γωνίας:

α) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ γ) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ δ) 1,01 ε) -0,5 στ) $\frac{-2}{3}$

4. Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$ τότε η $\varepsilon\varphi\theta$ ισούται:

α) $\frac{5}{12}$ β) $\frac{12}{5}$ γ) $\frac{13}{12}$ δ) $\frac{13}{5}$

Μεταβλητές τριγωνομετρικών αριθμών

Όταν μια οξεία γωνία αυξάνετε τότε:

- αυξάνετε το ημίτονό της
- ελαττώνεται το συνημίτονό της
- αυξάνετε η εφαπτομένη της

Δηλαδή αν $0 < \theta < \varphi < 90$ τότε

$\eta\mu\theta < \eta\mu\varphi$ $\qquad$ $\eta\mu\theta = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΑ}} < \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΟΒ}} = \eta\mu\varphi$

$\sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\varphi$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} > \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}} = \sigma\upsilon\nu\varphi$

$\varepsilon\varphi\theta < \varepsilon\varphi\varphi$ $\qquad$ $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΓ}} < \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΟΔ}} = \varepsilon\varphi\varphi$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, τότε είναι ίσες
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα, τότε είναι ίσες
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσες εφαπτόμενες, τότε είναι ίσες

Δηλαδή αν $\eta\mu\theta = \eta\mu\varphi$ τότε $\theta = \varphi$
αν $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\varphi$ τότε $\theta = \varphi$
αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\varphi$ τότε $\theta = \varphi$.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

   α) $\eta\mu 25^\circ$, $\eta\mu 49^\circ$, $\eta\mu 17^\circ$, $\eta\mu 63^\circ$

   β) $\sigma\upsilon\nu 29^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 37^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 89^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 5^\circ$

   γ) $\varepsilon\varphi 49^\circ$, $\varepsilon\varphi 35^\circ$, $\varepsilon\varphi 51^\circ$, $\varepsilon\varphi 73^\circ$

2. Αν ω, θ οξείες γωνίες να επιλέξετε την σωστή απάντηση:
   α) Αν $\eta\mu\omega < \eta\mu\theta$ τότε Α. $\omega = \theta$ Β. $\omega < \theta$ Γ. $\omega > \theta$
   β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega < \sigma\upsilon\nu\theta$ τότε Α. $\omega = \theta$ Β. $\omega < \theta$ Γ. $\omega > \theta$
   γ) Αν $\varepsilon\varphi\omega < \varepsilon\varphi\theta$ τότε Α. $\omega = \theta$ Β. $\omega < \theta$ Γ. $\omega > \theta$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστές ή Λάθος αν είναι λανθασμένες:

   α) $\eta\mu 15^\circ > \eta\mu 25^\circ$ β) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\sigma\upsilon\nu 27^\circ} < 1$ γ) $\varepsilon\varphi 17^\circ - \varepsilon\varphi 27^\circ < 0$

   δ) $\sigma\upsilon\nu 27^\circ - \sigma\upsilon\nu 37^\circ > 0$ ε) $\eta\mu 39^\circ - \eta\mu 19^\circ < 0$

   στ) $2\sigma\upsilon\nu 69^\circ - \sigma\upsilon\nu 23^\circ - \sigma\upsilon\nu 1^\circ < 0$

   ζ) $\dfrac{\varepsilon\varphi 80^\circ - \varepsilon\varphi 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 21^\circ - \sigma\upsilon\nu 22^\circ} > 0$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:
   α) $\eta\mu 39^\circ - \eta\mu 71^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 47^\circ - \sigma\upsilon\nu 51^\circ$ γ) $\varepsilon\varphi 61^\circ - \varepsilon\varphi 62^\circ$

2. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\dfrac{\eta\mu 55^\circ - \eta\mu 33^\circ}{\sigma\upsilon\nu 55^\circ - \sigma\upsilon\nu 33^\circ}$.
3. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\mathrm{A} = \eta\mu 8^\circ - \eta\mu 7^\circ$ και $\mathrm{B} = \sigma\upsilon\nu 8^\circ - \sigma\upsilon\nu 7^\circ$.
4. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\mathrm{A} = 2\sigma\upsilon\nu 41^\circ$ και $\mathrm{B} = \sigma\upsilon\nu 35^\circ + 1$.
5. Αν ω, θ οξείες γωνίες με $\eta\mu\,\omega < \eta\mu\,\theta$, να δειχθεί ότι ω<θ
6. Αν θ_1, θ_2 οξείες γωνίες με $\theta_1 \neq \theta_2$,να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων: $\mathrm{A} = (\eta\mu\theta_1 - \eta\mu\theta_2)(\sigma\upsilon\nu\theta_1 - \sigma\upsilon\nu\theta_2)$ και $\mathrm{B} = \dfrac{\varepsilon\varphi\theta_1 - \varepsilon\varphi\theta_2}{\sigma\upsilon\nu\theta_1 - \sigma\upsilon\nu\theta_2}$.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη Σωστό, αν είναι σωστές ή Λάθος αν είναι λανθασμένες:

   α. $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ$ β. $3\varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi 60^\circ$

   γ. $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ$ δ) $\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \eta\mu 30^\circ = 1$ ε) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \sqrt{3}$

2. Λύση της εξίσωσης $x\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 3$ είναι ο αριθμός:

   α. $\frac{3}{2}$ β. 1 γ. 5 δ. 6

3. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

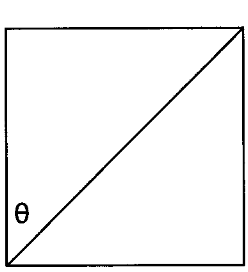
   $\eta\mu 46^\circ,\ 1,\ \eta\mu 81^\circ,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \eta\mu 20^\circ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. Αν θ οξεία γωνία για την οποία ισχύει $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$ τότε η θ ισούται:

   α. 30^o β. 45^o γ. 60^o δ. τίποτα από τα προηγούμενα

5. Το διπλανό σχήμα είναι τετράγωνο. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

   α) $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ γ) $\varepsilon\varphi\theta = 1$ δ) $\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45°, 60°

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας είναι συχνά άρρητοι αριθμοί (έχουν άπειρα σε πλήθος δεκαδικά ψηφία χωρίς να είναι περιοδικοί αριθμοί).
Κάποιοι τριγωνομετρικοί αριθμοί υπολογίζονται με στοιχειώδεις γνώσεις. Αυτοί είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45°, 60°.
Παρακάτω παραθέτουμε τον πίνακα με τις τιμές αυτών:

	30°	45°	60°
Ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Εφαπτόμενη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι:

   α) $\sigma\upsilon\nu(60^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu 60^\circ \eta\mu 30^\circ$

   β) $2\eta\mu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 1$

   γ) $\varepsilon\varphi 60^\circ = \dfrac{2\varepsilon\varphi 30^\circ}{1 - \varepsilon\varphi^2 30^\circ}$

   δ) $\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$

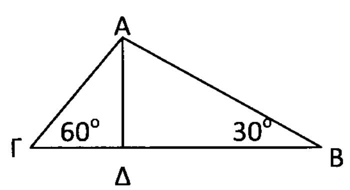
2. Αν θ=30° και ω=45° να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων

   $\mathrm{A} = 2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\theta,\ \mathrm{B} = \dfrac{4\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1}{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi^2\theta}$

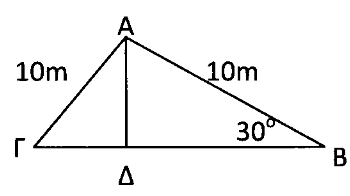
3. Αν θ οξεία γωνία, τότε να βρεθεί η θ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

   α. $2\sigma\upsilon\nu\theta = 1$ β. $2\eta\mu\theta - \sqrt{2} = 0$ γ. $\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta = 3$

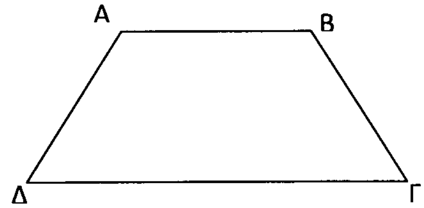
4. Αν θ οξεία γωνία τότε να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$.
5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ αν γνωρίζουμε ότι το ύψος ΑΔ=4m.



6. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ και το εμβαδό του τριγώνου:



7. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τραπέζιο με $\mathrm{AB} \parallel \Delta\Gamma$ και ΑΒ=ΑΔ=ΒΓ=x και ΔΓ=2x. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τραπεζίου και στη συνέχεια να υπολογισθεί η ΑΓ συναρτήσει του x.



ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε. Μ.Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ Γυμνασίου

Πλέρου Αντωνία

Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Email:tplerou@gmail.com

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

<u>Σύντομη επανάληψη ύλης Α΄ Γυμνασίου</u>

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-4)^3 =$

β) $(9-7)^0 =$

γ) $-2^4 =$

δ) $(-\frac{1}{3})^{-3} =$

2. Να γράψετε σε μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $6\cdot 2^{-4}\cdot 2^{12}+2\cdot\left(2^2\right)^5:8-3\left(-\frac{1}{16}\right)^{-2}$

β) $3^7\div 3^5+4\cdot 3^2-2\cdot 3^4\cdot 3^{-2}$

γ) $3^9\cdot 3^5+3^7\div 3^{-7}+8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-14}-9^4\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-2}$

δ) $\left[(-5)^6\cdot 25\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right]^3:(-125)^{-2}$

3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$A = (-4)(-3) + [2(-7) - 2] : (-4) + (-3 + 8)$$

$$B = 18 - 3 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5)^{-8} \div (-5)^{-7} - 1^6 =$$

$$\Gamma = 2(-3)^2 + (-35) : (-5) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)^{-2} - (-1)^6 \cdot (-7)^0 =$$

$$\Delta = -8^2 + 16\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left[7 - (-5)^{10} \div (-5)^8 - (-27)^{-1} \cdot (-6+9)^3\right] =$$

$$E = -\left[\alpha - \beta - (\beta - \alpha) - (-6)\right] + (\alpha - \beta + 3) - (\beta - \alpha + 3) =$$

$$Z = \frac{4 \cdot 2^2 - (-5)^2 + 5 \cdot (-1)^4 - 4 \div (-10)^0}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - (-10+6)^2 \div (-4)} =$$

<u>Α ΜΕΡΟΣ</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - Εξισώσεις –Ανισώσεις

<u>1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις</u>

1. Να εκφράσετε τις ακόλουθες προτάσεις με μεταβλητές.

α) Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξάνεται κατά 5.

β) Το οκταπλάσιο ενός αριθμού μειώνεται κατά 1.

γ) Το $\frac{1}{5}$ ενός αριθμού είναι μικρότερο από 12.

δ) Το διπλάσιο της διαφοράς δυο αριθμών αυξάνεται κατά 3.

ε) Το διπλάσιο του αθροίσματος ενός αριθμού με το 4 ελαττώνεται κατά 1.

στ) Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού αυξάνονται κατά $\frac{1}{5}$.

2. Να γράψετε με την βοήθεια μεταβλητών τα ακόλουθα:

α) Την περίμετρο ενός τετραγώνου πλευράς x.

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει διαστάσεις x, y.

γ) Την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = α, ΓΑ = β, ΑΒ = γ.

δ) Τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

ε) Έναν άρτιο φυσικό αριθμό.

στ) Έναν περιττό φυσικό αριθμό.

3. Αν $\alpha = \frac{1}{3}$ και $\beta = -3$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης.

$$A = 12\beta\alpha^2 - 2\alpha^{-2} \cdot \beta + 18\alpha^{-1} \cdot \beta^{-2}$$

4. Αν $\alpha = -1,\ \beta = +2$ και $\gamma = -\frac{1}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2\alpha^3 - \alpha\beta^2 + (\beta - \alpha) : \gamma}{(\alpha - \beta\gamma)^{-2}}$$

5. Αν $\alpha = -2$, $\beta = +\frac{1}{2}$ και $x = -3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\beta^{-1} + \alpha^5 \cdot \beta + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^{x+1} + \beta^{x+3} =$$

6.Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3\alpha^2\beta^{-1} - \alpha^3 + 1}{\alpha\beta^2 + \alpha - 2},\ \text{αν}\ \alpha = -2\ \text{και}\ \beta = -3.$$

7.Αν $x = -2$ και $y = \frac{1}{4}$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2y - 8xy}{3xy^{-1} + 6}$$

1.2. Εξισώσεις α΄ βαθμού

1.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2}{5}(\chi - 3) - \frac{3}{2}(\chi + 1) = 1 - \frac{3\chi + 5}{10}$

β) $1-\dfrac{2x-5}{3}=x-\dfrac{x+2}{6}$

γ) $2-\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{2(x+3)}{4}=-\dfrac{5(x-1)}{6}$

δ) $2-\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{2(x+3)}{4}=-\dfrac{5(x-1)}{6}$

2. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x-8+\beta=3\beta-4x$.

Να βρείτε τα α, β ώστε η εξίσωση να είναι αόριστη.

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παρακάτω παράστασης,

$$A=(2x-4)\cdot 2^x-3^2\cdot 3^x-(x+7)\cdot x-x^2$$

όπου x είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\frac{3}{2}+\frac{2\chi+1}{3}=\frac{\chi-1}{2}-\chi$$

4. Να υπολογίσετε το x έτσι ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

$(+5)^6\cdot(+5)\cdot(+5)^{-3}=(+5)^x$

$7^{-2}\div 7^4=7^x$

$\left[(-2)^x\right]^3=(-2)^{-6}$

$9^x\cdot 3^{4x-1}=\dfrac{1}{27}\cdot 81^x$

$\left[(-3)^{-4}\right]^x=(-3)^{-8}$

$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^x=1$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^x$

5. Αν $3\cdot 3^y=3^{-2}$ και $3^{x-4}=\dfrac{1}{27}$ να υπολογίσετε τους αριθμούς x και y. Στην συνέχεια υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α, όπου x και y είναι οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων:

$$A=\frac{(xy)^2-2y^3}{4y+3x}$$

6. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ και $x-y=18$, να βρείτε τους αριθμούς x και y.

.

1.3. Ανισώσεις α΄ βαθμού

1. Να λυθεί η εξίσωση :

$$2(\kappa-2)-5=3(\kappa-1)-4\kappa$$

και στην συνέχεια η παρακάτω ανίσωση, όπου κ η λύση της προηγούμενης εξίσωσης:

$$1-\frac{2x-\kappa}{3}+\frac{x-\kappa+1}{4}\leq x+\frac{(\kappa+1)x}{2}$$

2. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις τους πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

$$3(\chi-2)+5(4-\chi)>6-4\chi$$

$$3\chi-2(\chi-4)\leq 5(\chi-3)+7$$

$$\frac{3-\chi}{5}-\frac{2\chi+4}{15}\geq 2$$

3. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις:

$\chi-2(3-2\chi)\leq 6(\chi+1)-8$ και $\frac{\chi}{2}-\frac{3(2\chi-1)}{10}>\frac{3\chi-2}{5}$

$\frac{3(\chi+1)}{4}-\frac{2(\chi-3)}{3}-\frac{5\chi+1}{12}<1$ και $2(3\chi-5)-4(\chi+2)<2$

4. Να λυθούν οι ανισώσεις

$$7x-(5+4x)>3x+10$$

$$x-5x+6\geq 3x-7x+5$$

$$x+7-(3x-2)>-2x$$

$$\frac{2x-2}{7}-\frac{3}{2}<\frac{2x}{7}$$

$$\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{2}\geq\frac{13x}{6}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{2(x-1)}{3}-\frac{3x+12}{4}>-\frac{x}{12}-\frac{5}{3}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2- ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού ακεραίου

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς.

α) $\sqrt{50+14}$ β) $\sqrt{23\cdot 23}$ γ) $\left(\sqrt{23}\right)^2$ δ) $\sqrt{10\cdot 23+26}$

2. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς που είναι λύσεις των εξισώσεων.

$$36+x^2=100$$

$$150+2x^2=200$$

$$13^2-69=y^2$$

$$x^2=\frac{16}{121}$$

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς.

$$\sqrt{9}+\sqrt{25} \text{ και } \sqrt{9+25}$$

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{25} \text{ και } \sqrt{9\cdot 25}$$

$$\sqrt{7}+\sqrt{18} \text{ και } \sqrt{7+18}$$

$$\sqrt{18}:\sqrt{2} \text{ και } \sqrt{18:2}$$

4. Να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{81}}{3}+\frac{5}{\sqrt{25}}}=2$$

$$\sqrt{3+\sqrt{30+\sqrt{36}}}=3$$

$$\sqrt{7+\sqrt{78+\sqrt{2+\sqrt{49}}}}=4$$

5. Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε να ορίζονται οι παραστάσεις :

$$\sqrt{7x-(2x+10)}$$

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{x+7}$$

$$\sqrt{-x-\frac{2}{3}(7x+2)}$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{1-x}{3}-\frac{4x-9}{3}}$$

2.2. Άρρητοι αριθμοί-Πραγματικοί αριθμοί

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$2\sqrt{5}-3\sqrt{8}+\sqrt{5}-5\sqrt{5}+7\sqrt{8}$$

$$2(3\sqrt{3}-4)-\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})+3\sqrt{15}-\sqrt{15}$$

$$-\sqrt{8}(1+2\sqrt{8}-4\sqrt{2})-\sqrt{25}+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+3\left(\sqrt{18}\right)^2-\sqrt{18\cdot 2}$$

$$\frac{15\sqrt{50}}{5\sqrt{2}}-(3\sqrt{3}-2\sqrt{16})+3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

2. Να βάλετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα σειρά:

α) $\sqrt{36}, \sqrt{\frac{144}{81}}, \sqrt{1}, \sqrt{8}$

β) $\sqrt{60}, \sqrt{\frac{196}{4}}, \sqrt{49}$

γ) $\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{5+20}, \sqrt{5\cdot 20}$

3. Να βρείτε ποιοι από τους επομένους αριθμούς είναι άρρητοι και ποιοι ρητοί και να τους τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

$$\sqrt{121}, \left(\sqrt{15}\right)^2, \frac{24}{5}, \sqrt{\frac{25}{64}}, \sqrt{40}, \sqrt{\frac{72}{2}}, \sqrt{10+\sqrt{36}}, \sqrt{4+\sqrt{144}}$$

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς που είναι λύση των εξισώσεων:

α) $x^2 = 15$ β) $x^2 = 8$ γ) $x^2 + 10 = 74$

δ) $32 + x^2 = 30$ ε) $20 - x^2 = -101$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $3x - 4\sqrt{3} = 12 - 5\sqrt{3} - 2x$

β) $2\sqrt{5}x + 3\left(\sqrt{25} - \sqrt{36}\right) = 2x\left(\sqrt{5} - 1\right)$

6. Να κατασκευαστεί γεωμετρικά ο αριθμός $\sqrt{2}$.

Ομοίως για τους αριθμούς $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ και $\sqrt{18}$.

Β ΜΕΡΟΣ

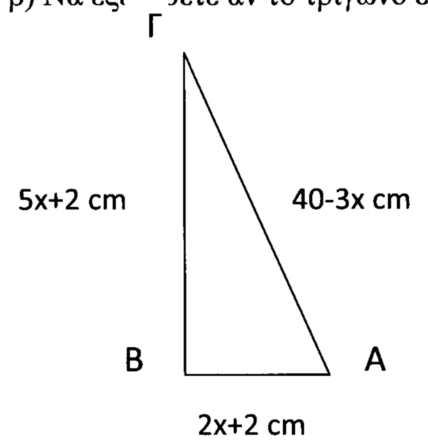
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - Πυθαγόρειο θεώρημα

1.1. Πυθαγόρειο θεώρημα

1. Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 64 cm. Αν για τις πλευρές του ισχύει ΑΒ = 2x+2 cm, ΑΓ = 40-3x cm και ΒΓ = 5x+2 cm.

α) Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.

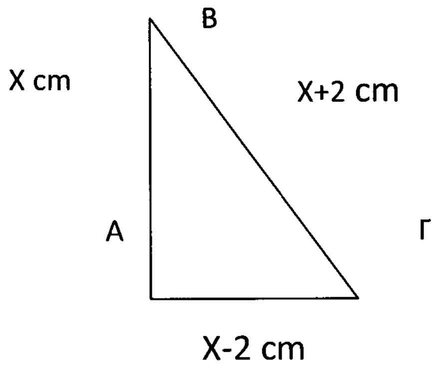
β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



2. Το παρακάτω τρίγωνο έχει περίμετρο 24 cm και ισχύει ΑΒ = x cm ΑΓ = x - 2 cm και ΒΓ = x+2 cm.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



3. Ένα τετράγωνο είναι έχει πλευρά 15 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου του.

4. Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου όταν γνωρίζετε ότι η υποτείνουσα είναι διπλάσια μιας κάθετης πλευράς και ότι η άλλη κάθετη είναι 6.

5. Η κάθετη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 36cm και η άλλη κάθετη πλευρά είναι κατά 9 cm μικρότερη. Να υπολογιστεί η υποτείνουσα του τριγώνου.

6. Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 12, να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

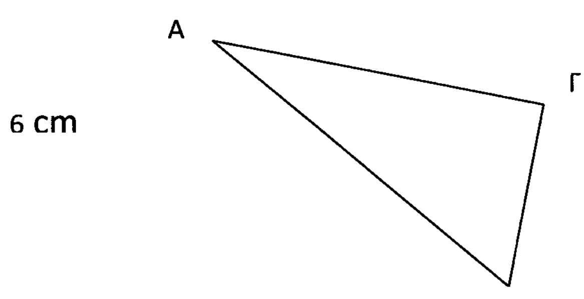
7. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ που έχει πλευρές ΑΒ= $\sqrt{8}$ cm , ΑΓ= $\sqrt{6}$ cm και ΒΓ= $\sqrt{14}$ cm είναι ορθογώνιο.

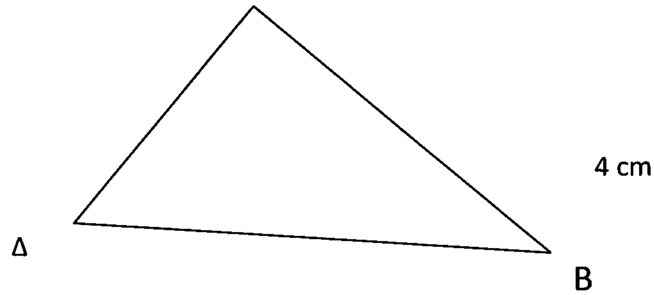
8. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=12cm και ΒΓ=8cm.Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να εξετάσετε εάν το τρίγωνο ΜΝΔ είναι ορθογώνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o} - Τριγωνομετρία

<u>2.1.Εφαπτομένη,ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας.</u>

1. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ΑΔ =6 cm και ΒΓ=4 cm και οι γωνίες Γ =90^{o} και Α=90^{o} (στο τρίγωνο ΑΔΓ).





Να υπολογίσετε:

α) Την πλευρά ΑΓ.

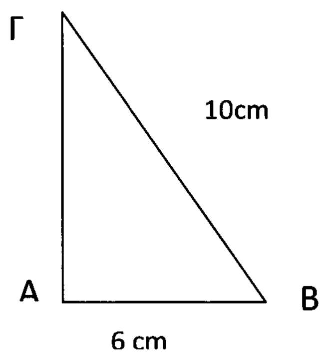
β) Την πλευρά ΔΓ.

γ) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Δ.

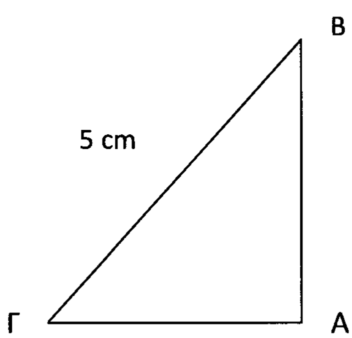
2. Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο με ΑΒ=6 cm και ΒΓ=10 cm.

α) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς ΑΓ.

β) Να υπολογιστεί το ημΒ , συνΒ , εφΒ



3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ισχύει ΒΓ = 5 cm και ημΓ = 0,8 να βρεθεί το μήκος των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

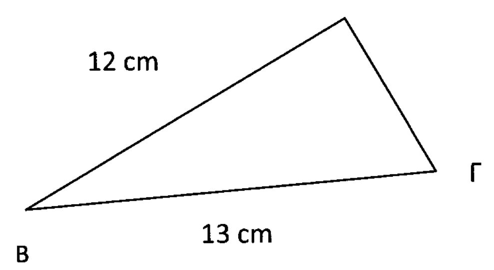


4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$) δίνεται ότι ΑΒ=12 cm και ΒΓ=13 cm.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών Β και Γ.

Α



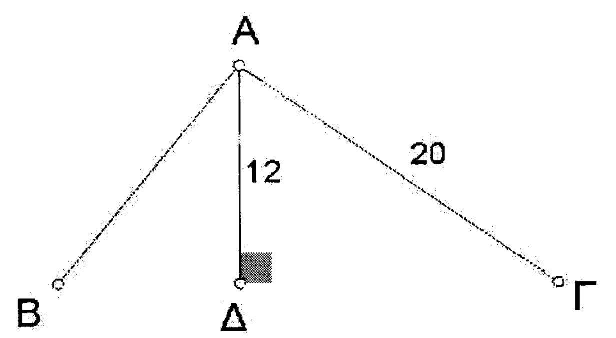
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΑΔ = 12cm και ΑΓ = 20cm.

Δίνεται επίσης ότι ημΒ = 0,8 και συνΒ = 0,6.

α) Να υπολογιστεί η πλευρά ΔΓ του τριγώνου ΑΔΓ.

β) Να υπολογιστούν οι πλευρές ΑΒ και ΒΔ του τριγώνου ΑΔΒ.

γ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

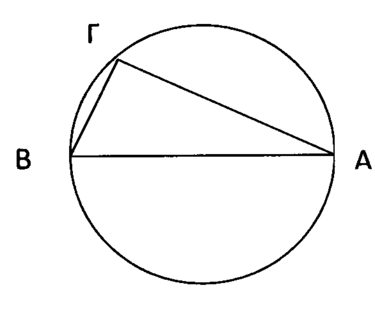


6. Ο παρακάτω κύκλος έχει ακτίνα 5cm, η χορδή ΑΓ είναι 8cm και η περίμετρος του τριγώνου είναι 24cm .

α) Να βρείτε το μήκος της χορδής ΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $Γ=90^o$.

γ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.



7. Να κατασκευαστούν οι γωνίες που έχουν εφαπτόμενη $\frac{3}{4}$ και $\frac{3}{8}$.

8. Αν ω είναι μια οξεία γωνία να αποδειχθεί ότι:

α) $8 - 5\eta\mu\omega > 3$ β) $5\sigma\upsilon\nu\omega + 2\eta\mu\omega < 7$

9. Αν ω είναι οξεία γωνία να βρεθούν οι τιμές ανάμεσα στις οποίες παίρνει τιμές η παράσταση

$$A = 4\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega - 2.$$

10. Δίνεται μια οξεία γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$. Να υπολογιστεί το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και η $\varepsilon\varphi\omega$.

2.2.Μεταβολές τριγωνομετρικών αριθμών.

1. Να γράφουν από το μικρότερο στο μεγαλύτερο οι αριθμοί:

α) ημ55°, ημ31°, ημ22°, ημ18°

β) συν34°, συν15°, συν10°, συν82°

γ) εφ25°, εφ77°, εφ52°, εφ41°

2. α)Να σχεδιαστεί μια γωνία που να έχει $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$.

β)Να σχεδιαστεί μια γωνία που να έχει $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5}{6}$.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ω για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε το ημω και την εφω.

2.3.Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45° και 60°.

1. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\eta\mu 30^o + \sqrt{3}\eta\mu 60^0 - 4\varepsilon\varphi 45^o + \sigma\upsilon\nu^2 45^o$$

$$2\sigma\upsilon\nu\, 60^o + \varepsilon\phi 60^0 - 6\varepsilon\phi 30^o$$

$$2(\eta\mu 30^o + \eta\mu^2 45^o) - \varepsilon\phi 45^o + \sigma\upsilon\nu^2 30^o$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $2\eta\mu^2\omega - 4\sigma\upsilon\nu^2\omega$

α) όταν ω = 30^o

β) όταν ω = 60^o

γ) όταν ω = 45^o

3. Αν ω = 30^o,να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

$$A = \eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu^2\omega + \varepsilon\phi \frac{3\omega}{2}$$

$$B = 5 - \varepsilon\phi^2\omega + \eta\mu^2(2\omega)$$

4. Αν φ=45^o, να αποδειχθεί ότι

$$\eta\mu^4\phi - \eta\mu^2\phi = \sigma\upsilon\nu^4\phi - \sigma\upsilon\nu^2\phi$$

5. Αν ω=30^o και φ=60^o να αποδειχτεί ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\phi - \eta\mu\omega \cdot \eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\phi = 1$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το ¼ ασχολείται με το στίβο, το 1/5 ασχολείται με το μπάσκετ, το 1/8 ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Ο Θαλής - 2009)

2. Ο Κώστας κρατά 5 ευρώ περισσότερα από τα διπλάσια του Γιάννη. Αν Κώστας δώσει 6 ευρώ στον Γιάννη τότε θα έχουν ίσα λεφτά. Να υπολογίσετε πόσα λεφτά κρατά ο καθένας.

3. Το άθροισμα των ηλικιών της Μαρίας και της Άννας είναι 40 χρόνια. Πριν από 7 χρόνια η ηλικία της Μαρίας ήταν κατά ένα χρόνο μεγαλύτερη από το τετραπλάσιο της ηλικίας της Άννας. Να βρείτε τις σημερινές τους ηλικίες.

4. Η Ελένη έχει τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία. Πήγαν σε μια καφετέρια όπου η Μαρία πλήρωσε 4 ευρώ για ένα παγωτό και η Ελένη 6 ευρώ για μια κρέπα. Τώρα η Ελένη έχει 14 ευρώ περισσότερα από τα διπλάσια χρήματα της Μαρίας. Να υπολογίσετε πόσα ευρώ είχε αρχικά η καθεμιά.

5. Στον τελικό κυπέλλου μπάσκετ πουλήθηκαν εισιτήρια των €4, €8 και €10. Τα εισιτήρια των €4 ήταν διπλάσια από τα εισιτήρια των €8 και τα εισιτήρια των € 10 ήταν 100 λιγότερα από τα εισιτήρια των € 8. Αν η συνολική είσπραξη ήταν €4200 να βρείτε πόσα εισιτήρια των €4, €8 και €10 πουλήθηκαν.

6. Σήμερα η ηλικία ενός πατέρα είναι πενταπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Μετά από 8 χρόνια η ηλικία της κόρης του θα ισούται με το $\frac{1}{3}$ της ηλικίας του πατέρα. Ποιές είναι οι σημερινές τους ηλικίες;

7. Σήμερα η ηλικία του Νίκου είναι 3 χρόνια μικρότερη από το διπλάσιο της ηλικίας του Πέτρου. Μετά από 4 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι ίσο με 32 χρόνια. Να βρείτε ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες.

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

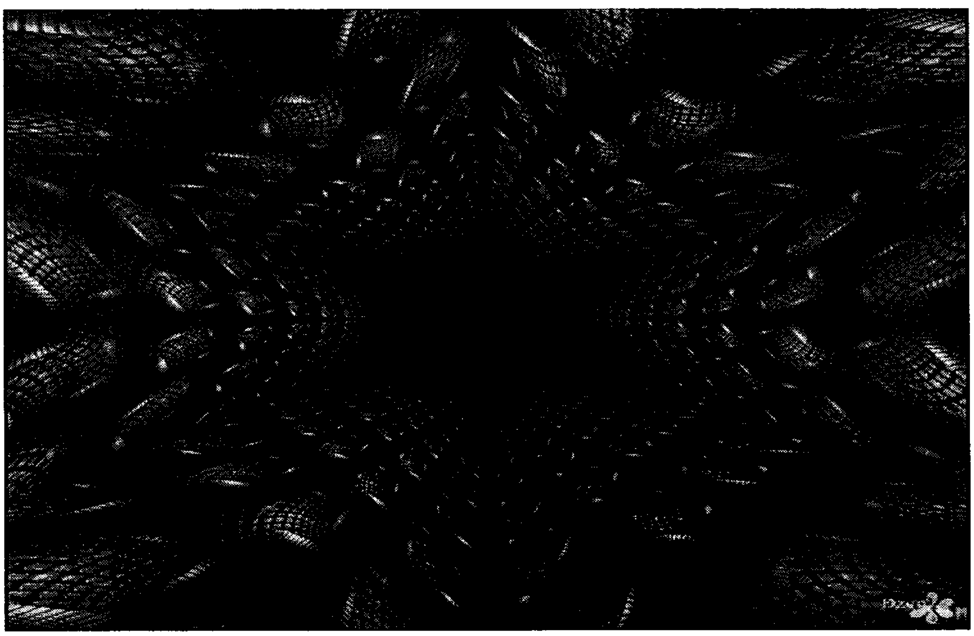
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ - Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ανδρέας Πούλος

Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

andremat@otenet.gr

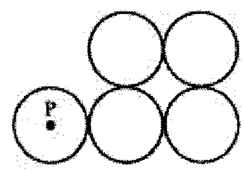
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ



Οι σημειώσεις αυτές παρότι απευθύνονται στους μαθητές της Α΄ τάξης του Γυμνασίου, αφού η έννοια της συμμετρίας υπάρχει στο σχολικό τους βιβλίο, είναι χρήσιμες και για τους μαθητές της Β΄ και Γ΄ τάξης του Γυμνασίου ίσως και της Α΄ Λυκείου, επειδή περιέχουν ιδέες για πώς να απαντάμε σε ερωτήματα που αφορούν την έννοια της συμμετρίας ή πώς να επιλύουμε προβλήματα που αξιοποιούν τη συμμετρία. Η έννοια της συμμετρίας ενός σχήματος (ως προς άξονα και ως προς κέντρο), είναι υποτιμημένη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και κατά τη διδασκαλία στη σχολική τάξη και αυτό φαίνεται από τις ώρες που δίνονται για αυτήν. Όμως, αν αξιοποιηθεί κατάλληλα, παρέχει πρωτότυπες και απλές λύσεις σε πολλά γεωμετρικά προβλήματα, ενώ παράλληλα είναι απαραίτητη για την κατανόηση και άλλων γεωμετρικών εννοιών. Εξάλλου έχει παρατηρηθεί, ότι σε προβλήματα μαθηματικών διαγωνισμών, ορισμένα θέματα συμμετρίας φαίνονται δύσκολα, επειδή ακριβώς δεν την έχουμε κατανοήσει σωστά.

Δίνουμε δύο παραδείγματα.

1) Έχουμε τέσσερις ίσους κύκλους που εφάπτονται μεταξύ τους και τα κέντρα τους είναι κορυφές ενός τετραγώνου (που δεν φαίνεται στο σχήμα). Ένας πέμπτος κύκλος με κέντρο Ρ εφάπτεται σε έναν από τους τέσσερις κύκλους, όπως δείχνει το σχήμα. Το πρόβλημα είναι, πώς να χαράξουμε μία ευθεία που να διέρχεται από το Ρ και να χωρίζει το σχήμα που ορίζουν οι πέντε κύκλοι σε δύο περιοχές με ίσα εμβαδά. Παίζει ρόλο στην απάντηση, η θέση του κύκλου που έχει κέντρο το Ρ; Αλλάζει κάτι στην απάντηση αν η ακτίνα του κύκλου αυτού μεταβάλλεται;



2) Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει άξονα συμμετρίας; (Διαγωνισμός «Ευκλείδης», 2005-2006 για Α' Λυκείου).

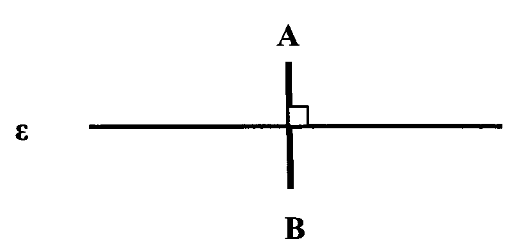
Βασικές έννοιες είναι ο *άξονας συμμετρίας* ενός σχήματος και το *κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος*. Πριν από αυτές όμως πρέπει να ξέρουμε τι ονομάζουμε:

α) συμμετρικό ενός σημείου ως προς μία ευθεία,

β) συμμετρικό ενός σημείου ως προς ένα άλλο σημείο.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΑΞΟΝΑ ή ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς μία ευθεία ε* ονομάζουμε ένα άλλο σημείο Β, όταν η ευθεία ε περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και είναι κάθετη σε αυτό.



Αυτό σημαίνει ότι όσο απέχει το σημείο Α από την ευθεία ε, τόσο απέχει και το Β από αυτήν.

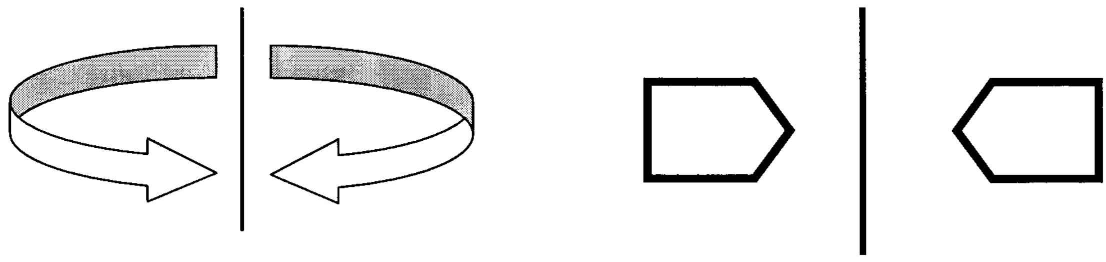
Επίσης, αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία ε, τότε το συμμετρικό του σημείο ως προς την ε, είναι ο εαυτός του.

Κάθε σημείο Α έχει ένα μοναδικό συμμετρικό σημείο ως μία ευθεία. Για άλλη ευθεία, το συμμετρικό του Α είναι διαφορετικό.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Συμμετρικό ενός σχήματος Σ ως προς μία ευθεία ε*, ονομάζουμε ένα άλλο σχήμα Σ΄, που αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του σχήματος Σ ως προς την ευθεία ε.

Αυτό σημαίνει ότι όσα σημεία έχει ένα σχήμα, τόσα σημεία έχει και το συμμετρικό του ως προς μία ευθεία.

Δηλαδή, ένα σχήμα και το συμμετρικό του ως προς μία ευθεία είναι το ένα «αντανάκλαση» του άλλου, όπως φαίνεται και στις επόμενες εικόνες.

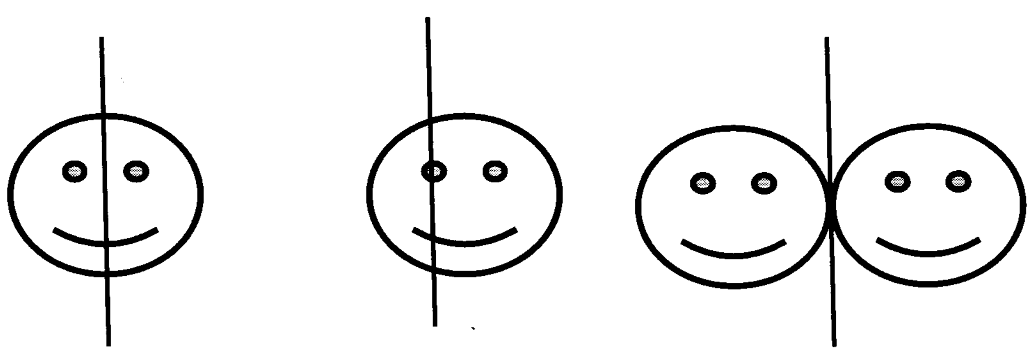


Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί ένα σχήμα και το συμμετρικό του ως προς μία ευθεία ε είναι πάντοτε ίσα. Η εξήγηση (απόδειξη) βασίζεται στην έννοια των ίσων τριγώνων.

Αν τώρα τα δύο συμμετρικά σχήματα Σ και Σ΄ ως προς μία ευθεία ε, τα δούμε σαν ένα ενιαίο σχήμα, τότε έχουμε μία καινούργια και χρήσιμη έννοια, αυτή του **άξονα συμμετρίας**.

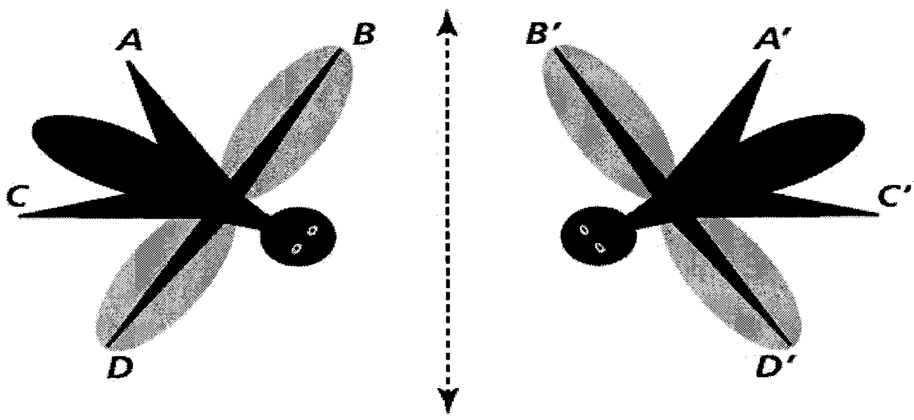
ΟΡΙΣΜΟΣ: *Μία ευθεία ε ονομάζεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος*, αν κάθε σημείο του σχήματος έχει ως συμμετρικό του, ένα άλλο σημείο του ίδιου σχήματος.

Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας μία ευθεία ε, χωρίζεται από αυτήν σε δύο ίσα σχήματα.



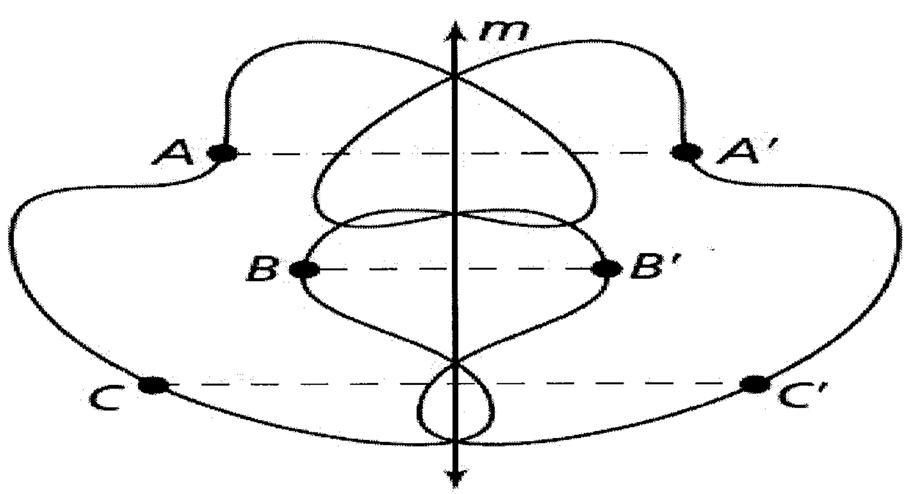
Σχήμα 1^o Σχήμα 2^o Σχήμα 3^o

Στο σχήμα 1^o η κατακόρυφη ευθεία είναι άξονας συμμετρίας του, όπως και στο σχήμα 3^o, αν το θεωρήσουμε σαν ενιαίο σχήμα (δύο πρόσωπα κολλημένα). Το σχήμα 2^o δεν έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία για πολλούς λόγους, π.χ. δεν έχουμε δύο μάτια προς τα αριστερά της ευθείας.

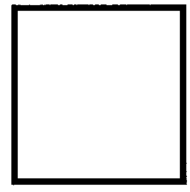


Το παραπάνω σχήμα που περιέχει τα σημεία A, B, C, D είναι συμμετρικό του σχήματος που περιέχει τα σημεία A′, B′, C′, D′ και αντίστροφα. Βέβαια, έχουμε παραλείψει κάτι, που ίσως φαίνεται αυτονόητο. Συμμετρικά ως προς ποια ευθεία; Εννοείται ως προς τη διακεκομμένη ευθεία που περνάει ανάμεσα στα δύο σχήματα.

Το επόμενο σχήμα, παρ' ότι είναι πολύπλοκο, έχει άξονα συμμετρίας, επειδή σε κάθε σημείο του σχήματος αντιστοιχεί ένα άλλο σημείο του σχήματος που είναι μεταξύ τους συμμετρικά ως προς την ευθεία m.

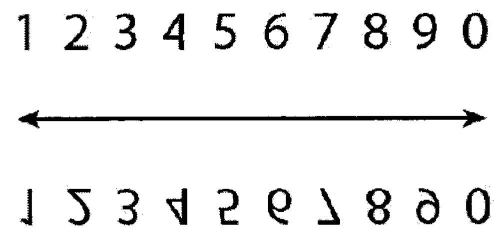


Δεν είναι όμως τα πράγματα πάντα, τόσο αυτονόητα. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο, όπως αυτά παρακάτω, έχουν άξονα συμμετρίας και ποιος είναι αυτός;

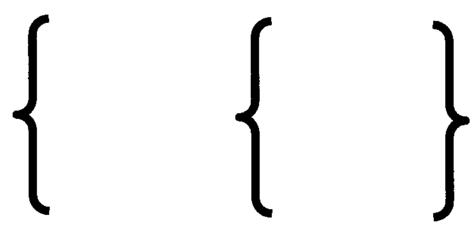


Αν είμαστε προσεκτικοί, θα ανακαλύψουμε ότι το ορθογώνιο έχει ακριβώς 2 άξονες συμμετρίας και το τετράγωνο έχει ακριβώς 4 άξονες συμμετρίας.

Το επόμενο σχήμα παριστάνει τα συμμετρικά των δέκα ψηφίων ως προς μία οριζόντια ευθεία. Μόνο το μηδέν έχει συμμετρικό που το αναγνωρίζουμε αμέσως, όλα τα άλλα ψηφία (ακόμα και το 8 έχει λίγο διαφορετικό συμμετρικό) λόγω της αντανάκλασης δεν τα αντιλαμβανόμαστε αμέσως. Παρ' όλα αυτά τα συμμετρικά τους ψηφία είναι ίσα με τα αρχικά.



Αυτό σημαίνει, ότι κάποιες φορές η συμμετρία μπορεί να μας μπερδέψει με την παράλληλη μετακίνηση ενός σχήματος, το οποίο δεν είναι απαραίτητο να είναι και το συμμετρικό του.



Για παράδειγμα, η πρώτη αγκύλη είναι συμμετρική μόνο με την τρίτη, ενώ με τη δεύτερη είναι απλώς ίσες, αφού έχουμε μία παράλληλη μετακίνηση του σχήματος.

Στη συνέχεια δίνουμε κάποιους κανόνες, οι οποίοι βέβαια μπορεί να αποδειχθούν με την ισότητα τριγώνων, που αφορούν τα συμμετρικά διάφορων σχημάτων και τους άξονες συμμετρίας τους.

- Το σκαληνό τρίγωνο δεν έχει άξονα συμμετρίας.
- Το ισοσκελές τρίγωνο έχει έναν άξονα συμμετρίας, την ευθεία που περνάει από το μέσο της βάσης του και την απέναντι κορυφή από τη βάση του.
- Ένα τρίγωνο που έχει άξονα συμμετρίας είναι σίγουρα ισοσκελές.
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας, τις ευθείες που περνάνε από τα μέσα των βάσεών του και τις απέναντι από αυτές κορυφές του.
- Ένα τρίγωνο με τρεις άξονες συμμετρίας είναι σίγουρα ισόπλευρο.
- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο άξονες συμμετρίας, τότε θα έχει και τρίτον. Άρα θα είναι ισόπλευρο.
- Ο κύκλος είναι ένα σχήμα που έχει άπειρους άξονες συμμετρίας. Αυτοί είναι κάθε ευθεία που περνάει από το κέντρο του.
- Κάθε τόξο κύκλου, ως αυτοτελές σχήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας.
- Από τα τραπέζια, μόνο το ισοσκελές τραπέζιο έχει άξονα συμμετρίας.
- Από τα παραλληλόγραμμα, μόνο το ορθογώνιο με άνισες πλευρές, το τετράγωνο και ο ρόμβος έχουν άξονες συμμετρίας.

Έχει παρατηρηθεί ότι αν δεν δίνουμε έτοιμους κανόνες – συνταγές και κάνουμε ερωτήσεις, ώστε να βρίσκει ο καθένας μόνος του κανόνες και τα συμπεράσματα, τότε μαθαίνει καλύτερα, με την έννοια ότι, θυμάται αυτά που έχει βρει ο ίδιος. Εξάλλου, αν κάνουμε κάπου λάθος, θα το ανακαλύψουμε από τη συζήτηση στην τάξη ή από τη δική μας πιο προσεκτική έρευνα. Ξεκινάμε λοιπόν τις ερωτήσεις.

Ερώτηση 1η:

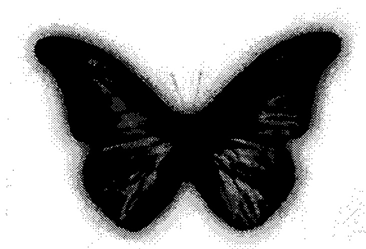
Α) Βρείτε πια κεφαλαία και ποια μικρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους.

Α) Βρείτε πια κεφαλαία γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους.

Α) Βρείτε πια κεφαλαία γράμματα του ρωσικού, του αραβικού ή του εβραϊκού αλφαβήτου έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. (Υπόδειξη, τα γράμματα αυτά θα τα βρείτε στον κατάλογο των συμβόλων του προγράμματος WORD στον υπολογιστή σας).

Ερώτηση 2η:

Υπάρχουν έντομα, όπως η πεταλούδα, που η επίπεδη απεικόνιση τους έχει άξονα συμμετρίας. Το ερώτημα είναι το εξής: Κάθε έντομο έχει άξονα συμμετρίας; Μήπως υπάρχουν έντομα με περισσότερους άξονες συμμετρίας και κάποια που δεν έχουν άξονα συμμετρίας; Αν ναι, ποια είναι αυτά;



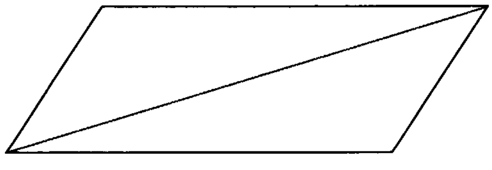
Ερώτηση 3η:

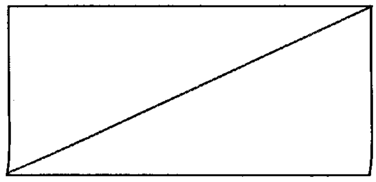
Αν ένα σχήμα, διαθέτει έναν άξονα συμμετρίας, τότε αυτός χωρίζει πάντα το σχήμα σε δύο ίσα σχήματα;

Υπόδειξη: Η πρόταση αυτή είναι θεώρημα. Μία απλοποιημένη απόδειξή του είναι η εξής: Κάθε σημείο του σχήματος, σύμφωνα με τον ορισμό του άξονα συμμετρίας, έχει το συμμετρικό του σημείο πάνω στο σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι το «μισό σχήμα» αντανακλάται ως προς τον άξονα αυτόν πάνω στο «άλλο μισό σχήμα», δηλαδή ο άξονας συμμετρίας χωρίζει το σχήμα σε δύο ίσα σχήματα. Στην περίπτωση των ευθύγραμμων σχημάτων, η απόδειξη είναι απλή και βασίζεται στην ισότητα τριγώνων.

Ερώτηση 4η:

Αν μία ευθεία χωρίζει ένα σχήμα σε δύο ίσα σχήματα, τότε αυτή αποτελεί άξονα συμμετρίας του σχήματος;





Υπόδειξη: Η πρόταση αυτή δεν είναι θεώρημα, επειδή έχει αντιπαραδείγματα. Έτσι, ένα ορθογώνιο ή πλάγιο παραλληλόγραμμο όπως αυτά που φαίνονται στα παραπάνω σχήματα δεν έχουν άξονα συμμετρίας τον φορέα μιας διαγωνίου τους, παρότι η ευθεία αυτή χωρίζει το κάθε σχήμα σε δύο ίσα σχήματα.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την έννοια της συμμετρίας ως προς σημείο και αυτήν του κέντρου συμμετρίας ενός σχήματος, για να έχουμε περισσότερα και πιο ενδιαφέροντα θέματα να συζητήσουμε.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ
και
ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς ένα σημείο Ο,* ονομάζουμε ένα άλλο σημείο Β, όταν το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι το Ο.

Αυτό σημαίνει ότι όσο απέχει το σημείο Α από το Ο, τόσο απέχει και το Β από αυτό.

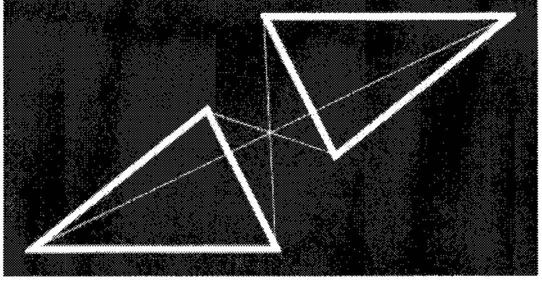
Επίσης, αν το σημείο Α συμπίπτει με το Ο, τότε το συμμετρικό του σημείο είναι ο εαυτός του.

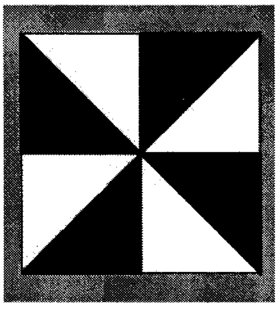
Κάθε σημείο Α έχει ένα μοναδικό συμμετρικό σημείο ως ένα συγκεκριμένο σημείο. Για άλλο σημείο, το συμμετρικό του Α είναι διαφορετικό.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Συμμετρικό ενός σχήματος Σ ως προς ένα σημείο Ο*, ονομάζουμε ένα άλλο σχήμα Σ΄, που αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του σχήματος Σ ως προς το σημείο Ο.

Αυτό σημαίνει ότι, όσα σημεία έχει ένα σχήμα, τόσα σημεία έχει και το συμμετρικό του σχήμα ως προς ένα σημείο Ο.

Ένα σχήμα και το συμμετρικό του ως προς ένα σημείο Ο είναι μία «περιστροφή» του κατά 180^o, όπως φαίνεται και στις επόμενες εικόνες.





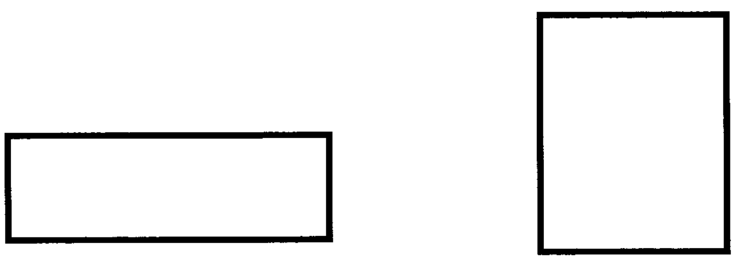
Μπορούμε να εξηγήσουμε, γιατί ένα σχήμα και το συμμετρικό του ως προς ένα σημείο Ο είναι πάντοτε ίσα. Η εξήγηση (απόδειξη) βασίζεται στην έννοια των ίσων τριγώνων.

Αν τώρα, δύο συμμετρικά σχήματα Σ και Σ΄ ως προς ένα σημείο Ο, τα δούμε σαν ένα ενιαίο σχήμα, τότε έχουμε μία καινούργια και χρήσιμη έννοια αυτήν του **κέντρου συμμετρίας**.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Ένα σημείο Ο ονομάζεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος*, αν κάθε σημείο του σχήματος έχει το συμμετρικό του, ως προς το Ο, ένα άλλο σημείο του ίδιου σχήματος.

Ένα σχήμα όπως ο κύκλος, έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του κύκλου, επειδή σε κάθε σημείο του κύκλου αντιστοιχεί ένα άλλο σημείο του κύκλου, που είναι μεταξύ τους συμμετρικά ως προς το κέντρο. Τα σημεία αυτά είναι τα άκρα κάποιας διαμέτρου του κύκλου.

Δεν είναι όμως τα πράγματα πάντα, τόσο αυτονόητα. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο, όπως αυτά παρακάτω, έχουν κέντρο συμμετρίας και ποιο είναι αυτό;



Αν είμαστε προσεκτικοί, θα ανακαλύψουμε ότι το ορθογώνιο, αλλά και το τετράγωνο έχουν ως κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων τους.

Στη συνέχεια, δίνουμε κάποιες ερωτήσεις ώστε να συνεχίσει η παρουσίαση των εννοιών του κέντρου και του άξονας συμμετρίας, με σκοπό να λυθούν πιο εύκολα οι ασκήσεις και τα προβλήματα που συνδέονται με τις έννοιες αυτές.

Ερώτηση 5^{η}:

Αν ένα σχήμα, διαθέτει κέντρο συμμετρίας, τότε αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα σχήματα;
Υπόδειξη: Η πρόταση αυτή είναι θεώρημα. Οι αποδείξεις τέτοιου είδους προτάσεων, παρότι είναι ασυνήθιστες, είναι σχετικά απλές, επειδή βασίζονται μόνο στην ισότητα τριγώνων[1].

Ερώτηση 6^{η}:

Ένα σχήμα, χωρίς κέντρο συμμετρίας, μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα σχήματα;

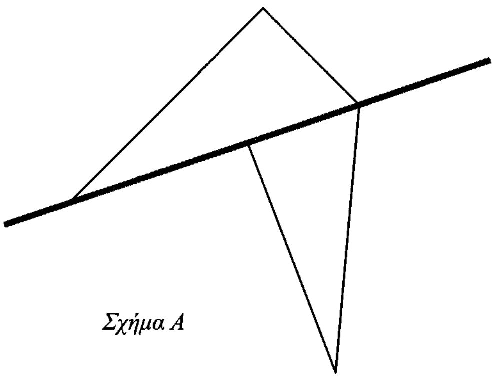
Υπόδειξη: Μία προφανής απάντηση, είναι η εξής. Ένα σχήμα μπορεί να διαθέτει άξονα συμμετρίας, συνεπώς, χωρίζεται από αυτόν σε δύο ίσα σχήματα. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι απαραίτητο να έχει και κέντρο συμμετρίας.

[1] Μία απόδειξη αυτού του θεωρήματος υπάρχει στο βιβλίο των Γιάννη Θωμαΐδη και Ανδρέα Πούλου, *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000, σελίδα 303.

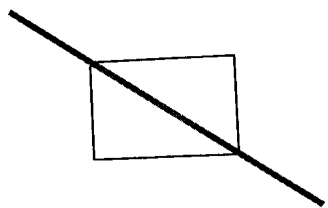
Ερώτηση 7η:

Ένα σχήμα, χωρίς κέντρο και χωρίς άξονα συμμετρίας, μπορεί να χωριστεί από μία ευθεία σε δύο ίσα σχήματα;

Απάντηση: Η εμπειρία από την σχολική τάξη δείχνει ότι αυτό το ερώτημα είναι αρκετά δύσκολο να απαντηθεί άμεσα. Χρειάζεται αρκετό ψάξιμο για να κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα, διότι διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι μία τέτοια πρόταση δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις σχημάτων. Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι το εξής: Τοποθετούμε δύο ίσα τρίγωνα, έτσι ώστε μία πλευρά τους να ανήκει σε μία δεδομένη ευθεία, με τέτοιον τρόπο που να μην αποτελεί αυτή άξονα συμμετρίας του συνολικού σχήματος. Στο Σχήμα Α φαίνεται ο σωστός τρόπος τοποθέτησης και στο Σχήμα Β ο ακατάλληλος τρόπος.

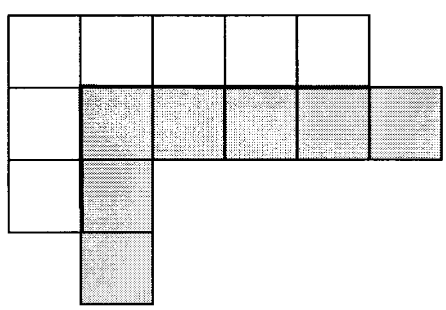


Σχήμα Α



Σχήμα Β

Η 7η ερώτηση μπορεί να γενικευθεί ως εξής: Ένα σχήμα, χωρίς κέντρο και χωρίς άξονα συμμετρίας, μπορεί να χωριστεί από μία γραμμή - όχι απαραίτητα από ευθεία γραμμή - σε δύο ίσα σχήματα; Το σχήμα που ακολουθεί, δίνει απάντηση στο ερώτημα μας.



Η τεθλασμένη γραμμή χωρίζει το αρχικό σχήμα σε δύο ίσα σχήματα. Το αρχικό σχήμα δεν έχει ούτε άξονα, ούτε κέντρο συμμετρίας. Εδώ έχουμε μία παράλληλη μεταφορά ενός σχήματος σε τέτοια θέση, που να αποκλείει την ύπαρξη άξονα ή κέντρου συμμετρίας.

Ερώτηση 8η:

Γνωρίζουμε ήδη, ότι ένα σχήμα που διαθέτει άξονα συμμετρίας, δεν είναι απαραίτητο να έχει και κέντρο συμμετρίας. Τίθεται όμως το εξής ερώτημα: Ένα σχήμα, που διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, θα έχει και κέντρο συμμετρίας;

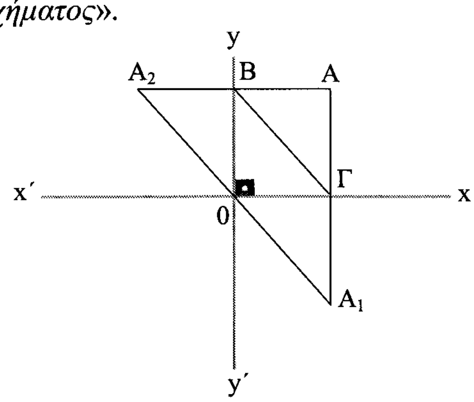
Υπόδειξη: Είναι παρατηρημένο ότι οι περισσότεροι μαθητές απαντούν θετικά στο ερώτημα αυτό, διότι εικόνες που ανακαλούν στη μνήμη τους είναι συνήθως το ορθογώνιο και ο ρόμβος, σχήματα που έχουν δύο άξονες συμμετρίας και ταυτόχρονα διαθέτουν και κέντρο συμμετρίας. Όμως, δεν είναι δύσκολο να βρούμε αντιπαραδείγματα σε αυτή την πρόταση. Ένα απλό αντιπαράδειγμα αποτελεί το ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ αυτό διαθέτει τρεις άξονες συμμετρίας, παρ' όλα αυτά δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Ένα δεύτερο αντιπαράδειγμα για το ερώτημά μας, αποτελεί το κανονικό πεντάγωνο, που κι αυτό δεν έχει κέντρο συμμετρίας, ενώ διαθέτει πέντε άξονες συμμετρίας.

Ερώτηση 9η:

Ποια σχέση πρέπει να έχουν δύο άξονες συμμετρίας ενός σχήματος, ώστε αυτό να διαθέτει και κέντρο συμμετρίας;

Υπόδειξ*η:* Γνωρίζουμε ότι αρκεί οι δύο άξονες συμμετρίας να είναι κάθετοι μεταξύ τους, για να διαθέτει το σχήμα και κέντρο συμμετρίας. Παρ' όλα αυτά η ανακάλυψη αυτής της αλήθειας δεν είναι άμεση. Απαιτείται πειραματισμός και μια σειρά δοκιμών.

Όσα ακολουθούν στη συνέχεια δεν είναι απαραίτητο να το διαβάσουν άμεσα, οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Το αναφέρουμε εδώ για λόγους πληρότητας και για όσους έχουν την περιέργεια ποια είναι η μαθηματική αιτιολόγηση της πρότασης: «*αν ένα σχήμα διαθέτει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε το σημείο τομής τους είναι το κέντρο συμμετρίας του σχήματος*».



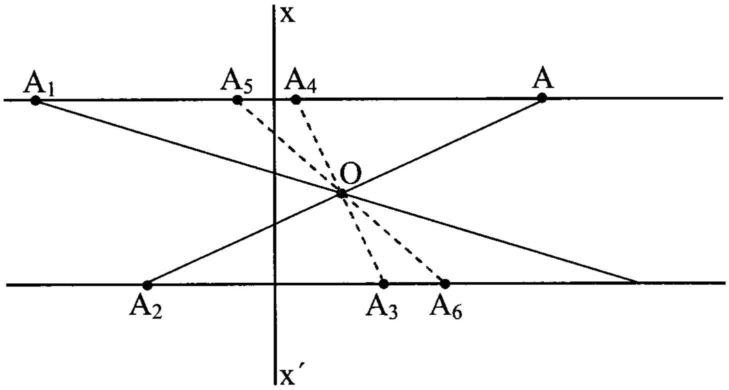
Θεωρούμε ένα σημείο Α του σχήματος και ονομάζουμε A_1, A_2 τα συμμετρικά του ως προς τους άξονες συμμετρίας xx΄ και yy΄ αντίστοιχα. Ονομάζουμε Ο το σημείο τομής των κάθετων αξόνων xx΄ και yy΄. Από τον ορισμό του άξονα συμμετρίας προκύπτει ότι τα σημεία A_1 και A_2 είναι και αυτά σημεία του σχήματος. Τα ορθογώνια τρίγωνα BOA_2 και $ΓOA_1$ είναι ίσα μεταξύ τους, ισχυρισμός ο οποίος αποδεικνύεται εύκολα. Επειδή οι γωνίες BOA_2 και $ΓOA_1$ είναι συμπληρωματικές, αυτό σημαίνει ότι τα σημεία A_1, Ο και A_2 είναι συνευθειακά και το Ο είναι το μέσον του A_1A_2. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος (A_1, A_2) σημείων του σχήματος, το Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που αυτά ορίζουν. Αυτό σημαίνει ότι το Ο είναι το κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

Επίσης, δεν είναι προς το παρόν απαραίτητο να διαβάσετε τις απαντήσεις των επόμενων ερωτήσεων.

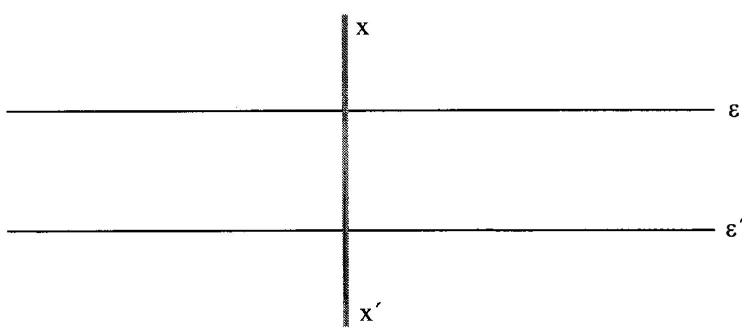
Ερώτηση 10η:

Αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας, τότε το κέντρο συμμετρίας θα βρίσκεται πάντα πάνω στον συγκεκριμένο άξονα συμμετρίας;

Υπόδειξη: Διαισθητικά φαίνεται ότι η ερώτηση έχει θετική απάντηση. Όμως, θα διαπιστώσουμε ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Πράγματι, θεωρούμε ένα σημείο Α του σχήματος, τον άξονα συμμετρίας xx΄ και το κέντρο συμμετρίας Ο, το οποίο δεν ανήκει στον xx΄.



Το συμμετρικό του Α ως προς τον xx΄ είναι το A_1, ενώ το συμμετρικό του Α ως προς το Ο είναι το A_2. Στη συνέχεια, το συμμετρικό του A_2 ως προς τον xx΄ είναι A_3, ενώ του A_3 ως προς το Ο είναι το A_4. Το συμμετρικό του A_4 ως προς τον xx΄ είναι το A_5 και το συμμετρικό του A_5 ως προς το Ο είναι το A_6. Παρατηρούμε ότι τα συμμετρικά όλων αυτών των σημείων με αφετηρία το Α, βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες. Άρα, τίποτα δεν αποκλείει να υπάρχει ένα τέτοιο σχήμα με την ιδιότητα να έχει άξονα συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας, που ανήκει πάνω σ' αυτόν. Το σχήμα που ακολουθεί, δίνει μία απάντηση στο ερώτημά μας.



Οι παράλληλες ευθείες ε και ε΄ διαθέτουν άξονα συμμετρίας τον xx΄ που είναι κάθετος σε αυτές. Ταυτόχρονα διαθέτουν και κέντρο συμμετρίας, το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο που ανήκει στην μεσοπαράλληλο ευθεία των ε και ε΄.

Αν περιοριστούμε σε κλειστά γεωμετρικά σχήματα, θα πρέπει ένα τέτοιο σχήμα που έχει άξονα και κέντρο συμμετρίας, το κέντρο συμμετρίας του να βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δεν είναι καθόλου προφανής.

Ερώτηση11η:

Αν ένα σχήμα διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας, τότε οι άξονες αυτοί είναι κάθετοι μεταξύ τους;

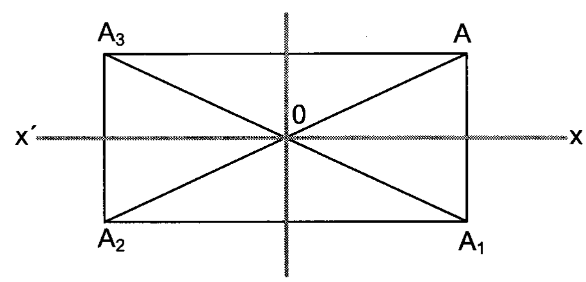
Υπόδειξη: Επιπλέον, αν δεν περιοριστούμε σε κλειστά γεωμετρικά σχήματα, η απάντηση με μορφή αντιπαραδείγματος δόθηκε στην προηγούμενη ερώτηση. Δύο παράλληλες ευθείες μπορεί να έχουν δύο άξονες συμμετρίας, που είναι μεταξύ τους παράλληλοι, και ένα ή περισσότερα κέντρα συμμετρίας, τα οποία μπορεί να ανήκουν ή όχι πάνω στους άξονες αυτούς.

Αν όμως το σχήμα είναι κλειστό, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι άξονες είναι μεταξύ τους κάθετοι και ότι το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο τομής τους, διαφορετικά θα καταλήξουμε πάλι σε ανοικτό σχήμα.

Ερώτηση 12η:

Αν ένα σχήμα έχει άξονα και κέντρο συμμετρίας, τότε αυτό διαθέτει και δεύτερο άξονα συμμετρίας;

Υπόδειξη: Η απάντηση στην ερώτηση αυτή δεν είναι προφανής, ακόμα και αν πάρουμε υπόψη μας όλα τα αντιπαραδείγματα και τα παραδείγματα που έχουν συναντήσει έως τώρα. Αν αναφερόμαστε σε κλειστό γεωμετρικό σχήμα, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι πρόκειται για θεώρημα. Στην περίπτωση που το κέντρο βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας, τότε η απόδειξη της ύπαρξης και δεύτερου άξονα, κάθετου στον πρώτο, είναι η ακόλουθη:



Θεωρούμε ένα σημείο Α του σχήματος. Έστω A_1 το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα xx′ και A_2 το συμμετρικό του Α ως προς το κέντρο συμμετρίας Ο. Αν ονομάσουμε A_3 το συμμετρικό του A_1 ως προς το Ο, τότε το τετράπλευρο $AA_1A_2A_3$ είναι ορθογώνιο, επειδή οι διαγώνιές του διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα η ευθεία που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετη στον άξονα xx′ είναι επίσης ένας άξονας συμμετρίας του σχήματος, επειδή κάθε σημείο του σχήματος, όπως το Α, έχει το συμμετρικό του σε σχέση με τον νέο άξονα πάνω στο σχήμα.

Ερώτηση 13η:

Μπορεί ένα σχήμα να έχει δύο κέντρα συμμετρίας;

Υπόδειξη: Αν το σχήμα δεν είναι κλειστό μπορεί να συμβεί αυτό. Ένα τέτοιο σχήμα είναι η ευθεία. Κάθε σημείο της ευθείας μπορεί να αποτελέσει κέντρο συμμετρίας της. Διαισθανόμαστε ότι κλειστό σχήμα με δύο κέντρα συμμετρίας δεν μπορεί να υπάρχει, αλλά ο ισχυρισμός αυτός χρειάζεται απόδειξη[2].

Ξέρουμε ότι τα κανονικά πολύγωνα είναι αυτά που έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες τους ίσες. Φαίνεται ότι όλα τα κανονικά πολύγωνα συνδέονται άμεσα με τις έννοιες «συμμετρία ως προς άξονα» και «συμμετρία ως προς κέντρο». Δύο από τα πλέον συνηθισμένα ερωτήματα που τίθενται στην τάξη είναι τα εξής.

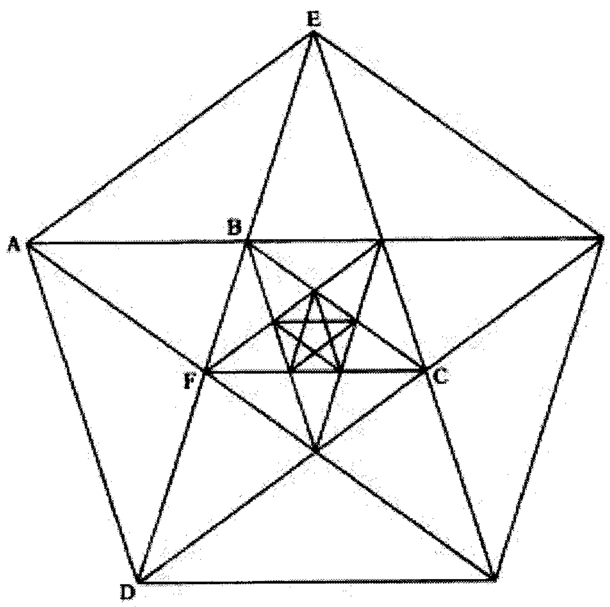
---

[2] Για την απόδειξη αυτού του ερωτήματος μπορεί να δείτε το βιβλίο Ανδρέας Πούλος «*Εικασίες και αντιπαραδείγματα. Για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στη σχολική τάξη*». Εκδόσεις Μαυρίδης, Θεσσαλονίκη, 2009.

Ερώτηση 14η:

Ποια κανονικά πολύγωνα έχουν κέντρο συμμετρίας και από τι καθορίζεται το πλήθος των αξόνων συμμετρίας τους;

Υπόδειξη: Μετά από σχετικά σύντομη διερεύνηση, πρέπει να είμαστε σε θέση να απαντήσουμε ότι κέντρο συμμετρίας διαθέτουν μόνο τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο αριθμό πλευρών, ενώ για τη δεύτερη ερώτηση απαντούν ότι το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου ισούται με το πλήθος των αξόνων συμμετρίας του.



Για παράδειγμα, το κανονικό πεντάγωνο που είναι σχεδιασμένο παραπάνω έχει 5 άξονες συμμετρίας που διέρχονται από μία κορυφή του και από το κέντρο του. Το ίδιο συμβαίνει με κάθε ένα από τα μικρότερα κανονικά πεντάγωνα που σχηματίζονται μέσα στο αρχικό.

Ερώτηση 15η:

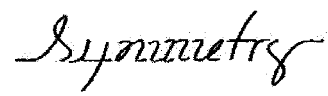
Ένα σχήμα με 3 άξονες συμμετρίας, θα είναι οπωσδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο; Αντίστοιχα, ένα σχήμα με 4 άξονες συμμετρίας, θα είναι οπωσδήποτε τετράγωνο;

Υπόδειξη: Υποψιαζόμαστε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο. Αλλά για να πεισθούμε οι ίδιοι και να πείσουμε και τους άλλους, θα πρέπει να δώσουμε παραδείγματα, τα οποία προφανώς, πρέπει να ανακαλύψουμε μόνοι μας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μία σειρά από δραστηριότητες, σχετικές με την έννοια της συμμετρίας, ορισμένες από τις οποίες θα γίνουν μέσα στην τάξη. Όσες από τις υπόλοιπες σας φαίνονται ενδιαφέρουσες, μπορείτε να ζητήσετε να δημοσιευθούν στην ιστοσελίδα του θερινού σχολείου με τα δικά σας σχόλια και παρατηρήσεις.

Δραστηριότητες

1) Βρείτε μερικές λέξεις που να έχουν άξονα συμμετρίας, όπως η λέξη ΑΛΛΑ. Παρατηρείστε ότι η καλλιγραφημένη λέξη symmetry είναι γραμμένη έτσι που να έχει κέντρο συμμετρίας. Η λέξη αυτή διαβάζετε και ανάποδα. Βρείτε στο Διαδίκτυο πληροφορίες για την κατασκευή τέτοιων λέξεων. Βρείτε πληροφορίες για τις καρκινικές επιγραφές[3].

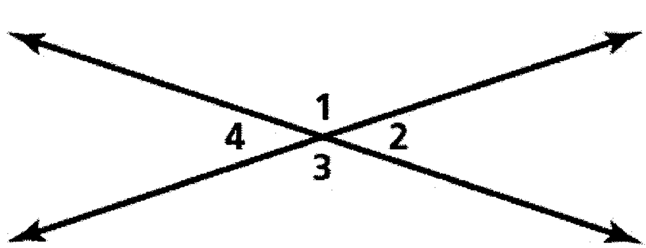


2) Να φωτογραφήσετε μερικά θέματα κατά τη διάρκεια του θερινού σχολείου που να έχουν άξονα συμμετρίας.

3) Να φωτογραφήσετε ένα θέμα κατά τη διάρκεια του θερινού σχολείου που από μόνο του να μην έχει άξονα συμμετρίας, αλλά μέσω μίας αντανάκλασης να αποκτήσει άξονα συμμετρίας, όπως η ακόλουθη φωτογραφία.

4) Να φωτογραφήσετε μερικά θέματα κατά τη διάρκεια του θερινού σχολείου που να έχει κέντρο συμμετρίας.

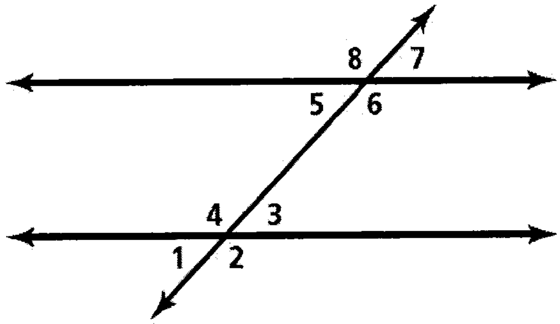
5) Αν θεωρήσουμε κάθε μία από τις γωνίες 1, 2, 3 και 4 του επόμενου σχήματος ως ένα αυτοτελές σχήμα, τότε ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας του καθενός από αυτά; Αν θεωρήσουμε τις γωνίες 1 και 3 ως ένα ενιαίο σχήμα, το ίδιο και τις γωνίες 2 και 4, τότε ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας του καθενός από τα σχήματα αυτά;



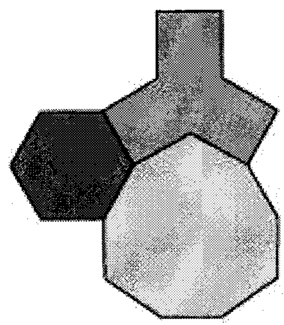
---

[3] Καρκίνος στα αρχαία Ελληνικά είναι το καβούρι. Πρόκειται για ένα όν που κινείται το σωστά και προς τις δύο κατευθύνσεις κάθετα στον άξονα συμμετρίας του.

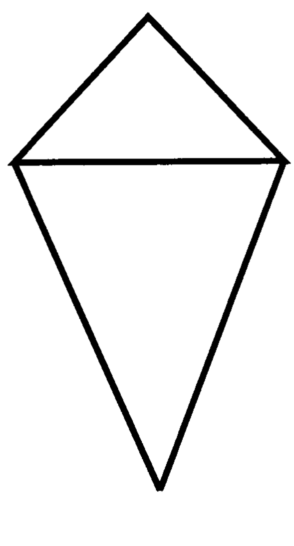
6) Στο επόμενο σχήμα με τις γωνίες που συμβολίζονται με τους αριθμούς από 1 έως και το 8, να βρείτε ζεύγη γωνιών που να έχουν άξονα ή άξονες συμμετρίας και ζεύγη γωνιών με κέντρο συμμετρίας. Αυτό θα είναι ένα και μοναδικό σημείο ή μεταβάλλεται ανάλογα με την επιλογή των γωνιών;



7) Συμπληρώστε το επόμενο σχήμα με νέα σχήματα, ώστε το τελικό σχήμα να έχει, α) άξονα συμμετρίας, β) δύο άξονες συμμετρίας, γ) κέντρο συμμετρίας.

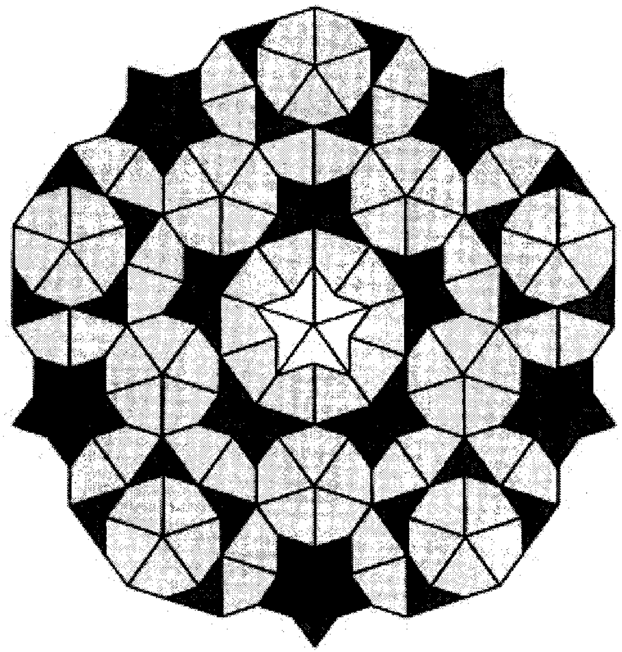


8) Κάποιος διατυπώνει τον εξής ισχυρισμό. Ένα τετράπλευρο με έναν μόνο άξονα συμμετρίας, έχει οπωσδήποτε δύο ζεύγη πλευρών ίσα και ένα ζεύγος απέναντι πλευρών ίσες. Αυτό αποτελείται από δύο ισοσκελή τρίγωνα με κοινές κορυφές, όπως το επόμενο σχήμα που μοιάζει με χαρταετό.

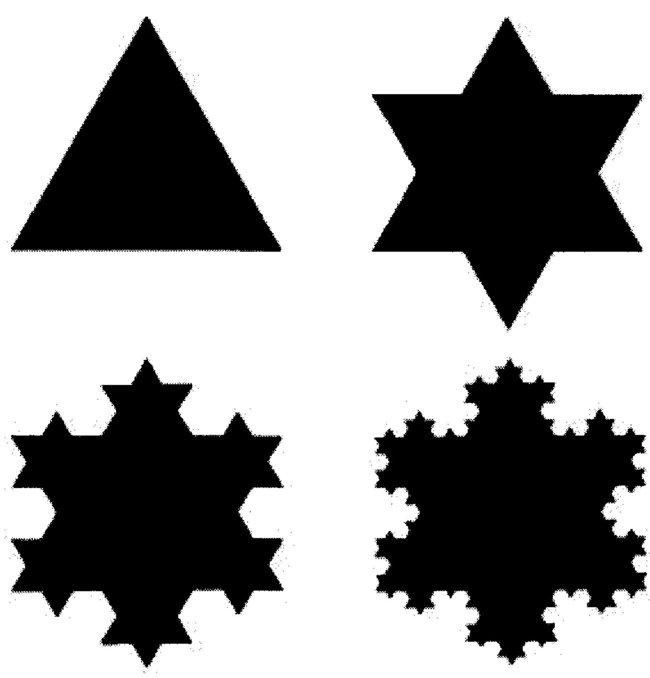


Νομίζετε ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι πάντα σωστός; Έχετε να προτείνετε κάποια άλλη εκδοχή ή αντίρρηση;

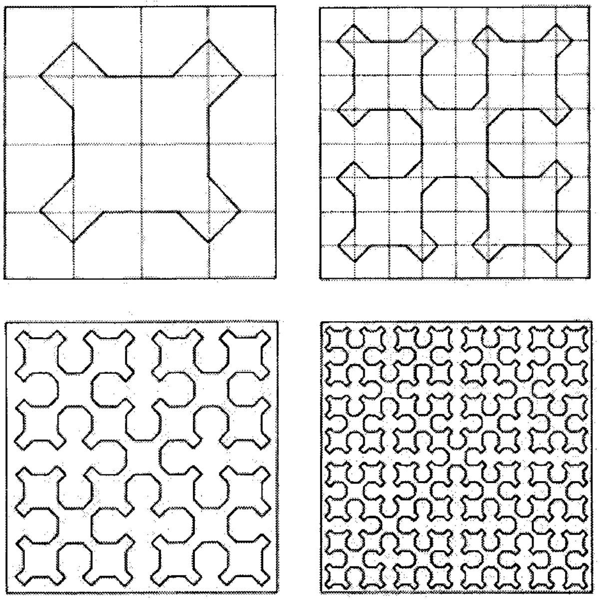
9) Μπορείτε να περιγράψετε τη διαδικασία κατασκευής του επόμενου σχήματος; Έχει σχέση αυτή η διαδικασία με τις έννοιες του άξονα και του κέντρου συμμετρίας; Αν ναι, με ποιον τρόπο αυτές χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη κατασκευή;



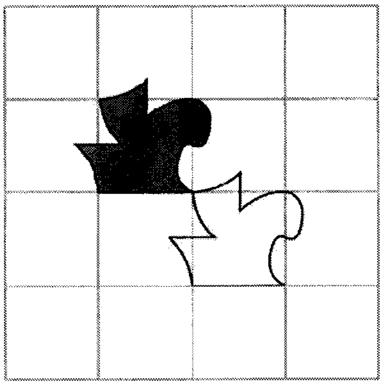
10) Τα σχήματα που εμφανίζονται παρακάτω έχουν προκύψει από το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο με κάποια διαδικασία. Να βρείτε ποιος είναι ο τρόπος παραγωγής αυτών των σχημάτων, αν έχουν άξονες συμμετρίας και να απαντήσετε στο ερώτημα, πόσους άξονες θα έχει το 10^{o} σχήμα αυτής της σειράς σχημάτων με πρώτο το ισόπλευρο τρίγωνο;



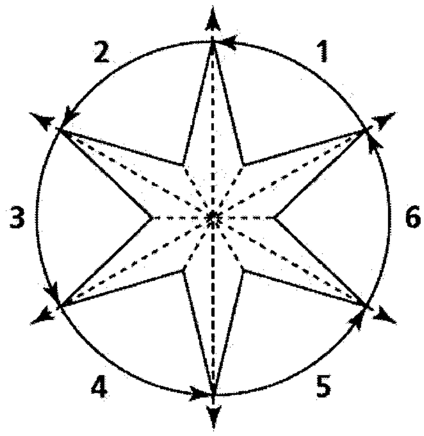
11) Να περιγράψετε τη διαδικασία κατασκευής των σχημάτων που προέρχονται από το σχήμα που βρίσκεται πάνω αριστερά. Έχουν αυτά άξονες συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας; Αν η διαδικασία αυτή συνεχιστεί, είμαστε σίγουροι ότι δεν θα υπάρχει κέντρο συμμετρίας, ή ότι το πλήθος των αξόνων συμμετρίας δεν θα αυξηθεί;



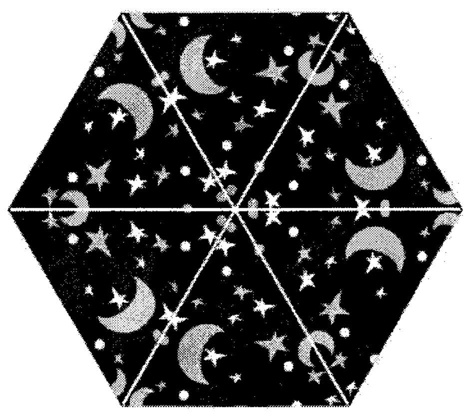
12) Το σχήμα που ακολουθεί αποτελείται από δύο σχήματα που προφανώς δεν είναι συμμετρικά, ούτε ως προς άξονα, ούτε ως προς κέντρο συμμετρίας. Μπορείτε να σχηματίζετε και άλλα σχήματα ίσα με αυτά, ώστε το τελικό σχήμα, α) να έχει κέντρο συμμετρίας, β) άξονα συμμετρίας;

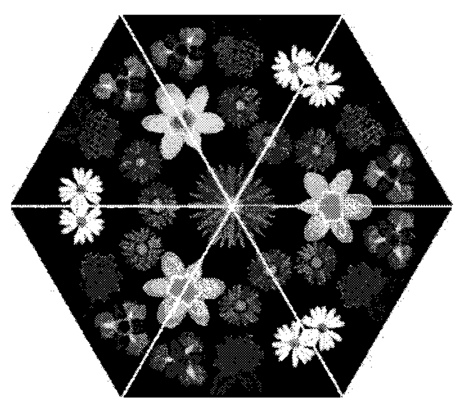


13) Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε ένα εξάγωνο αστέρι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τα έξι τόξα του κύκλου είναι ίσα και αριθμημένα. Το σχήμα διαθέτει κέντρο και έξι άξονες συμμετρίας, κατασκευάστε, α) έναν κατάλογο που να δείχνει ποιο τόξο είναι συμμετρικό ως προς το κέντρο συμμετρίας, β) έναν κατάλογο που να δείχνει ποιο τόξο είναι συμμετρικό ως προς κάθε έναν άξονα συμμετρίας, γ) έναν κατάλογο που να δίνει απαντήσεις στα ερωτήματα α) και β) όταν όμως έχουμε περιστροφή του σχήματος κατά 60° και 120°, δ) πόσες μοίρες πρέπει να περιστραφεί το αρχικό σχήμα, ώστε τα αρχικά τόξα να έχουν τα ίδια συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το κέντρο του κύκλου.

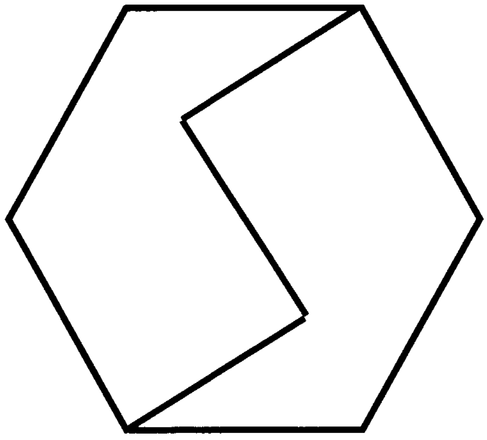


14) Οι εικόνες που ακολουθούν είναι εικόνες από ένα **καλειδοσκόπιο**. Να βρείτε πληροφορίες για το αντικείμενο αυτό, την ιστορία του, τον τρόπο κατασκευής του και τη σχέση του με την συμμετρία.





15) Το επόμενο σχήμα είναι το μισό από ένα κανονικό εξάγωνο. Να το χωρίσετε σε τρία ίσα σχήματα. Μπορεί στο χωρισμό αυτό να σας βοηθήσει η έννοια της συμμετρίας;



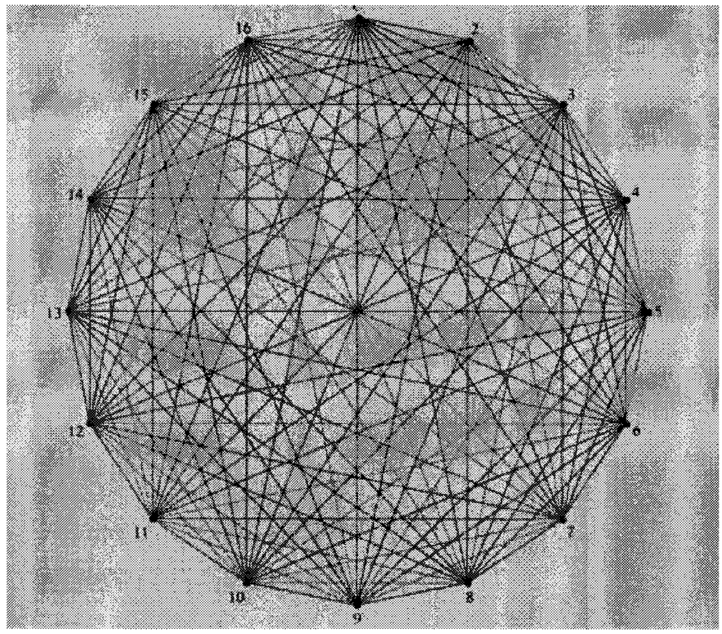
16) Η έννοια της συμμετρίας μπορεί να εμφανιστεί και στην Αριθμητική. Δείτε αυτό το ωραίο παράδειγμα. Να περιγράψετε τον κανόνα σχηματισμού αυτών των «συμμετρικών αριθμών» και μαντέψετε πόσα ψηφία θα έχει ο αριθμός στην 100^{η} γραμμή και ποιων αριθμών είναι γινόμενο.

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$111111 \times 111111 = 12345654321$$
$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$
$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$
$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

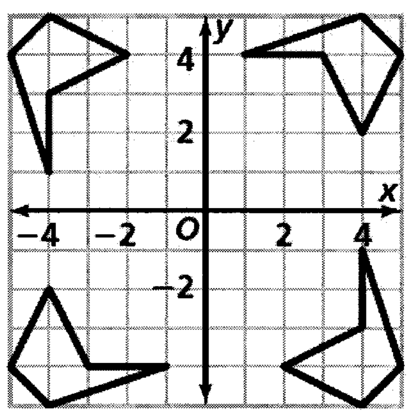
17) Το επόμενο τρίγωνο με τους αριθμούς, αν δεν υπήρχαν οι δυνάμεις, θα ήταν ένα συμμετρικό τρίγωνο αριθμών και το άθροισμα στο αριστερό μέρος θα ήταν το ίδιο με αυτό στο δεξί μέρος. Παρ' όλα αυτά, η ύπαρξη των δυνάμεων στους αντίστοιχους αριθμούς δίνει ίσα αθροίσματα. Μπορεί αυτό να συμβεί και με άλλες δυνάμεις;

$$(1)^2 = 1^3$$
$$(1+2)^2 = 1^3 + 2^3$$
$$(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$
$$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$
$$(1+2+3+4+5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$
$$(1+2+3+4+5+6)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$$
$$(1+2+3+4+5+6+7)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$$
$$(1+2+3+4+5+6+7+8)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$$
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$$

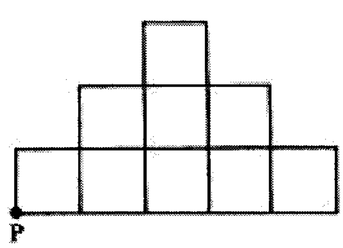
18) Το επόμενο σχήμα έχει προκύψει από την χάραξη όλων των ευθύγραμμων τμημάτων που παράγονται από 16 σημεία ενός κύκλου που ισαπέχουν μεταξύ τους. Προέρχονται δηλαδή από ένα κανονικό δεκαεξάγωνο, που είναι φανερό ότι έχει κέντρο και 16 άξονες συμμετρίας. Να βρείτε το πλήθος των τμημάτων που είναι ανά δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα (1, 2) έχει συμμετρικό το τμήμα (9, 10) και το (16, 3) έχει συμμετρικό το (8, 11). Υπάρχει κάποιος αριθμητικός κανόνας εύρεσης των συμμετρικών τμημάτων, χωρίς να κοιτάμε το σχήμα; Μπορούμε να βρούμε έναν κανόνα α) για τα συμμετρικά τμήματα που διέρχονται από το κέντρο, β) που απέχουν ίσες αποστάσεις από το κέντρο;



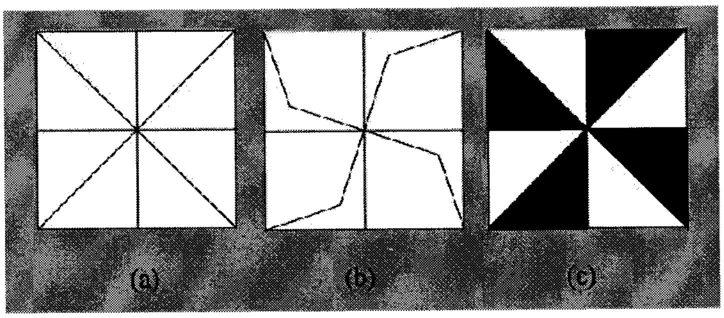
19) Η συμμετρία ενός ως προς κέντρο, μπορεί να θεωρηθεί και ως στροφή του σχήματος γύρω από ένα σημείο κατά γωνία 180°. Το πεντάπλευρο σχήμα που βρίσκεται πάνω δεξιά στο επίπεδο των συντεταγμένων, έχει συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, το σχήμα που βρίσκεται κάτω αριστερά. Να βρεθεί τι σχέση έχει με τα άλλα δύο σχήματα. Επίσης, να βρεθούν και οι σχέσεις (στροφής, ή συμμετρίας) μεταξύ όλων των σχημάτων, αν τα πάρουμε κατά δυάδες.

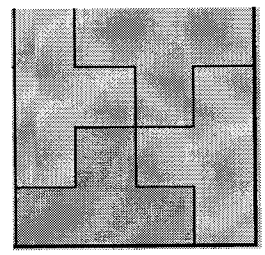


20) Να εξηγήσετε πώς θα χαράξετε μία ευθεία που να διέρχεται από το σημείο P και χωρίζει το παρακάτω σχήμα σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά. Στις ενέργειές σας έπαιξε κάποιο ρόλο η συμμετρία; Με τη βοήθεια του σχήματος αυτού να κατασκευάσετε ένα δικό σας σχήμα (περισσότερο πολύπλοκο) και να ζητήσετε από τους φίλους σας να χαράξουν μία ευθεία που να το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά σχήματα.

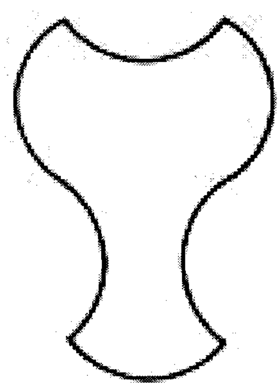


21) Οι τρεις εικόνες που ακολουθούν σας δίνουν ιδέες για να απαντήσετε στο εξής ερώτημα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε 4 ίσα σχήματα; Καλό είναι να βρείτε τουλάχιστον 10 διαφορετικούς τρόπους και να εξηγήσετε στους συμμαθητές σας, ότι οι ζητούμενοι τρόποι είναι άπειροι. Αν όμως καταφέρετε να χωρίσετε ένα τετράγωνο σε τρία ίσα σχήματα με περισσότερους από έναν τρόπο, τότε θα κερδίσετε 200 ευρώ!





22) Το παρακάτω σχήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας. Το δεδομένο αυτό μας βοηθά να χωρίσουμε εύκολα το σχήμα μας σε δύο σχήματα που να έχουν ίσο εμβαδόν. Παρατηρούμε ότι τα σχήματα αυτά θα είναι και ίσα μεταξύ τους. Βρείτε μία εξήγηση, για ποιον λόγο μπορούμε να χωρίσουμε το αρχικό σχήμα σε τέσσερα σχήματα που θα έχουν ίσο εμβαδόν, χωρίς να είναι απαραίτητο να είναι και ίσα. Μας βοηθάει η συμμετρία να χωρίσουμε το αρχικό σχήμα σε τρία σχήματα με ίσα εμβαδά, χωρίς να είναι απαραίτητα ίσα μεταξύ τους;



23) Γνωρίζουμε από το Δημοτικό σχολείο ότι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι $E=\dfrac{(\beta+\mathrm{B})\cdot\upsilon}{2}$, όπου β και Β είναι οι βάσεις του και υ το ύψος του. Με δεδομένο ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι το γινόμενο βάσης επί ύψος, να χρησιμοποιείστε την έννοια της συμμετρίας για να αποδείξετε ότι ο τύπος για το εμβαδόν τραπεζίου είναι σωστός.

24) Για να πάρετε μία ιδέα πώς οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τη συμμετρία για να επιλύουν «δύσκολα» προβλήματα, βρείτε πληροφορίες για το **πρόβλημα του Ήρωνα του Αλεξανδρινού**, ένα πρόβλημα υπολογισμού αθροίσματος ελάχιστων αποστάσεων μεταξύ δύο σημείων. Πρόκειται για μία ευφυέστατη ιδέα.

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄- Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ανδρέας Πούλος

Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

andremat@otenet.gr

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Οι βασικές γνώσεις Γεωμετρίας που πρέπει να έχουν οι μαθητές της Α' Γυμνασίου, οι οποίοι προετοιμάζονται για να αντιμετωπίσουν προβλήματα μαθηματικών διαγωνισμών, είναι αυτές που έχουν αποκτήσει στην Ε' και ΣΤ' τάξη του Δημοτικού Σχολείου. Πράγματι, δεν χρειάζεται κάποιος να ξέρει κάτι επιπλέον. Όμως, αν τα πράγματα είναι τόσο απλά, τότε γιατί μερικοί μαθητές τα καταφέρνουν πολύ καλά στην επίλυση προβλημάτων, κάποιο άλλοι είναι μέτριοι λύτες και ορισμένοι δυσκολεύονται πάρα πολύ; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν ούτε προφανής, ούτε τόσο εύκολη όσο φαίνεται.

Αυτά που είναι χρήσιμα και αποτελεσματικά για την επίλυση προβλημάτων μαθηματικών διαγωνισμών που σχετίζονται με τη Γεωμετρία σίγουρα είναι τα εξής:

1) Πρέπει να είμαστε σε θέση να κάνουμε άμεση ανάκληση των βασικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, τις οποίες όμως πρέπει προηγουμένως να τις έχουμε καταγράψει, διαβάσει και κατανοήσει.
2) Να προσέχουμε πολύ καλά κάθε λέξη που υπάρχει στη διατύπωση του γεωμετρικού προβλήματος. Είναι παρατηρημένο ότι οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις προέρχονται από την κακή κατανόηση ή ερμηνεία του κειμένου του προβλήματος.
3) Να λύνουμε όσα περισσότερα προβλήματα μπορούμε, αν και το σπουδαίο δεν είναι η ποσότητα, δηλαδή πολλά προβλήματα του ίδιου είδους, αλλά η επίλυση μιας ποικιλίας προβλημάτων που δεν συναντάμε σε σχολικά βιβλία.
4) Να συγκρατούμε τις έξυπνες ιδέες και τα «κόλπα» με τα οποία λύνονται τα «καλά» προβλήματα. Καλά προβλήματα ονομάζουμε αυτά που διαφέρουν από τα συνηθισμένα, αυτά που για να λυθούν θέλουν μια ξεχωριστή αντιμετώπιση και κάποια διαφορετική προσέγγιση.

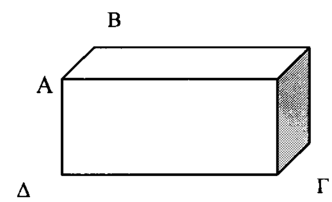
Πώς θα είμαστε σε θέση να κάνουμε άμεση ανάκληση των βασικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων; Το αναγκαίο βήμα είναι να καταγράψουμε τις βασικές ή απαραίτητες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων ώστε να απαντάμε σωστά στα ερωτήματα και να επιλύουμε τα προβλήματά μας. Στη συνέχεια πρέπει αυτές να τις διαβάζουμε συχνά.

Αυτό που κάνουμε στη συνέχεια είναι μία καταγραφή των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων που έχουμε μάθει από το Δημοτικό. Εννοείται ότι θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες των τριγώνων, των κύκλων, των παραλλήλων και κάθετων ευθειών, των παραλληλογράμμων, των τετραγώνων, των ρόμβων και των τραπεζιών, με περισσότερες λεπτομέρειες, δίνοντας μία σειρά από κατάλληλες δραστηριότητες. Το πρώτο ερώτημα που μπαίνει είναι: με ποια σειρά πρέπει να παρουσιάσουμε αυτές τις ιδιότητες, ώστε να συνδέονται μεταξύ τους για να είναι εύκολο να τις θυμόμαστε. Θεωρούμε ότι η σειρά που παρουσιάζουμε εδώ τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και των δραστηριοτήτων είναι τέτοια, που να βοηθά στην κατανόηση τους.

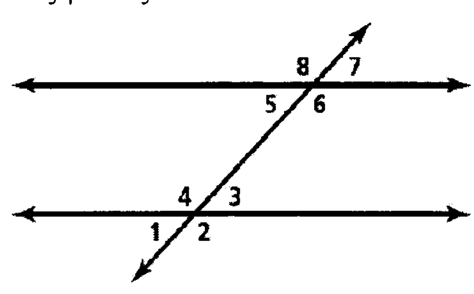
1. Οι παράλληλες ευθείες και οι ιδιότητες τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες, όταν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινά σημεία.

Συνήθως για λόγους συντομίας, όταν δύο ευθείες α, β είναι παράλληλες μεταξύ τους, τότε τις συμβολίζουμε **α // β**.
Δεν είναι σωστό να παραλείπουμε τη φράση «βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο», επειδή για παράδειγμα, οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ που διέρχονται από τις ακμές του διπλανού παραλληλεπίπεδου δεν είναι παράλληλες, αλλά ούτε έχουν κοινά σημεία.

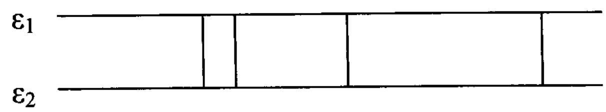


Οι παράλληλες ευθείες έχουν δύο βασικές ιδιότητες:
α) να σχηματίζουν ίσες γωνίες,
β) να διατηρούν τις αποστάσεις. Αυτά τα δύο χαρακτηριστικά πρέπει να τα θυμόμαστε καλά.
Έτσι, αν έχουμε δύο παράλληλες που τις τέμνει μία τρίτη ευθεία, όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε έχουμε και ίσες γωνίες.



Οι γωνίες με αρίθμηση 1, 3, 5 και 7 είναι ίσες ανά δύο με όποιον τρόπο κι αν τις επιλέξουμε. Αντίστοιχα, οι γωνίες με αρίθμηση 2, 4, 6 και 8 είναι επίσης ίσες. Ένας απλός τρόπος για να θυμόμαστε αυτή την πληροφορία είναι ότι, όλες οι οξείες γωνίες (του συγκεκριμένου σχήματος) είναι ίσες. Το ίδιο συμβαίνει με όλες τις αμβλείες γωνίες.

Επίσης, αν έχουμε δύο παράλληλες ευθείες, τότε οι μεταξύ τους αποστάσεις σε οποιαδήποτε θέση είναι πάντα ίσες.



Έτσι, όλες οι αποστάσεις μεταξύ των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 (στο παραπάνω σχήμα έχουμε φέρει μόνο τέσσερις από αυτές) είναι ίσες μεταξύ τους. Εννοείται ότι όταν λέμε αποστάσεις, θεωρούμε τις κάθετες αποστάσεις.

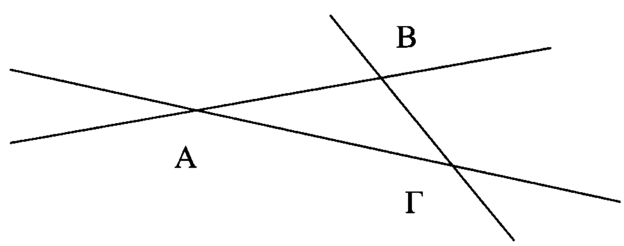
2. Οι κάθετες ευθείες και οι ιδιότητές τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο ευθείες λέγονται μεταξύ τους **κάθετες**, όταν τέμνονται και οι γωνίες που σχηματίζουν είναι όλες ίσες.
Συνήθως, για λόγους συντομίας, όταν δύο ευθείες α, β είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε γράφουμε $\alpha \perp \beta$.
Οι κάθετες ευθείες σχηματίζουν γωνίες 90^o.
Όταν δύο ευθείες α, β είναι κάθετες σε μία τρίτη ευθεία γ, τότε έχουμε α // β.
Όταν έχουμε α, β κάθετες ευθείες και α // γ, τότε $\beta \perp \gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία ευθεία λέγεται **μεσοκάθετος** σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όταν περνάει από το μέσο του ΑΒ και είναι κάθετη στην ευθεία του ΑΒ.

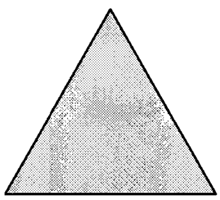
3. Τα τρίγωνα και οι ιδιότητες τους

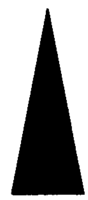
ΟΡΙΣΜΟΣ: **Τρίγωνο** λέγεται το σχήμα που ορίζεται από τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο και δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.
Το τρίγωνο καθορίζεται από τα σημεία τομής των τριών ευθειών, που τα ονομάζουμε **κορυφές του τριγώνου**. Έτσι, για παράδειγμα λέμε το τρίγωνο ΑΒΓ.

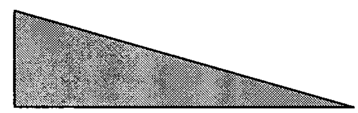


Το τρίγωνο είναι το σχήμα που τα σημεία του είναι σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ. Τα τμήματα αυτά τα λέμε **πλευρές του τριγώνου**. Συνήθως, αγνοούμε τις ευθείες που σχηματίζουν το τρίγωνο και ασχολούμαστε μόνο με τα ευθύγραμμα τμήματά τους, δηλαδή με τις πλευρές του.
Τα σημεία που είναι ανάμεσα και στις τρεις τεμνόμενες ευθείες σχηματίζουν το λεγόμενο **τριγωνικό χωρίο**.
Οι ευθείες που ορίζουν ένα τρίγωνο σχηματίζουν 3x4 = 12 γωνίες. Από αυτές οι τρεις είναι μέσα στο τριγωνικό χωρίο και λέγονται **γωνίες του τριγώνου**.
Ανάλογα με τη θέση που έχουν οι ευθείες που σχηματίζουν το τρίγωνο, έχουμε τρίγωνα με τις πλευρές όλες ίσες, τρίγωνα μόνο με δύο πλευρές ίσες και τρίγωνα με όλες τις πλευρές διαφορετικές στο μήκος. Τα τρίγωνα του κάθε είδους ονομάζονται αντίστοιχα, **ισόπλευρα**, **ισοσκελή** και **σκαληνά**.

Ανάλογα με τη θέση που έχουν οι ευθείες που σχηματίζουν το τρίγωνο, έχουμε τρίγωνα με τις γωνίες όλες ίσες, τρίγωνα μόνο με δύο γωνίες ίσες και τρίγωνα με όλες τις γωνίες διαφορετικές. Τα τρίγωνα, σε σχέση με το είδος των γωνιών τους ονομάζονται αντίστοιχα, ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά, όπως ακριβώς αυτά με το είδος των πλευρών τους. Αυτό δεν είναι παράξενο για τους εξής λόγους:
Ένα τρίγωνο με τρεις πλευρές ίσες (**ισόπλευρο**), θα έχει και τις τρεις γωνίες ίσες.
Ένα τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες (**ισοσκελές**), θα έχει και δύο γωνίες ίσες.
Ένα τρίγωνο με τρεις πλευρές άνισες (**σκαληνό**), θα έχει και τις τρεις γωνίες άνισες.





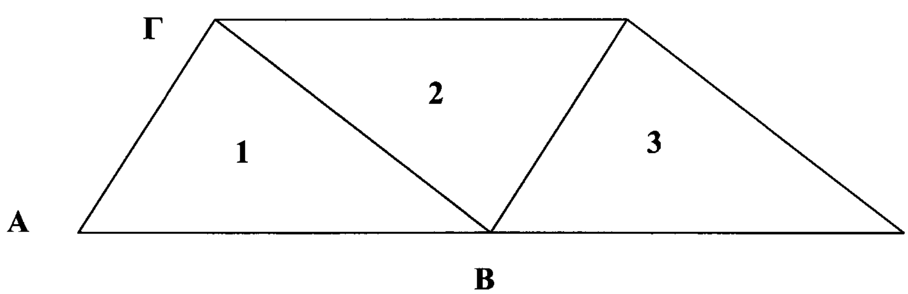


Ισόπλευρο ισοσκελές σκαληνό

Επίσης, η θέση που έχουν οι ευθείες που σχηματίζουν ένα τρίγωνο, καθορίζουν και το άνοιγμα των γωνιών του, παρότι το άθροισμα των γωνιών είναι 180^o.
Μπορεί μία από όλες να είναι 90^o. Τότε οι άλλες δύο θα είναι μικρότερες από 90^o. Ένα τέτοιο τρίγωνο το λέμε **ορθογώνιο**.
Μπορεί όλες οι γωνίες να είναι μικρότερες από 90^o. Ένα τέτοιο τρίγωνο το λέμε **οξυγώνιο**.
Μπορεί μία από τις γωνίες να είναι μεγαλύτερη από 90^o. Οπωσδήποτε, οι άλλες δύο θα είναι μικρότερες από 90^o. Ένα τέτοιο τρίγωνο το λέμε **αμβλυγώνιο**.

Το τρίγωνο είναι το απλούστερο γεωμετρικό σχήμα που σχηματίζεται από ευθείες γραμμές ή από ευθύγραμμα τμήματα που ανά δύο έχουν κοινά άκρα. Για το λόγο αυτό, αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα πολύπλοκο σχήμα που είναι κατασκευασμένο με ευθύγραμμα τμήματα, το χωρίζουμε σε τρίγωνα.

ΚΑΝΟΝΑΣ 1: Το άθροισμα των γωνιών σε κάθε τρίγωνο είναι 180^o.



Το παραπάνω σχήμα αποτελείται από τρια τρίγωνα. Το αρχικό τρίγωνο (1), το τρίγωνο (2) που είναι μία περιστροφή του τριγώνου (1) για να κολλήσει με το αρχικό και το τρίγωνο (3) που είναι παράλληλη μετακίνηση του αρχικού τριγώνου, ώστε και τα τρία τρίγωνα να έχουν κοινή κορυφή την Β. Τώρα, οι γωνίες του αρχικού τριγώνου (1) είναι ίσες με αυτές που βρίσκονται γύρω από το σημείο Β, οι οποίες είναι φανερό ότι σχηματίζουν μία ευθεία γωνία που έχει άνοιγμα 180^o.
Αυτή είναι μία προσπάθεια εξήγησης του κανόνα «*Το άθροισμα των γωνιών σε κάθε τρίγωνο είναι 180^o*», η οποία είναι εύκολη στην κατανόησή της, αλλά έχει ορισμένα κενά. Για το λόγο αυτό, δεν τη συναντάμε στα βιβλία Γεωμετρίας του Λυκείου.

ΚΑΝΟΝΑΣ 2: Το άθροισμα των γωνιών σε κάθε τετράπλευρο είναι 360^o.

Η απόδειξη αυτού του κανόνα είναι εύκολη, επειδή ένα τετράπλευρο είναι δύο τρίγωνα που τα χωρίζει η μία διαγώνιος του τετραπλεύρου. Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^o, σημαίνει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου θα είναι $2 \cdot 180^o = 360^o$.

Στα τρίγωνα χρήσιμες έννοιες είναι οι έννοιες: διάμεσος, ύψος, διχοτόμος και μεσοκάθετος τριγώνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Διάμεσος τριγώνου** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το ένα άκρο του είναι κορυφή τριγώνου και το άλλο άκρο το μέσο της απέναντι πλευράς του τριγώνου.
Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους, αφού έχει τρεις πλευρές και τρεις κορυφές.

ΚΑΝΟΝΑΣ 3: Σε κάθε τρίγωνο οι διάμεσοι περνάνε από το ίδιο σημείο που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.
Η απόδειξη αυτού του κανόνα δεν είναι εύκολη. Την απόδειξη αυτού του κανόνα την έχουν τα βιβλία της Α τάξης του Λυκείου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Διχοτόμος τριγώνου** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το ένα άκρο του είναι κορυφή τριγώνου, το άλλο άκρο σημείο της απέναντι πλευράς του τριγώνου και το τμήμα αυτό χωρίζει τη αντίστοιχη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.
Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους, αφού έχει τρεις κορυφές.

ΚΑΝΟΝΑΣ 4: Σε κάθε τρίγωνο οι διχοτόμοι περνάνε από το ίδιο σημείο που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.
Η απόδειξη αυτού του κανόνα δεν είναι εύκολη. Την απόδειξη αυτού του κανόνα την έχουν τα βιβλία της Α τάξης του Λυκείου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Ύψος τριγώνου** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το ένα άκρο του είναι κορυφή τριγώνου, το άλλο άκρο σημείο της ευθείας στην οποία βρίσκεται η απέναντι πλευρά του τριγώνου, έτσι ώστε το τμήμα αυτό να είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.
Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη, αφού έχει τρεις κορυφές.

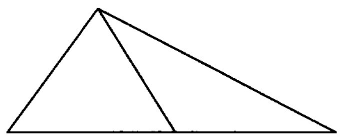
ΚΑΝΟΝΑΣ 5: Σε κάθε τρίγωνο τα ύψη του περνάνε από το ίδιο σημείο.
Η απόδειξη αυτού του κανόνα δεν είναι εύκολη. Επίσης, την απόδειξη αυτού του κανόνα την έχουν τα βιβλία της Α τάξης του Λυκείου.

Σχόλια: Θα θυμάστε ότι είναι αρκετά δύσκολο να χαράξουμε τα ύψη σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Αυτό συμβαίνει, επειδή τα δύο ύψη του βρίσκονται έξω από το τρίγωνο. Για το λόγο αυτό τα σχολικά βιβλία επιμένουν στο θέμα αυτό. Εδώ, η χαρακτηριστική «παραξενιά» του αμβλυγώνιου τριγώνου εμφανίζεται ως δραστηριότητα 4^η.

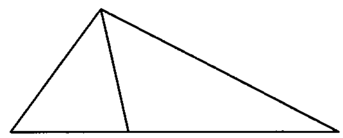
ΟΡΙΣΜΟΣ: **Μεσοκάθετος τριγώνου** είναι μία ευθεία που περνάει από το μέσο μιας πλευράς του τριγώνου και είναι κάθετη στην πλευρά αυτή.
Κάθε τρίγωνο έχει τρεις μεσοκάθετες, αφού έχει τρεις πλευρές.
ΚΑΝΟΝΑΣ 6: Σε κάθε τρίγωνο οι μεσοκάθετές του περνάνε από το ίδιο σημείο.

Η απόδειξη αυτού του κανόνα δεν είναι εύκολη. Επίσης, την απόδειξη αυτή την έχουν τα βιβλία της Α τάξης του Λυκείου.

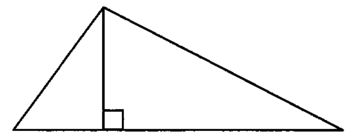
Στα περισσότερα τρίγωνα οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι, τα ύψη είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν αυτές τις διαφορές.



διάμεσος



διχοτόμος



ύψος

Επίσης, υπάρχουν τρίγωνα που το σημείο τομής των τριών υψών τους δεν βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. Σε μερικά τρίγωνα βρίσκεται πάνω σε μία πλευρά και σε κάποια άλλα (στα αμβλυγώνια) βρίσκεται έξω από το τρίγωνο. Τα ίδιο συμβαίνει με το σημείο τομής των μεσοκαθέτων.
Στη συνέχεια δίνουμε μία σειρά από δραστηριότητες που πρέπει να γίνουν για να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις ιδιότητες των διαμέσων, των διχοτόμων, των υψών και των μεσοκαθέτων των τριγώνων. Διαλέγουμε τέτοιες δραστηριότητες στις οποίες μπορούμε να εξηγήσουμε αυτό που παρατηρούμε ή στη χειρότερη περίπτωση να διαπιστώνουμε ότι συμβαίνει κάτι διαφορετικό από αυτό που αναμένουμε και η πλήρης εξήγηση (απόδειξη) μπορεί να περιμένει για αργότερα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^{η}. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο να χαράξετε α) τις τρεις διαμέσους, β) τις τρεις διχοτόμους, γ) τα τρία ύψη, δ) τις τρεις μεσοκάθετες. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτά που παρατηρείτε;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^{η}. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο να χαράξετε α) τις τρεις διαμέσους, β) τις τρεις διχοτόμους, γ) τα τρία ύψη, δ) τις τρεις μεσοκάθετες. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτά που παρατηρείτε;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3^{η}. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο να χαράξετε α) τα τρία ύψη, β) τις τρεις μεσοκάθετες. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτά που παρατηρείτε;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4^{η}. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο να χαράξετε α) τα τρία ύψη, β) τις τρεις μεσοκάθετες. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις. 1. Το αμβλυγώνιο να είναι και ισοσκελές τρίγωνο, 2. Το αμβλυγώνιο να είναι σκαληνό τρίγωνο. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτά που παρατηρείτε;

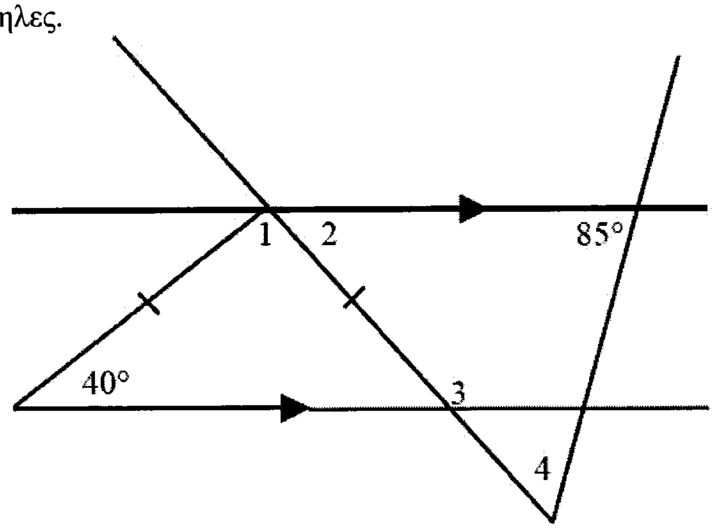
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5^{η}. Να κατασκευάσετε έναν κατάλογο με τέσσερις στήλες. Στις τρεις πρώτες στήλες θα γραφούν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ (εννοείται, πρέπει το άθροισμα τους να είναι 180^{o}). Στην τέταρτη στήλη θα γραφεί η αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ. Για να γίνει αυτό πρέπει να κάνετε ένα γεωμετρικό σχήμα και κάποιους αριθμητικούς υπολογισμούς. Επιλέγοντας πέντε περιπτώσεις τριγώνων και εκτελώντας τους σχετικούς υπολογισμούς, μπορείτε να καταλήξετε σε κάποιο συμπέρασμα; Αν αντί για τις διχοτόμους των γωνιών Β και Γ, είχαμε αυτές των γωνιών Α και Γ, θα άλλαζε κάτι στο τελικό σας συμπέρασμα;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6η. Να κατασκευάσετε έναν κατάλογο με τέσσερις στήλες. Στις τρεις πρώτες στήλες θα γραφούν οι γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην τέταρτη στήλη θα γραφεί το άνοιγμα της γωνίας ΒΟΓ, όπου Ο το σημείο τομής των υψών ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ. Έχει η γωνία αυτή κάποια σχέση με τη γωνία Α του ΑΒΓ; Για να γίνει αυτό πρέπει να κάνετε ένα γεωμετρικό σχήμα και κάποιους αριθμητικούς υπολογισμούς. Μετά από πέντε διαφορετικούς υπολογισμούς, μπορείτε να καταλήξετε σε κάποιο συμπέρασμα; Αν το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τη γωνία Α ορθή ή αμβλεία, θα άλλαζε κάτι στο τελικό σας συμπέρασμα;

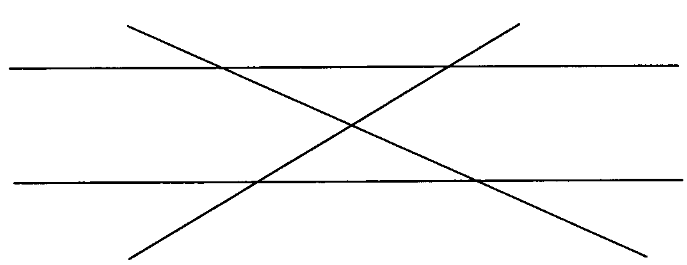
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7η. Χρησιμοποιώντας μόνο έναν διαβήτη και έναν κανόνα, δηλαδή έναν χάρακα που δεν έχει πάνω του χαραγμένες αποστάσεις, να σχεδιάσετε: α) ένα τρίγωνο ισοσκελές, β) ένα τρίγωνο ισόπλευρο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 8η. Να κατασκευάσετε έναν κατάλογο με τέσσερις στήλες. Στις τρεις πρώτες στήλες να γράψετε τις γωνίες ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Στην 4η στήλη να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει η διχοτόμος ΑΔ με το ύψος ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ. Εννοείται ότι η τέταρτη στήλη θα συμπληρωθεί μετά από υπολογισμούς σε τρίγωνα που υποτίθεται ότι γνωρίζουμε τις γωνίες τους. Αυτή η διαδικασία να γίνει για τέσσερα διαφορετικά τρίγωνα. Έχει κάποια σχέση η γωνία ΔΑΕ με τις γωνίες Β και Γ του αρχικού τριγώνου;

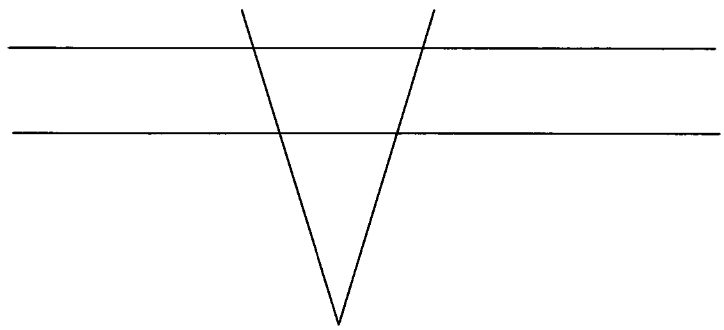
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 9η. Θυμηθείτε την ιδιότητα των παραλλήλων ευθειών να σχηματίζουν ίσες γωνίες και το άθροισμα των γωνιών τριγώνου για να υπολογίσετε όλες τις γωνίες στο παρακάτω σχήμα, με δεδομένο ότι οι οριζόντιες ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 10η. Στο παρακάτω σχήμα οι οριζόντιες ευθείες είναι παράλληλες. Σε πόσες από τις γωνίες του σχήματος μπορούμε να βάλουμε δικά μας δεδομένα π.χ. 45°, ώστε να μην έχουμε παράξενα αποτελέσματα, για παράδειγμα, οι γωνίες γύρω από ένα σημείο να έχουν άθροισμα 340°, αφού γνωρίζουμε ότι το σωστό είναι 360° ή το άθροισμα των γωνιών σε κάποιο από τα δύο τρίγωνα να είναι 190°.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 11η. Στο παρακάτω σχήμα οι οριζόντιες ευθείες είναι παράλληλες και το μικρό τρίγωνο με κορυφή του Ο είναι ισοσκελές. Να εξηγήσετε α) γιατί το μεγαλύτερο τρίγωνο με κορυφή το Ο είναι κι αυτό ισοσκελές, β) γιατί το τετράπλευρο στο σχήμα είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Υπόδειξη: Ως πρώτο βήμα να υποθέσετε ότι ξέρετε τη γωνία Ο π.χ. είναι 40^o και μετά να κάνετε να τους απαραίτητους υπολογισμούς για να πετύχετε το σκοπό σας.



Ο

4. Ο κύκλος και οι ιδιότητές του

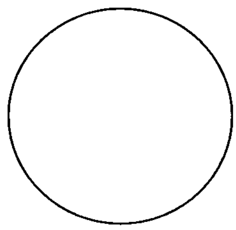
ΟΡΙΣΜΟΣ: **Κύκλος** λέγεται εκείνο το γεωμετρικό σχήμα που τα σημεία του είναι όλα σε ένα επίπεδο και μόνον αυτά απέχουν σταθερή απόσταση από ένα συγκεκριμένο σημείο.

Παρατηρείστε, ότι ο παραπάνω ορισμός του κύκλου είναι λίγο διαφορετικός από αυτόν που υπάρχει σε μερικά βιβλία. Η ακριβολογία είναι ένα τρόπος να μιλάνε δύο ή περισσότεροι άνθρωποι για κάποιο θέμα, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος να καταλαβαίνει ο καθένας διαφορετικά πράγματα. Για παράδειγμα, αν έλλειπε η φράση «*τα σημεία του είναι όλα σε ένα επίπεδο*», τότε κάποιος μπορούσε να πει ότι μία μπάλα (σφαίρα) είναι ένας κύκλος, αφού όλα τα σημεία της απέχουν το ίδιο από το κέντρο της. Εμείς δεν το θέλουμε αυτό, έχουμε διαφορετικό ορισμό για τη σφαίρα, η οποία δεν είναι επίπεδο σχήμα, αλλά στερεό. Επίσης, αν έλλειπε η φράση «*τα σημεία του ... και μόνον αυτά*», τότε και ένα κομμάτι κύκλου δηλ. ένα τόξο θα ήταν ο κύκλος. Επίσης, αν έλλειπε αυτή η φράση, τότε 30 σημεία τοποθετημένα «κυκλικά» θα ήταν ένας κύκλος, αφού οι υπόλοιπες προϋποθέσεις ικανοποιούνται, είναι σημεία στο ίδιο επίπεδο και απέχουν την ίδια απόσταση από ένα συγκεκριμένο σημείο.

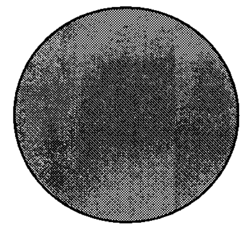
Παρατηρούμε ότι για είναι πλήρως καθορισμένος ένας κύκλος χρειάζεται να ξέρουμε το συγκεκριμένο σημείο από το οποίο ισαπέχουν τα σημεία του κύκλου και τη σταθερή απόσταση. Το συγκεκριμένο σημείο ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου και η σταθερή απόσταση ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου. Αυτός ο ορισμός της ακτίνας είναι αριθμητικός, δηλαδή είναι ένας αριθμός. Ένας άλλος ορισμός της ακτίνας είναι ο εξής: «*ακτίνα είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το ένα του άκρο είναι το κέντρο του κύκλου και το άλλο της άκρο ένα σημείο του κύκλου*». Επειδή ο κύκλος έχει άπειρα σημεία, έχει και άπειρες ακτίνες. Αυτές είναι ευθύγραμμα τμήμα με ίσο μήκος.

Συμβολισμός: Όταν γράφουμε (Α, 5) ή **(Ο, ρ)**, σημαίνει κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα μήκους 5μ και αντίστοιχα κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ.

Ο κύκλος είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που τα σημεία του ισαπέχουν όλα από το κέντρο του, δεν πρέπει να το μπερδεύουμε με το σχήμα που τα σημεία του βρίσκονται μέσα στον κύκλο, το σχήμα αυτό λέγεται κυκλικός δίσκος και έχει πολύ περισσότερα σημεία από τον αντίστοιχο κύκλο. Στον κυκλικό δίσκο περιέχεται και ο κύκλος.



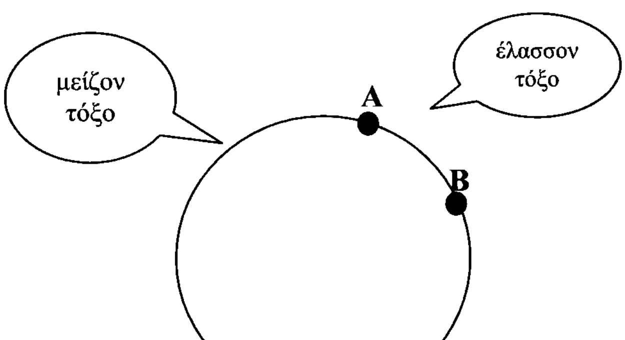
κύκλος

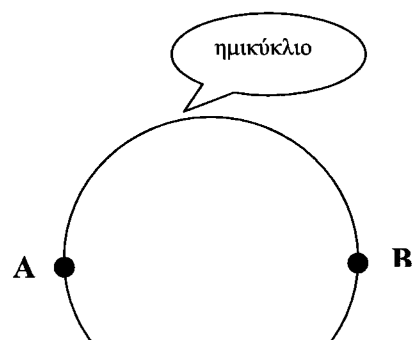


κυκλικός δίσκος

Χορδή κύκλου ονομάζουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου. Προφανώς, ένας κύκλος έχει άπειρες χορδές, το μήκος τους όμως δεν είναι σταθερό, καθορίζεται από τη θέση των άκρων τους. Μία χορδή που περνάει από το κέντρο ενός κύκλου έχει ειδικό όνομα, λέγεται **διάμετρος του κύκλου**. Οι διάμετροι ενός κύκλου είναι άπειρες, αλλά όλες έχουν το ίδιο μήκος. Το μήκος τους είναι ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας του συγκεκριμένου κύκλου.

Τόξο ενός κύκλου είναι ένα κομμάτι του κύκλου που καθορίζεται από δύο σημεία του. Παρατηρούμε ότι δύο σημεία ενός κύκλου ορίζουν δύο τόξα, ένα μικρότερο που το λέμε **έλασσον τόξο** και ένα μεγαλύτερο που το λέμε **μείζον τόξο**. Αν τα σημεία που ορίζουν ένα τόξο είναι σημεία μιας διαμέτρου, τότε δεν έχουμε δύο τόξα άνισα, άλλα ίσα που τα λέμε **ημικύκλια**.





Σύγκριση δύο τόξων.

Επειδή τα τόξα ενός κύκλου είναι καμπύλα και όχι ευθύγραμμα, δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε με διαβήτη ή με χάρακα. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε δύο άλλους τρόπους.

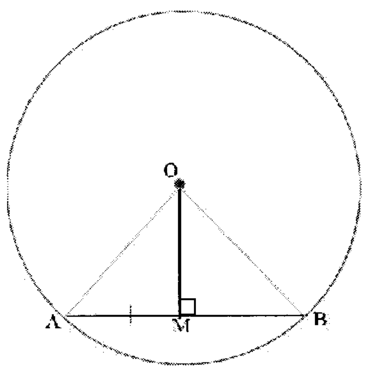
$1^{ος}$ τρόπος σύγκρισης τόξων. Για να συγκρίνουμε δύο ελάσσονα τόξα ενός κύκλου συγκρίνουμε τις αντίστοιχες χορδές τους. Στο μεγαλύτερο τόξο αντιστοιχεί η μεγαλύτερη χορδή. Επίσης, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.

$2^{ος}$ τρόπος σύγκρισης τόξων. Για να συγκρίνουμε δύο ελάσσονα τόξα ενός κύκλου συγκρίνουμε τις αντίστοιχες γωνίες που έχουν κορυφή το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές τους περνάνε από τα άκρα των τόξων. Οι γωνίες αυτές λέγονται **επίκεντρες.** Στο μεγαλύτερο τόξο αντιστοιχεί η μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία. Επίσης, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες.

Επειδή καθορίζουμε το μέγεθος ενός τόξου από το άνοιγμα της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, για το λόγο αυτό μερικές φορές λέμε π.χ. τόξο 45^o και εννοούμε τόξο στο οποίο αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία 45^o.

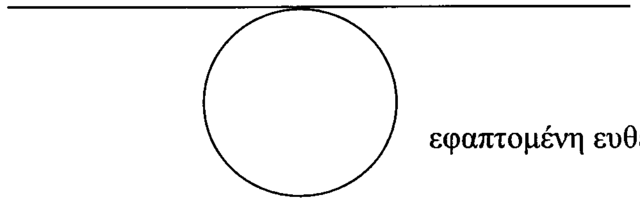
Χρήσιμες παρατηρήσεις:

Κάθε χορδή κύκλου ορίζει σε αυτόν δύο τόξα, αν δεν είναι διάμετρος, τότε έχουμε έλασσον και μείζον τόξο. Η διάμετρος κύκλου ορίζει σε αυτόν δύο ημικύκλια.
Αν σε μία χορδή κύκλου φέρουμε τις ακτίνες στα άκρα της, τότε έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Αυτό σημαίνει ότι αν ενώσουμε το κέντρο του κύκλου με το μέσο της χορδής, το τμήμα αυτό είναι κάθετο στη χορδή και ονομάζεται **απόστημα της χορδής**. Την ιδιότητα αυτή την έχουμε αναφέρει στα ισοσκελή τρίγωνα, το ύψος, η διάμεσος, η διχοτόμος και η μεσοκάθετος προς τη βάση ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν. Επιπλέον, αν προεκτείνουμε την ΟΜ στο παρακάτω σχήμα, τότε αυτή θα περάσει από το μέσο του ελάσσονος τόξου ΑΒ.



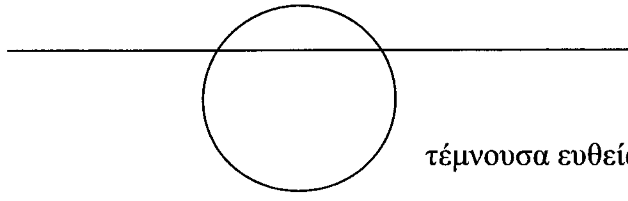
ΚΑΝΟΝΑΣ 1: Το απόστημα μιας χορδής κύκλου είναι κάθετο στη χορδή, περνάει από το μέσο της χορδής και η προέκταση του και προς τις δύο κατευθύνσεις, διέρχεται από το μέσο του ελάσσονος και του μείζονος τόξου, αντίστοιχα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία ευθεία θα λέγεται **εφαπτομένη** σε έναν κύκλο, όταν έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτόν. Το κοινό σημείο της εφαπτομένης ευθείας και του κύκλου ονομάζεται **σημείο επαφής**.



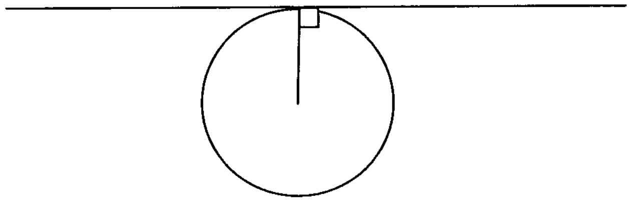
εφαπτομένη ευθεία ενός κύκλου

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία ευθεία θα λέγεται **τέμνουσα** ενός κύκλου, όταν έχει μόνο δύο κοινά σημεία με αυτόν. Τα κοινά σημεία της τέμνουσας και του κύκλου ονομάζονται **σημεία τομής**.

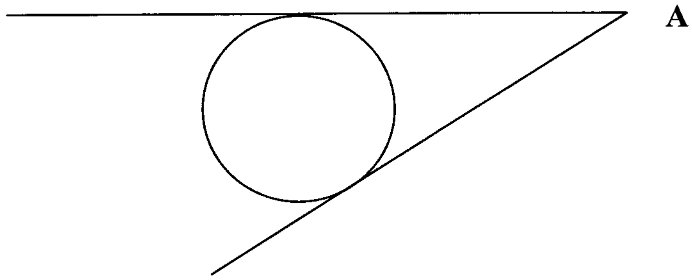


τέμνουσα ευθεία ενός κύκλου

ΚΑΝΟΝΑΣ 2: Μία εφαπτομένη ευθεία είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που έχει άκρο το σημείο επαφής τους.



ΚΑΝΟΝΑΣ 3: Από ένα σημείο Α που βρίσκεται έξω από έναν κύκλο διέρχονται δύο εφαπτόμενες ευθείες. Οι αποστάσεις από το σημείο Α έως τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών είναι ίσες.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 12η. Σχεδιάστε δύο κύκλους που έχουν δύο κοινά σημεία. Πόσες εφαπτόμενες ευθείες είναι κοινές (οι ίδιες) και στους δύο κύκλους. Αν οι δύο κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες, τι σχέση έχουν οι κοινές τους εφαπτόμενες ευθείες; Τι σχέση έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία επαφής;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 13η. Σχεδιάστε δύο κύκλους που δεν έχουν κοινά σημεία και το κέντρο του ενός δεν είναι μέσα στον άλλο κύκλο. Πόσες εφαπτόμενες ευθείες είναι κοινές (οι ίδιες) και στους δύο κύκλους. Αν οι δύο κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο, τότε αλλάζει ο αριθμός των κοινών τους εφαπτόμενων ευθειών; Ποια είναι η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες ευθείες που περιέχει τα σημεία επαφής;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 14η. Από ένα σημείο Α που βρίσκεται έξω από έναν κύκλο να χαράξετε τις δύο εφαπτόμενες ευθείες που εφάπτονται στα σημεία Β και Γ του κύκλου αντίστοιχα. Να βρείτε τη σχέση της γωνίας ΒΑΓ και του ελάσσονος τόξου ΒΓ, ή ποιο σωστά τη σχέση της γωνίας ΒΑΓ και της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο έλασσον τόξο ΒΓ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 15η. Έχουμε έναν δεδομένο κύκλο. Πώς θα βρείτε ένα σημείο Α εκτός του κύκλου, από το οποίο οι δύο εφαπτόμενες ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους; Γνωρίζετε να χαράσσετε παράλληλες και κάθετες ευθείες και ίσα ευθύγραμμα τμήματα με τον διαβήτη.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 16η. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Οι δύο κύκλοι ως ενιαίο σχήμα έχουν άξονα συμμετρίας; Σε ποια περίπτωση θα είχε δύο άξονες συμμετρίας; Μπορείτε να περιγράψετε τη μεσοκάθετο ευθεία του τμήματος ΑΒ;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 17η. Να χρησιμοποιήσετε μόνο τον διαβήτη και τον κανόνα για να κατασκευάσετε α) ένα ισοσκελές τρίγωνο, β) ένα ισόπλευρο τρίγωνο, γ) ένα τρίγωνο που οι πλευρές του να έχουν μήκος 3δ , 4δ και 5δ, όπου δ ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Για ποιο λόγο, δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο που οι πλευρές του να έχουν μήκος 3δ , 4δ και 7δ, όπου δ ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 18η. Γνωρίζουμε ότι ένα δεδομένο τμήμα ΑΒ είναι η χορδή ενός κύκλου και ότι το απόστημα της χορδής έχει μήκος διπλάσιο από αυτό του ΑΒ. Μπορείτε να χαράξετε τον κύκλο, μόνο με διαβήτη και κανόνα;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 19η. Από έναν κύκλο έχει σβηστεί το κέντρο του. Να το εντοπίσετε, χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και κανόνα κάνοντας τους κατάλληλους χειρισμούς. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χειρισμών που κάνατε για να πετύχετε το σκοπό σας;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 20η. Στο σημείο Α ενός κύκλου (Ο, α) φέρουμε την εφαπτομένη του. Πάνω στην εφαπτομένη να πάρετε ένα σημείο Β, ώστε ΑΒ = α. Η ευθεία ΒΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των τόξων ΓΔ, ΓΑ και ΑΔ. Αν παίρναμε το σημείο Β σε τέτοια θέση ώστε ΑΒ = 3α, για ποιον λόγο δεν μπορούμε να βρούμε κάποια σχέση μεταξύ των γωνιών του σχήματος, άρα και μεταξύ των τόξων του;

5. Τα παραλληλόγραμμα και οι ιδιότητές τους

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Παραλληλόγραμμο** είναι κάθε τετράπλευρο που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

ΚΑΝΟΝΑΣ 1: Στα παραλληλόγραμμα οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

ΚΑΝΟΝΑΣ 2: Στα παραλληλόγραμμα οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

ΚΑΝΟΝΑΣ 3: Στα παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες τέμνονται σε ένα σημείο που είναι το μέσο της κάθε μιας από αυτές.

ΚΑΝΟΝΑΣ 4: Κάθε τετράπλευρο με τις απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΑΝΟΝΑΣ 5: Κάθε τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

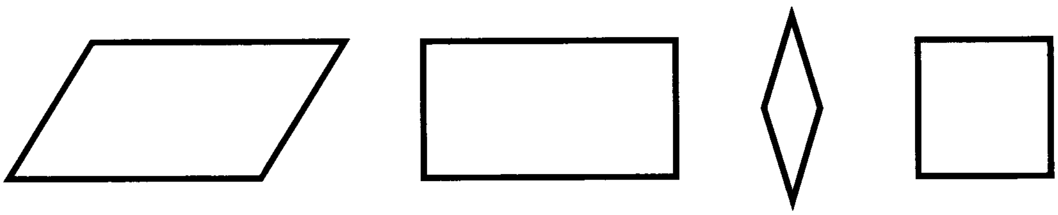
ΚΑΝΟΝΑΣ 6: Κάθε τετράπλευρο με ένα ζεύγος πλευρών ίσες και ταυτόχρονα παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΑΝΟΝΑΣ 7: Κάθε τετράπλευρο που οι διαγώνιές του έχουν το ίδιο μέσο, είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΑΝΟΝΑΣ 8: Κάθε τετράπλευρο με κέντρο συμμετρίας είναι παραλληλόγραμμο.

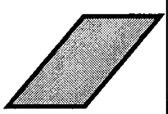
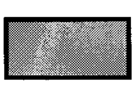
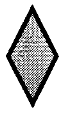
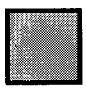
Δεν είναι απαραίτητο σε ένα παραλληλόγραμμο όλες οι γωνίες του να είναι ίσες. Αν όμως αυτό συμβαίνει, τότε η κάθε μία θα είναι 90^o, επειδή ξέρουμε ότι το άθροισμα

των γωνιών σε κάθε τετράπλευρο είναι 360^o. Ένα παραλληλόγραμμο με κάθε γωνία 90^o λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο**.
Δεν είναι απαραίτητο σε ένα παραλληλόγραμμο όλες οι πλευρές του να είναι ίσες, το σίγουρο είναι ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Αν όμως συμβαίνει όλες οι πλευρές του να είναι ίσες, τότε αυτό λέγεται **ρόμβος**.
Αν έχουμε έναν ρόμβο που έχει τις γωνίες από 90^o, τότε το σχήμα αυτό το ονομάζουμε **τετράγωνο**.

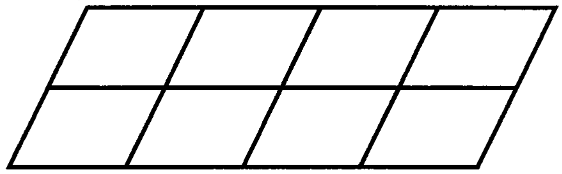


παραλληλόγραμμο ορθογώνιο ρόμβος τετράγωνο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 21η: Συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και σε κάθε κουτάκι να βάλετε ένα ΝΑΙ ή ένα ΟΧΙ. Για κάθε απάντηση να έχετε και μία αιτιολόγηση. Να συγκρίνετε τις απαντήσεις με αυτές άλλων συμμαθητών σας. Αν υπάρχουν διαφορετικές απαντήσεις, προσπαθήστε να τους πείσετε ότι έχετε δίκαιο και να ακούσετε τα δικά τους επιχειρήματα.

Είδος Σχήματος	Ίσες πλευρές όλες	Ίσες πλευρές ανά δύο	Ίσες γωνίες όλες	Ίσες γωνίες ανά δύο	Ίσες διαγώνιες	Διαγώνιες τέμνονται στη μέση	Άξονας συμμετρίας	Κέντρο συμμετρίας
								
								
								
								

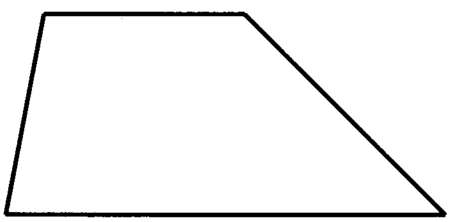
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 22η: Το επόμενο σχήμα αποτελείται από 8 μικρά παραλληλόγραμμα. Όμως, στο σχήμα αυτό υπάρχουν και άλλα παραλληλόγραμμα. Να βρείτε πόσα είναι αυτά. Αν είχαμε 12 μικρά παραλληλόγραμμα τοποθετημένα πάλι σε δύο σειρές, πόσα άλλα παραλληλόγραμμα είναι κρυμμένα στο σχήμα; Υπάρχει τρόπος να βρίσκουμε το πλήθος των κρυμμένων παραλληλογράμμων, όταν γνωρίζουμε πόσα είναι τα αρχικά – φανερά – παραλληλόγραμμα;



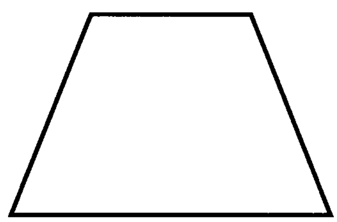
6. Τα τραπέζια και οι ιδιότητές τους

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα τετράπλευρο ονομάζεται **τραπέζιο**, όταν έχει μόνο ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες. Αυτές οι παράλληλες πλευρές λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

Ένα τραπέζιο μπορεί να έχει ένα ζεύγος πλευρών ίσες. Το τραπέζιο αυτό λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**. Προφανώς, οι βάσεις ενός τραπεζίου δεν μπορεί να είναι ίσες, επειδή αυτό θα ήταν παραλληλόγραμμο και όχι τραπέζιο.



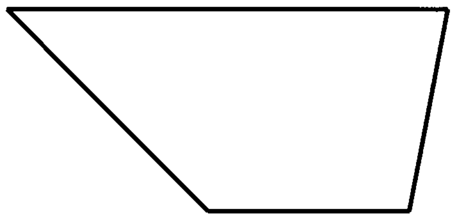
τραπέζιο



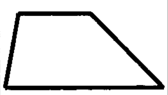
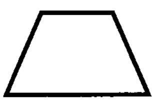
ισοσκελές τραπέζιο

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Ύψος ενός τραπεζίου**, ονομάζουμε την απόσταση μεταξύ των βάσεών του. Συνήθως, τα ύψη τραπεζίου τα σχεδιάζουμε ώστε το ένα τους άκρο να είναι μία από τις τέσσερις κορυφές του τραπεζίου. Όμως, μπορούμε για ύψος να πάρουμε ένα οποιοδήποτε τμήμα με άκρα πάνω στις βάσεις, αρκεί να είναι κάθετο σε αυτές.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 23η: Δίνονται 4 τραπέζια όπως το παρακάτω. Να τα τοποθετήσετε με τέτοιον τρόπο, ώστε να σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο.

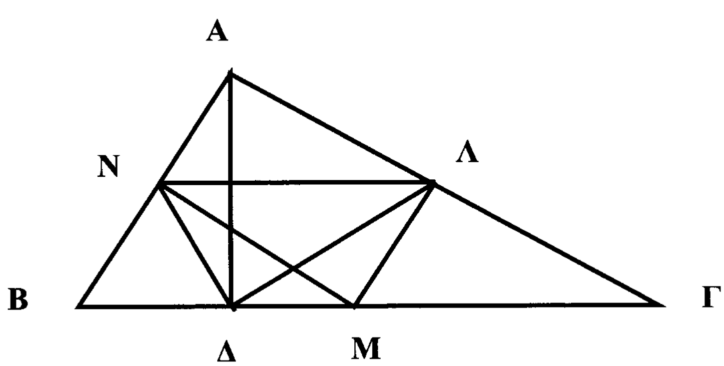


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 24η: Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και σε κάθε κουτάκι να βάλετε ένα ΝΑΙ ή ένα ΟΧΙ. Το πρώτο σχήμα είναι τυχαίο τραπέζιο και το δεύτερο σχήμα είναι ισοσκελές τραπέζιο. Για κάθε απάντηση να έχετε και μία αιτιολόγηση. Να συγκρίνετε τις απαντήσεις με αυτές άλλων συμμαθητών σας. Αν υπάρχουν διαφορετικές απαντήσεις, προσπαθήστε να τους πείσετε ότι έχετε δίκαιο και να ακούσετε τα δικά τους επιχειρήματα.

Είδος Σχήματος	Ίσες πλευρές όλες	Δύο πλευρές ίσες	Ίσες γωνίες όλες	Ίσες γωνίες ανά δύο	Ίσες διαγώνιες	Διαγώνιες τέμνονται στη μέση	Άξονας συμμετρίας	Κέντρο συμμετρίας
								
								

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 25η: Να χαράξετε τις μεσοκαθέτους όλων των πλευρών ενός ισοσκελούς τραπεζίου. Αν αυτές χαραχθούν σωστά, θα διαπιστώσετε ότι όλες περνάνε από το ίδιο σημείο. Το δεδομένο αυτό μας δείχνει ότι υπάρχει κάποιος κύκλος που περνάει από όλες τις κορυφές του ισοσκελούς τραπεζίου, ή χρειαζόμαστε και άλλες πληροφορίες για να βγάλουμε σίγουρο συμπέρασμα;

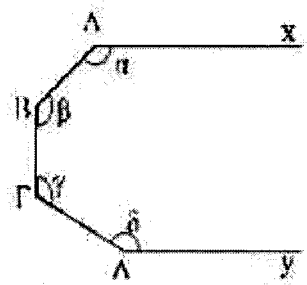
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 26η: Στο επόμενο σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία Ν, Μ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) να βρείτε πόσα ορθογώνια τρίγωνα υπάρχουν στο σχήμα, β) πόσα ισοσκελή τρίγωνα, γ) πόσα παραλληλόγραμμα, δ) πόσα τραπέζια, ε) πόσα τρίγωνα κάθε είδους, στ) πόσα τετράπλευρα κάθε είδους.



ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟ ΘΑΛΗΣ ΓΙΑ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ ΤΟΥ 1998 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Στο σχήμα,



όπου η ευθεία Αx είναι παράλληλη προς την Δy, να υπολογισθεί το άθροισμα των γωνιών α, β, γ και δ.

ΘΕΜΑ ΤΟΥ 1999 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι:

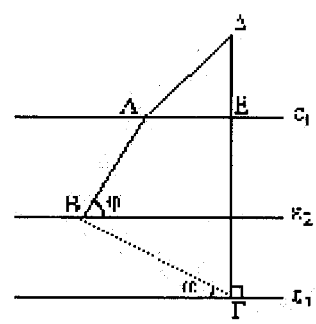
i. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$

ii. $ΓΔ \perp \varepsilon_3$

iii. ΑΕ = ΕΔ

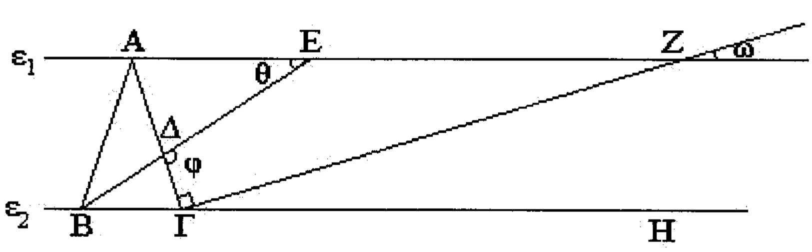
iv. $\hat{\omega} = 30°$ και $\hat{\varphi} = 50°$.

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2000 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3.



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται:

(α) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

(β) ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ) με $Β\hat{Α}Γ = 20°$

(γ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$

(δ) $ΓΖ \perp ΑΓ$

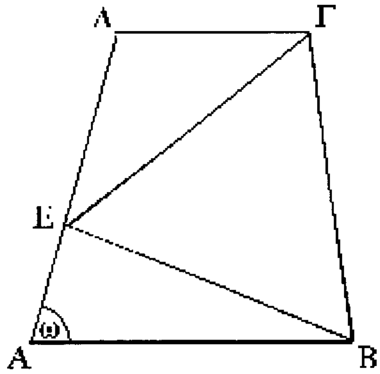
Να βρείτε τις γωνίες $\varphi = Γ\hat{Δ}Ε$, $\theta = Α\hat{Ε}Δ$ και ω.

Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες ΒΕ και ΓΖ δεν είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2001 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην πλευρά του ΑΔ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΒΕΓ να είναι ισόπλευρο και τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΓΔΕ να είναι ισοσκελή, με ΑΒ=ΒΕ και ΔΓ=ΔΕ.

Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΑΔ=ω

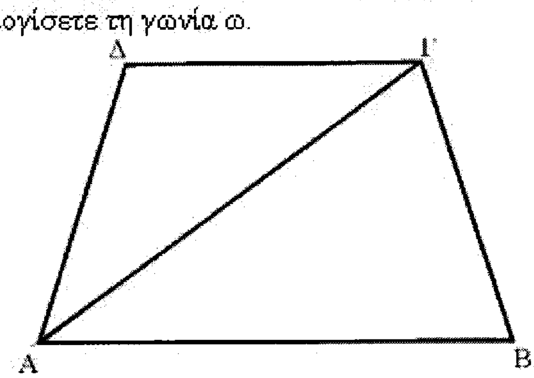


ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2003 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3. Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ∥ΓΔ), δίνεται ότι $\widehat{\Delta A B}=\widehat{AB\Gamma}=\omega$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ=ΓΔ.

(ι) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta A B}$.

(ιι) Να υπολογίσετε τη γωνία ω.

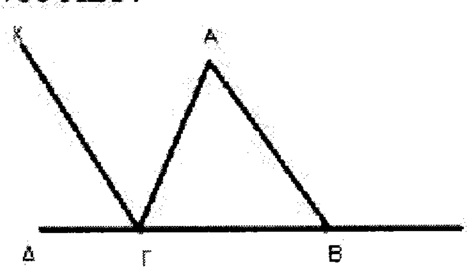


ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2005 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Έστω ΧÔΥ μια γωνία 70^0, ΟΑ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της ΟΧ και ΟΒ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της ΟΥ. Να υπολογισθούν τα μέτρα των γωνιών ΑÔΒ, ΑÔΥ και ΒÔΧ.

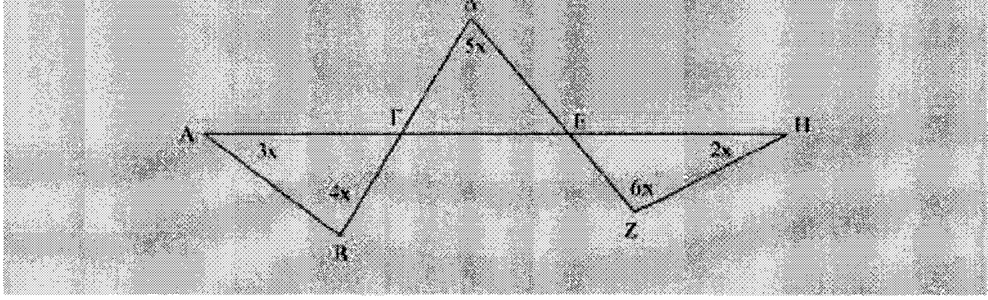
ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2006

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2006 ΓΙΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



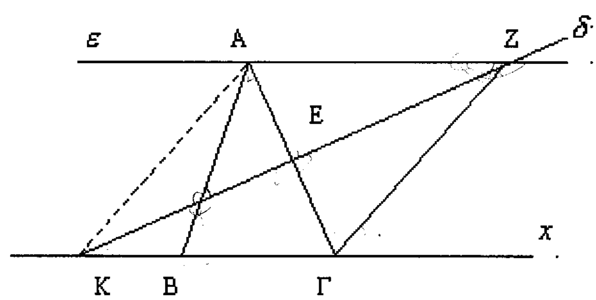
ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2007 ΓΙΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.



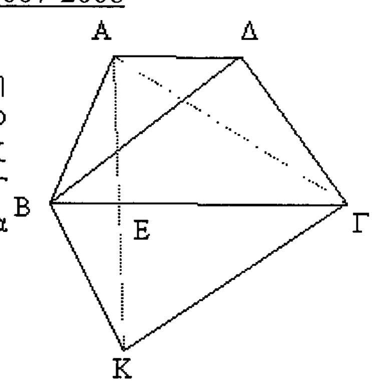
4^{o} ΘΕΜΑ ΘΑΛΗ Β Γυμνασίου 2007-2008

Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300 cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και

(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.

ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄- Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ανδρέας Πούλος

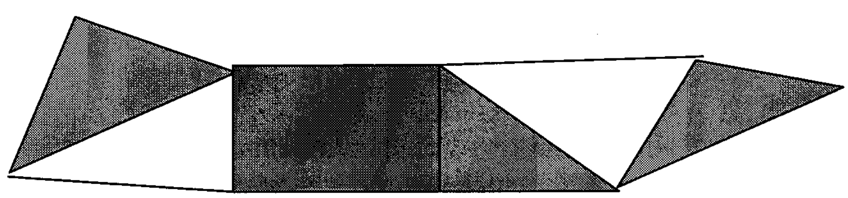
Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

andremat@otenet.gr

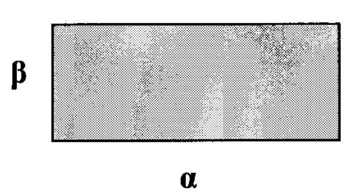
ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Τα σχήματα τα οποία μελετά η Γεωμετρία του Γυμνασίου είναι όλα ευθύγραμμα, εκτός από τον κύκλο. Άρα και τα εμβαδά των σχημάτων που εξετάζει είναι εμβαδά ευθύγραμμων σχημάτων. Ο κύκλος είναι μία ιδιαίτερη περίπτωση σχήματος που το εμβαδόν του δίνεται από έναν απλό τύπο.

Όλοι οι κανόνες για τον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων σχημάτων στηρίζονται σε μία απλή παραδοχή: Αν ένα σχήμα είναι χωρισμένο σε μικρότερα σχήματα που δεν καλύπτει το ένα τα άλλα και δεν αφήνουν κενά στο αρχικό σχήμα, τότε το εμβαδόν του αρχικού σχήματος ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μικρότερων σχημάτων.



ΚΑΝΟΝΑΣ 1: Το **εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου** με μήκη κάθετων πλευρών α και β αντίστοιχα, δίνεται από τον τύπο **Ε = αβ**.

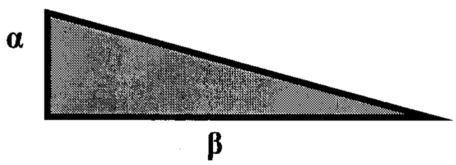


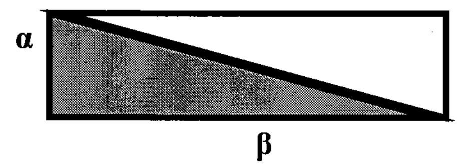
ΚΑΝΟΝΑΣ 2: Το **εμβαδόν ενός τετραγώνου** με μήκος πλευράς α, δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E = \alpha^2}$.

Η απόδειξη αυτού του κανόνα βασίζεται στον κανόνα 1, αφού στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες, άρα β = α, άρα $\mathbf{E = \alpha^2}$.

ΚΑΝΟΝΑΣ 3: Το **εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου** με μήκη κάθετων πλευρών α και β αντίστοιχα, δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E} = \dfrac{\alpha\beta}{2}$ **.**

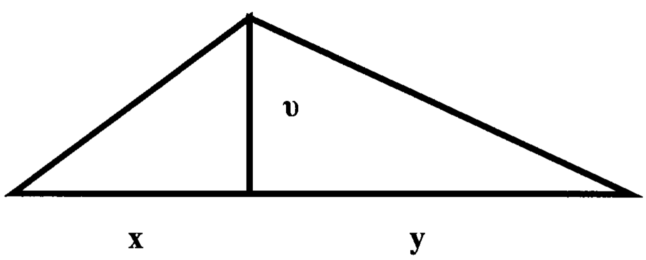
Η απόδειξη αυτού του κανόνα βασίζεται στον κανόνα 1, αφού ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι μισό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .





ΚΑΝΟΝΑΣ 4: Το **εμβαδόν ενός τριγώνου** με πλευρά α και ύψος προς την πλευρά αυτή υ, δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E} = \dfrac{\alpha\upsilon}{2}$**.**

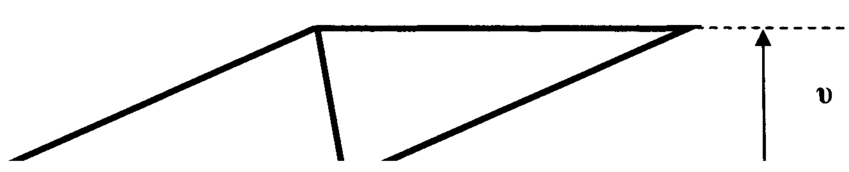
Η απόδειξη αυτού του κανόνα βασίζεται στον κανόνα 3. Στο παρακάτω τρίγωνο φέρνουμε το ύψος υ προς την πλευρά α που τη χωρίζει σε δύο ευθύγραμμα τμήματα το x και το y. Στο αριστερό ορθογώνιο τρίγωνο το εμβαδόν (βάσει του κανόνα 3) είναι $\dfrac{x\upsilon}{2}$, ενώ το εμβαδόν του δεξιού τριγώνου είναι $\dfrac{y\upsilon}{2}$. Προσθέτουμε τα δύο εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων και έτσι έχουμε το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου $E = \dfrac{x\upsilon}{2} + \dfrac{y\upsilon}{2} = \dfrac{(x+y)\upsilon}{2} = \dfrac{\alpha\upsilon}{2}$.



Ο κανόνας αυτός για το εμβαδόν τριγώνου σημαίνει ότι το γινόμενο του μήκους μιας πλευράς τριγώνου επί το μήκος του αντίστοιχου ύψους είναι σταθερό σε κάθε τρίγωνο. Αυτή η σταθερότητα περιγράφεται από τον τύπο $\alpha\upsilon_1 = \beta\upsilon_2 = \gamma\upsilon_3$, (1) όπου α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου και υ_1, υ_2, υ_3 τα αντίστοιχα ύψη.

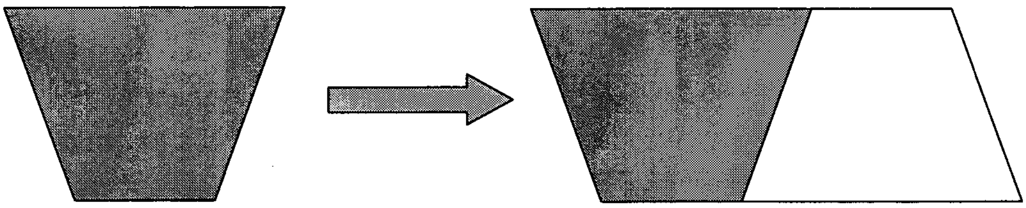
ΚΑΝΟΝΑΣ 5: Το **εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου** με βάση α και αντίστοιχο ύψος υ δίνεται από τον τύπο **Ε = αυ**.

Η απόδειξη του κανόνα αυτού βασίζεται στον κανόνα 4, αφού ένα παραλληλόγραμμο αποτελείται από δύο ίσα τρίγωνα με κοινή πλευρά, που το κάθε ένα έχει μήκος πλευράς α και ύψος υ, άρα $E = \dfrac{\alpha\upsilon}{2} + \dfrac{\alpha\upsilon}{2} = \alpha\upsilon$.



ΚΑΝΟΝΑΣ 6: Το **εμβαδόν ενός τραπεζίου** με μικρή βάση β, μεγάλη βάση Β και ύψος υ δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E} = \dfrac{(\beta + B)\upsilon}{2}$.

Η απόδειξη αυτού του κανόνα βασίζεται στον κανόνα 5. Παίρνουμε το αρχικό τραπέζιο και τοποθετούμε δίπλα του ένα ίσο τραπέζιο όπως στο παρακάτω σχήμα. Το ενιαίο σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, αφού είναι τετράπλευρο με δύο απέναντι παράλληλες και ίσες. Το εμβαδόν του μεγάλου σχήματος είναι Ε = (β + Β)υ. Αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν του τραπεζίου μας θα είναι το μισό από αυτό, δηλαδή ισχύει $E = \dfrac{(\beta + B)\upsilon}{2}$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1: Με δεδομένους τους τύπους εύρεσης του εμβαδού τριγώνου και του παραλληλογράμμου να βρείτε πέντε διαφορετικούς τρόπους για να καταλήξετε στον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.

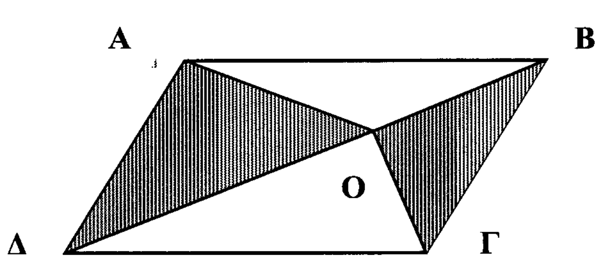
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2: α) Να βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν τετραγώνου που να περιέχει μόνο τη διαγώνιό του.

β) Να βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν ρόμβου και να περιέχει μόνο τις διαγώνιές του.

γ) Σε ένα τετράπλευρο που έχει κάθετες διαγώνιες, να βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν του που να περιέχει μόνο τις διαγώνιές του.

Να συγκρίνετε το μέρος β) της δραστηριότητας με τα α) και γ).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3: Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το Ο είναι τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του. Η σχέση του εμβαδού της χρωματισμένης περιοχής με το εμβαδόν της λευκής περιοχής επηρεάζεται από τη θέση του σημείου Ο; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα, αν το σχήμα ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4: α) Να χωριστεί ένα τρίγωνο σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά από μία ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή του.

β) Να χωριστεί ένα τρίγωνο σε τρία σχήματα με ίσα εμβαδά από δύο ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

γ) Να χωριστεί ένα τρίγωνο σε τέσσερα σχήματα με ίσα εμβαδά από τρεις ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

δ) Να χωριστεί ένα τρίγωνο σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά από μία ευθεία που δεν διέρχεται από κάποια κορυφή του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5: α) Να χωριστεί ένα τετράγωνο σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά από μία ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή του.

β) Να χωριστεί ένα τετράγωνο σε τρία σχήματα με ίσα εμβαδά από δύο ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

γ) Να χωριστεί ένα τετράγωνο σε τέσσερα σχήματα με ίσα εμβαδά από τρεις ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

δ) Να χωριστεί ένα τετράγωνο σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά από μία ευθεία που δεν διέρχεται από κάποια κορυφή του ή από τα μέσα των πλευρών του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6: Ένα τραπέζιο έχει μήκη βάσεων β και Β και ύψος υ.

α) Να βρείτε έναν τρόπο για χωρίσετε το τραπέζιο σε δύο τραπέζια με ίσα εμβαδά.

β) Να βρείτε έναν τρόπο για χωρίσετε το τραπέζιο σε δύο τραπέζια με ίσα εμβαδά με μία ευθεία που είναι παράλληλη προς τις βάσεις του. Αν η ευθεία αυτή απέχει από τη βάση Β απόσταση α, βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τα μήκη α, β, Β και υ.

γ) Να χωρίσετε το τραπέζιο σε δύο σχήματα με ίσα εμβαδά με μία ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7: α) Να κόψετε ένα τετράγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένα τρίγωνο με ίσο εμβαδόν.

β) Να κόψετε ένα τετράγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ίσο εμβαδόν.

γ) Να κόψετε ένα τετράγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με ίσο εμβαδόν.

δ) Να κόψετε ένα τετράγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένας ρόμβος (χωρίς ορθές γωνίες) με ίσο εμβαδόν.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 8: α) Να κόψετε ένα σκαληνό τρίγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένα παραλληλόγραμμο με ίσο εμβαδόν.

β) Να κόψετε ένα σκαληνό τρίγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε τα κομμάτια να συνενωθούν και να προκύψει ένα ορθογώνιο τραπέζιο με ίσο εμβαδόν.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 9: Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ, το άθροισμα των αποστάσεων του Δ από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα είναι σταθερό και είναι ίσο με το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου.

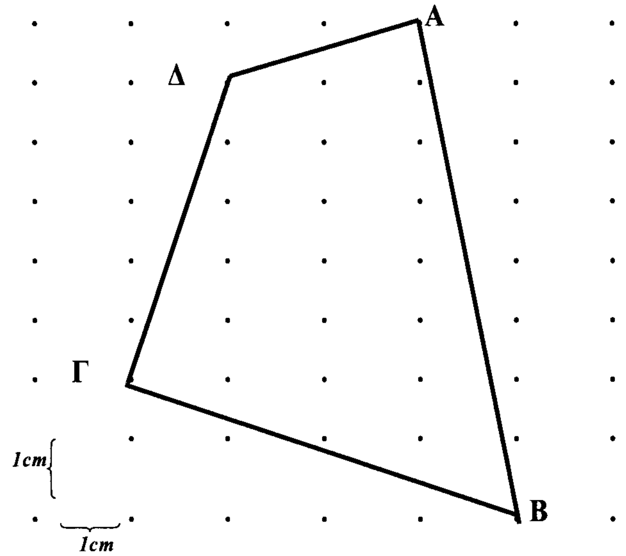
Υπόδειξη: Να φέρετε το ΑΔ και να χρησιμοποιήσετε τύπους των εμβαδών.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ε στο εσωτερικό του τριγώνου, το άθροισμα των αποστάσεων του Ε από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ είναι σταθερό και είναι ίσο με το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου.

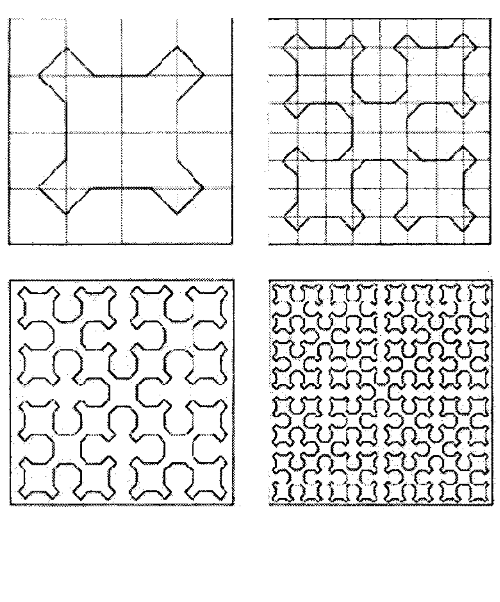
Υπόδειξη: Να φέρετε τα ΑΕ, ΒΕ, ΓΕ και να χρησιμοποιήσετε τύπους των εμβαδών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 10: Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία πάνω σε ένα **πλέγμα**, δηλαδή σημεία που απέχουν από τα πλησιέστερα σημεία τους, οριζόντια και κατακόρυφα, 1 cm. Παρατηρείστε τη θέση των σημείων Α, Β, Γ, Δ για να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ, γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 11: Τα παρακάτω σχήματα περιγράφουν μία διαδικασία κατασκευής νέων σχημάτων που βρίσκονται όλα μέσα σε ένα τετράγωνο 4x4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κάθε νέου σχήματος με δεδομένο ότι το αρχικό τετράγωνο έχει πλευρά 4 μ.



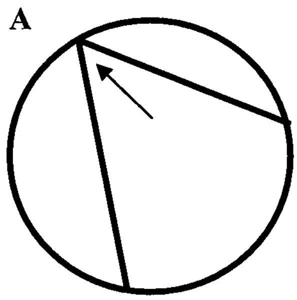
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ
ΕΓΓΕΓΡΑΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο χορδές ενός κύκλου (Ο, ρ) με κοινή κορυφή Α σχηματίζουν μία γωνία. Η γωνία αυτή λέγεται **εγγεγραμμένη** στον κύκλο (Ο, ρ).

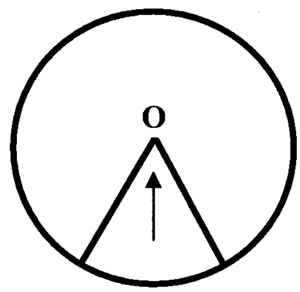
ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο ακτίνες ενός κύκλου (Ο, ρ) σχηματίζουν μία γωνία μικρότερη από 180^o και μία γωνία μεγαλύτερη από 180^o. Οι γωνίες αυτές λέγονται **επίκεντρες** στον κύκλο (Ο, ρ). Η μία είναι επίκεντρη στο έλασσον και η άλλη γωνία είναι επίκεντρη στο μείζον τόξο. Λέμε ότι **η επίκεντρη γωνία βαίνει στο τόξο** αυτό.

Συνήθως αναφερόμαστε στην επίκεντρη γωνία του μικρότερου (ελάσσονος) τόξου. Σε κάποιες σπάνιες περιπτώσεις έχουμε επίκεντρη σε ημικύκλιο, δηλαδή γωνία 180^o.

Αφού μία εγγεγραμμένη γωνία σχηματίζεται από δύο χορδές με κοινή κορυφή, τα άλλα δύο σημεία των χορδών είναι σημεία του κύκλου και είναι τα άκρα ενός τόξου που δεν περιέχει την κορυφή της εγγεγραμμένης γωνίας. Λέμε ότι **η εγγεγραμμένη γωνία βαίνει στο τόξο** αυτό.



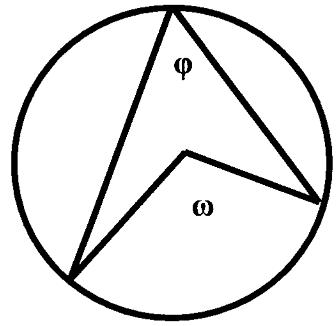
εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο



επίκεντρη γωνία σε κύκλο

Ένα σπουδαίο ερώτημα που η απάντησή του λύνει πολλά προβλήματα υπολογισμού εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών είναι το εξής: Ποια σχέση έχει μία εγγεγραμμένη και μία επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο;

ΚΑΝΟΝΑΣ: Μία επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια από την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο.
Η απόδειξη του κανόνα αυτού έχει μερικές δυσκολίες, ανάλογα με τη θέση της εγγεγραμμένης, δηλαδή αν το κέντρο το κύκλου είναι μέσα, πάνω σε μία πλευρά της ή έξω από την εγγεγραμμένη. Είναι όμως μία ενδιαφέρουσα δραστηριότητα που πρέπει να πραγματοποιηθεί.



$\boxed{\hat{\omega}=2\hat{\phi}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέγεται **εγγεγραμμένο** σε έναν κύκλο (Ο, ρ), όταν όλες οι κορυφές του σχήματος είναι σημεία του κύκλου (Ο, ρ).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέγεται **εγγράψιμο σε κύκλο**, όταν υπάρχει κάποιος κύκλος, έτσι ώστε όλες οι κορυφές του σχήματος είναι σημεία του κύκλου αυτού.

Δηλαδή η διαφορά μεταξύ των φράσεων σχήμα *«εγγεγραμμένο σε κύκλο»* και *«εγγράψιμο σε κύκλο»* έχει σχέση με το αν ο κύκλος είναι σχεδιασμένος ή όχι γύρω από το σχήμα.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Κάθε τρίγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Από τα παραλληλόγραμμα μόνο τα ορθογώνια (συνεπώς και τα τετράγωνα) είναι εγγράψιμα σε κύκλο.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Από τα τραπέζια μόνο τα ισοσκελή είναι εγγράψιμα σε κύκλο.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες (κανονικά πολύγωνα) είναι εγγράψιμα σε κύκλο.

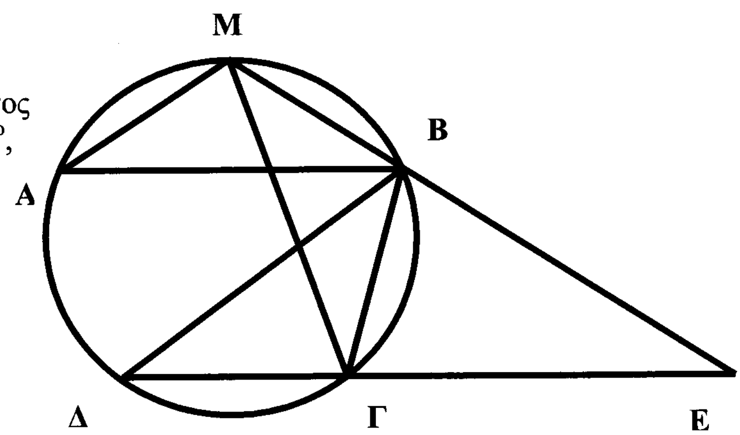
ΓΕΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ: Εγγράψιμα ευθύγραμμα σχήματα σε κύκλο είναι μόνο αυτά που όλες οι μεσοκάθετες των πλευρών τους διέρχονται από ένα κοινό σημείο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 12: Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να βρείτε ποια σχέση έχουν οι γωνίες Α και Γ και οι γωνίες Β και Δ.
Υπόδειξη: Στην αρχή να υποθέσετε ότι οι γωνίες Α και Δ έχουν γνωστό άνοιγμα π.χ. 80^o και 40^o και να υπολογίσετε τις γωνίες Γ και Β. Με δύο τρία παραδείγματα πρέπει να παρατηρήσετε τον κανόνα. Μετά, να δώσετε μία απόδειξη του ισχυρισμού σας, χωρίς συγκεκριμένα ανοίγματα γωνιών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 13:
Στον κύκλο του διπλανού σχήματος έχουμε ΑΒ // ΓΔ, τόξο ΑΒ = 120^o, τόξο ΓΔ = 80^o, Μ το μέσο του τόξου ΑΒ και Ε το σημείο τομής των ΜΒ, ΔΓ.
Να υπολογιστούν οι γωνίες:

$\Delta\hat{B}\Gamma$, $\Gamma\hat{M}B$, $A\hat{M}\Gamma$, $\Delta\hat{E}B$

Να εξετάσετε αν ΑΜ // ΔΒ.



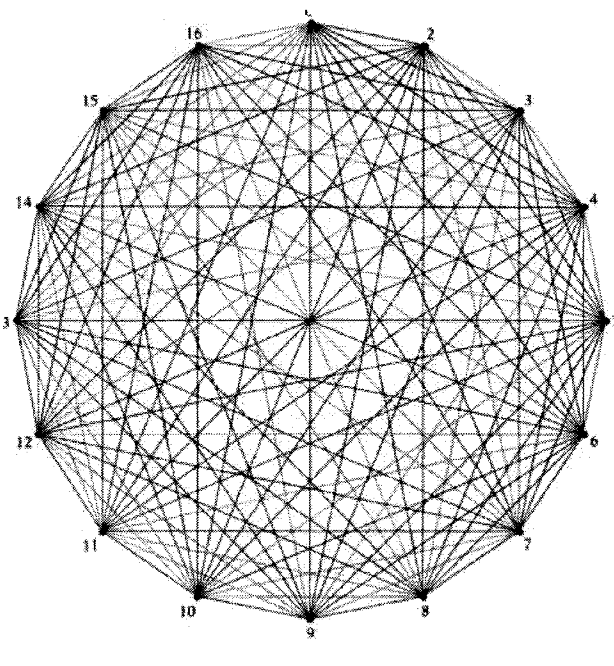
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 14:
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία Β = 80^o. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σχεδιάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ, έτσι ώστε η ΔΕ να τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Η. Η κάθετη από το Ε προς την προέκταση της ΒΓ την τέμνει στο σημείο Ζ. Στο σχήμα που θα σχεδιάσετε, να σημειώσετε τα μέτρα όλων των γωνιών του και να αιτιολογήσετε πώς τα υπολογίσατε.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα πολύγωνο λέγετε **κανονικό**, όταν όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Τα δώσετε παραδείγματα πολυγώνων που έχουν όλες τις πλευρές ίσες και δεν είναι κανονικά.
Τα δώσετε παραδείγματα πολυγώνων που έχουν όλες τις γωνίες ίσες και δεν είναι κανονικά.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Από τα τρίγωνο, το μόνο κανονικό είναι το ισόπλευρο.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Από τα τετράπλευρα, το μόνο κανονικό είναι το τετράγωνο.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε έναν μοναδικό κύκλο.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Για κάθε κανονικό πολύγωνο υπάρχει ένας μοναδικός κύκλος που εφάπτεται σε όλες τις πλευρές του. Αυτόν τον ονομάζουμε **κύκλο εγγράψιμο** στο κανονικό πολύγωνο.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Ο εγγράψιμος κύκλος σε ένα κανονικό πολύγωνο και ο κύκλος που περνάει από όλες τις κορυφές του (δηλαδή ο **περιγράψιμος κύκλος**) έχουν το ίδιο κέντρο. Το κοινό αυτό σημείο το ονομάζουμε **κέντρο του πολυγώνου**.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Μόνο τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο αριθμό πλευρών έχουν κέντρο συμμετρίας, αυτό είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.
ΚΑΝΟΝΑΣ: Κάθε κανονικό πολύγωνο έχει τόσους άξονες συμμετρίας, όσες είναι οι κορυφές του.



ΟΡΙΣΜΟΣ: **Γωνία κανονικού πολυγώνου** ονομάζουμε τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές του.
Όλες οι γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Κεντρική γωνία** ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζουμε τη γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου και οι πλευρές της διέρχονται από δύο διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου.

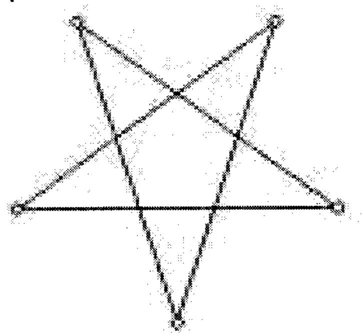
Είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε ότι όλες οι κεντρικές γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Το άνοιγμα της κάθε μίας από αυτές έχει σχέση με το πλήθος των πλευρών (ή γωνιών) του πολυγώνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Απόστημα** ενός κανονικού πολυγώνου είναι η απόσταση του κέντρου του πολυγώνου από μία πλευρά του.

Όλα τα αποστήματα ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσα.

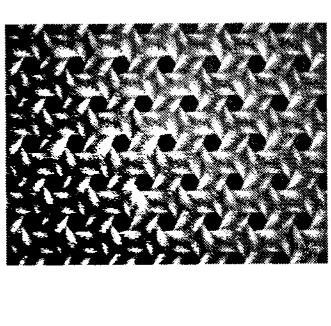
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 15: Να βρείτε τη σχέση μεταξύ της γωνίας και της κεντρικής γωνίας α) ενός κανονικού τριγώνου, β) ενός κανονικού πενταγώνου, γ) ενός κανονικού εξαγώνου, δ) ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές.

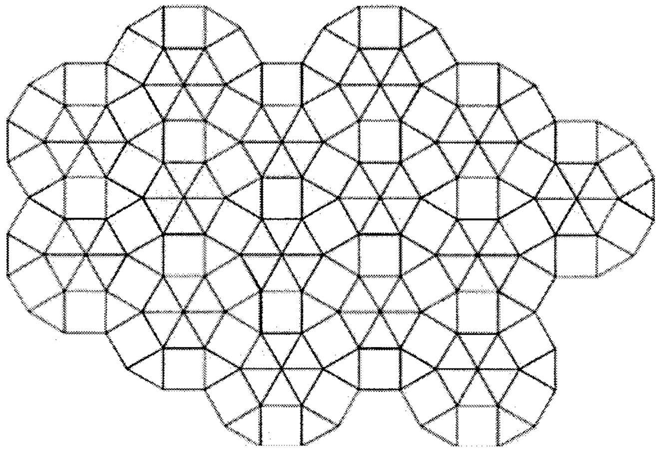
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 16: Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ενός κανονικού πενταγώνου, όπως στο επόμενο σχήμα, τότε προκύπτει ένα σχήμα με επίσης πέντε κορυφές που μοιάζει με αστέρι. Το συγκεκριμένο πολύγωνο λέγεται **αστεροειδές πεντάγωνο**. Από ποια κανονικά πολύγωνα μπορεί να προκύψουν αστεροειδή πολύγωνα; Διατυπώστε δικά σας ερωτήματα για τα σχήματα αυτά, χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζετε ποια είναι η σωστή απάντηση.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 17: Να βρείτε τη σχέση μεταξύ της πλευράς ενός κανονικού πολυγώνου, της ακτίνας του περιγράψιμου κύκλου και του αποστήματος. Με τη βοήθεια του τύπου αυτού να απαντήσετε στα ερωτήματα, α) ποιο από τα κανονικά πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο έχει τη μεγαλύτερη πλευρά, β) γιατί καθώς αυξάνει η πλευρά ενός κανονικού πολυγώνου μικραίνει το απόστημά του και αντίστροφα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 18: Γύρω από ένα σημείο Ο τοποθετούμε ίσα κανονικά πολύγωνα, ώστε αυτά να μην επικαλύπτονται, αλλά και να μην αφήνουν κενή περιοχή γύρω από το σημείο. Με ποια κανονικά πολύγωνα μπορεί να γίνει αυτή η κάλυψη; Στη συνέχεια προσπαθήστε να τοποθετήσετε για τον ίδιο σκοπό, κανονικά πολύγωνα που δεν είναι απαραίτητα ίσα. Πόσες τέτοιες περιπτώσεις μπορείτε να βρείτε; Τα επόμενα δύο σχήματα μας δίνουν κάποιες ιδέες για κάλυψη του επιπέδου από κανονικά, αλλά όχι ίσα πολύγωνα.





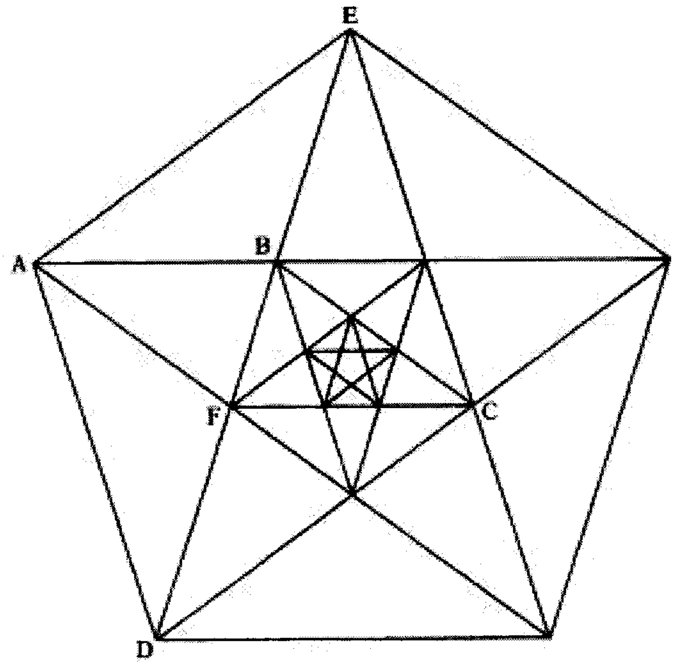
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 19: Να κατασκευάσετε έναν κατάλογο που να δίνει το πλήθος ν των πλευρών και το πλήθος των διαγωνίων ενός κανονικού πολυγώνου, ξεκινώντας από ν = 3 μέχρι ν = 9. Μπορείτε να βρείτε έναν γενικό κανόνα για τη σχέση των πλευρών και των διαγωνίων κανονικού πολυγώνου για οποιοδήποτε ν; Μήπως, ο τύπος αυτός ισχύει και για πολύγωνα που δεν είναι κανονικά;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 20: α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα ένα κανονικό πεντάγωνο και να εξετάσετε αν οι διαγώνιες του οι παράλληλες προς κάποια από τις πλευρές του.
β) Να σχεδιάσετε πρόχειρα ένα κανονικό εξάγωνο και να εξετάσετε αν οι διαγώνιες του οι παράλληλες προς κάποια από τις πλευρές του.
Μπορείτε να αιτιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 21: Να κατασκευάσετε έναν κατάλογο που να δίνει το πλήθος ν των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου και το πλήθος των διαφορετικών μηκών των διαγωνίων του, ξεκινώντας από ν = 3 μέχρι ν = 10. Για παράδειγμα, το κανονικό πεντάγωνο έχει μόνο ένα είδος διαγωνίων, αφού είναι όλες ίσες. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας από τον κατάλογο αυτό. Μπορείτε να βρείτε κάποιον κανόνα σχετικό με πλήθος των διαφορετικών διαγωνίων ενός κανονικού πολυγώνου;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 22: Δίνεται ένας κύκλος (Ο, ρ). Μόνο με τη βοήθεια ενός διαβήτη, ποιών κανονικών πολυγώνων μπορείτε να εντοπίσετε τις κορυφές ως σημεία του κύκλου (Ο, ρ); Να περιγράψετε τη διαδικασία που ανακαλύψατε και να εξηγήσετε γιατί αυτή είναι σωστή.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 23: Αν ενώσουμε τα μέσα των διαδοχικών πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου, τότε κατασκευάζεται ένα νέο μικρότερο κανονικό πολύγωνο με το ίδιο πλήθος πλευρών. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και κάθε φορά το σχήμα που προκύπτει είναι όμοιο με το αρχικό. Τα σχήματα που έχουν αυτή τη χαρακτηριστική ιδιότητα μπορούμε να τα ονομάσουμε **αυτομοιόμορφα**.
α) Κατασκευάστε τρία αυτομοιόμορφα ενός κανονικού τετραγώνου, πενταγώνου και εξαγώνου. Διατυπώστε κάποιες εικασίες για ιδιότητες που έχουν τα αυτομοιόμορφα κάθε είδους.
β) Κατασκευάζονται αυτομοιόμορφα σχήματα και με άλλον τρόπο; Το σχήμα που ακολουθεί μας δίνει μία ιδέα. Να εξετάσετε για ποια κανονικά πολύγωνα ο τρόπος αυτός φέρνει αποτέλεσμα και να διατυπώσετε πάλι εικασίες. Για παράδειγμα, τι σχέση έχουν τα αυτομοιόμορφα που παράγονται με τον πρώτο τρόπο με αυτά που παράγει ο δεύτερος τρόπος.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 24: Στο παρακάτω κανονικό εξάγωνο έχουμε χαράξει όλες τις διαγώνιές του. Να βρείτε το πλήθος:

Α) των ισοπλεύρων τριγώνων

Β) των ορθογωνίων τριγώνων

Γ) των ισοσκελών τριγώνων με μία γωνία 120^o

Δ) των ισοσκελών τριγώνων με μία γωνία 36^o

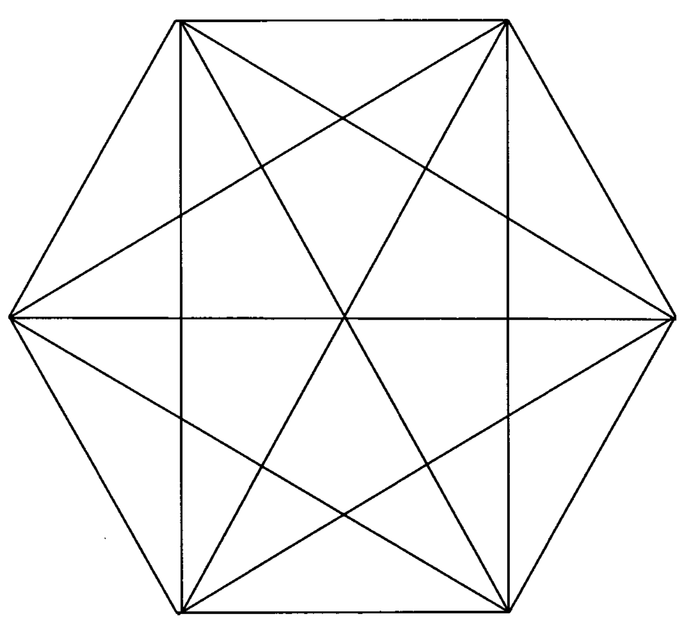
Ε) των ισοσκελών τραπεζίων

ΣΤ) των ορθογωνίων παραλληλογράμμων

Ζ) των τετραπλεύρων με δύο ζεύγη πλευρών ίσες που δεν είναι παραλληλόγραμμα

Η) των ρόμβων.

Για κάθε επιλογή σας πρέπει να δώσετε και μία αιτιολόγηση. Τέλος, να εξηγήσετε γιατί υπάρχει και ένα δεύτερο κανονικό εξάγωνο μέσα στο σχήμα.



ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έκαναν την σπουδαία ανακάλυψη ότι, *αν διαιρέσουμε το μήκος οποιουδήποτε κύκλου με το μήκος της διαμέτρου του, το πηλίκο αυτό είναι σταθερό και ισούται με τον αριθμό 3,141592654.....* Ο αριθμός αυτός δεν είναι περιοδικός, δηλαδή δεν έχει επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία, ούτε κατά ομάδες και τα ψηφία του είναι άπειρα. Τον αριθμό αυτό συμβολίζουμε με **π**. Στο Δημοτικό σχολείο μαθαίνουν ότι ο π είναι ο 3,14. Αυτό είναι λάθος, ο 3,14 είναι κοντά στον π, διαφέρει από αυτόν λιγότερο από δύο χιλιοστά, αλλά δεν είναι ο π. Στα παρακάτω προβλήματα με μήκη κύκλων, μήκη τόξων κύκλων, εμβαδά κύκλων κλπ. όπου εμφανίζεται ο αριθμός π, δεν υπάρχει κανέναν λόγος να τον γράφουμε ως 3,14, τώρα μάλιστα που γνωρίζουμε ότι αυτός δεν είναι ο π.

π

ΚΑΝΟΝΑΣ: Το **μήκος ενός κύκλου** δίνεται από τον τύπο **L = 2Rπ.**

Ο τύπος αυτός προέκυψε από την ανακάλυψη ότι, το μήκος ενός κύκλου L διά του μήκους δ της διαμέτρου του ισούται με π, ισχύει L = δπ ή L = 2Rπ, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

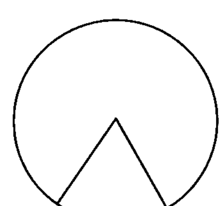
ΚΑΝΟΝΑΣ: Το **μήκος ενός τόξου κύκλου** που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία φ^o, δίνεται από τον τύπο $l = \dfrac{\pi R \varphi}{180^o}$.

Αφού σε όλο τον κύκλο δηλαδή σε τόξο 360^o αντιστοιχεί μήκος L = 2Rπ, σε τόξο φ^o, αντιστοιχεί μήκος ℓ. Από την αναλογία $\dfrac{l}{2\pi R} = \dfrac{\varphi}{360}$ προκύπτει ο τελικός τύπος για το μήκος τόξου.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Το **εμβαδόν ενός κύκλου** δίνεται από τον τύπο **Ε = πR²**.

Η απόδειξη αυτού του τύπου είναι εξαιρετικά δύσκολη και είναι άλλη μία ανακάλυψη των αρχαίων Ελλήνων.

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Κυκλικός τομέας** είναι το μέρος του κυκλικού δίσκου που ορίζεται από μία επίκεντρη γωνία και το αντίστοιχο τόξο της.

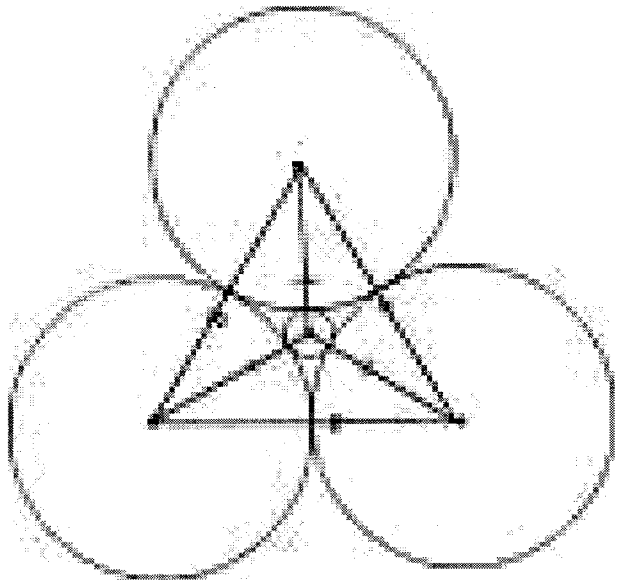


κυκλικός τομέας

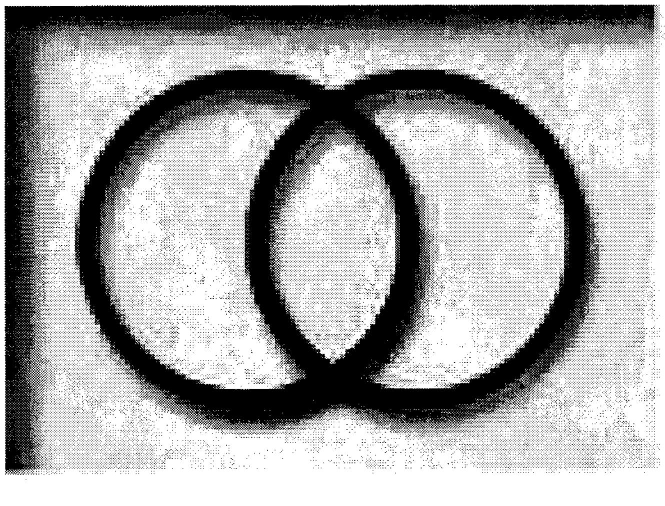
ΚΑΝΟΝΑΣ: Το **εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα** δίνεται από τον τύπο $E_\tau = \dfrac{\pi R^2 \varphi}{360^o}$.

Αφού σε όλο τον κύκλο δηλαδή σε τόξο 360^o αντιστοιχεί εμβαδόν $E = \pi R^2$, σε τόξο φ^o, αντιστοιχεί εμβαδόν E_τ. Από την αναλογία $\dfrac{E_\tau}{\pi R^2} = \dfrac{\varphi}{360}$ προκύπτει ο τελικός τύπος για το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 25: Το επόμενο σχήμα αποτελείται από τρεις ίσους κύκλους που εφάπτονται ανά δύο και έναν μικρότερο κύκλο που εφάπτεται και στους τρεις. Να διατυπώσετε δικά σας ερωτήματα και τα αξιολογήσετε κατά σειρά δυσκολίας ως προς την απάντησή τους.

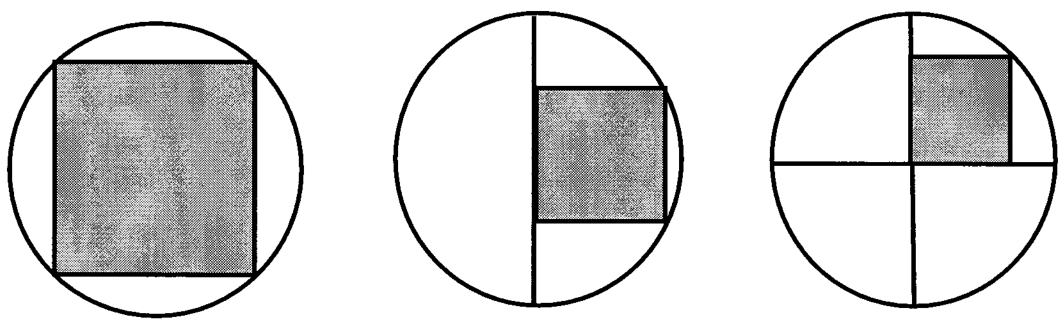


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 26: Το επόμενο σχήμα αποτελείται από δύο ίσους κύκλους που το κέντρο του κάθε ένα από αυτούς βρίσκεται πάνω στον άλλο κύκλο. Αν γνωρίζουμε την ακτίνα τους, μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν της κοινής περιοχής ανάμεσα στους δύο κύκλους;



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 27: α) Να βρείτε τη σχέση των εμβαδών ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό (ισόπλευρο) τρίγωνο.
β) Να βρείτε τη σχέση των εμβαδών ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό τετράπλευρο (τετράγωνο).
α) Να βρείτε τη σχέση των εμβαδών ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό εξάγωνο.
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για τα βήματα α) και γ) να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα «*σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία γωνία του είναι 30^o, η απέναντι πλευρά προς την γωνία 30^o, έχει μήκος όσο η μισή υποτείνουσα*». Πώς αποδεικνύεται ότι ο κανόνας αυτός είναι σωστός;

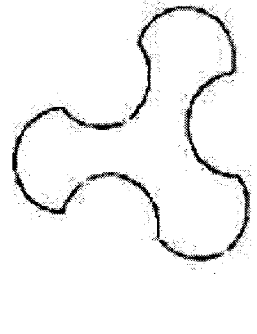
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 28: Δίνεται ο κύκλος (Ο, ρ).
α) Το τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, ρ). Να βρείτε τη σχέση της πλευράς του ΑΒΓΔ με την ακτίνα ρ.
β) Το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο που οι κορυφές Ζ και Η είναι σημεία του κύκλου και οι κορυφές Ε, Θ είναι σημεία μιας διαμέτρου του (Ο, ρ). Να βρείτε τη σχέση της πλευράς του ΕΖΗΘ με την ακτίνα ρ.
γ) Το ΙΚΛΟ είναι τετράγωνο που η κορυφή Κ είναι σημείο του κύκλου, οι κορυφές Ι, Λ είναι σημεία δύο κάθετων διαμέτρων του (Ο, ρ). Να βρείτε τη σχέση της πλευράς του ΙΚΛΟ με την ακτίνα ρ.



α) β) γ)

ΘΕΜΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΘΑΛΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 1998

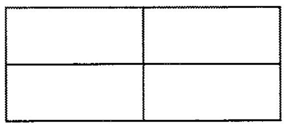
2. Μια περιοχή του επιπέδου περικλείεται από 6 ημικύκλια ακτίνας 1 cm όπως στο σχήμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής αυτής.



Ασκήσεις
για το καλοκαιρινό Σχολείο της ΕΜΕ

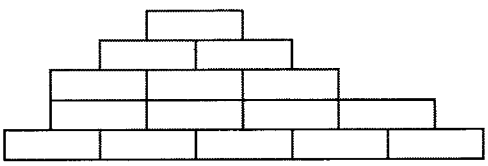
Κωνσταντίνος Νάκος

K_1. Πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα;



(Απ: 9)

K_2. Ποια είναι η περίμετρος του παρακάτω σχήματος, αν καθένα από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχει μήκος 10cm και πλάτος 5cm;



(Απ: 1.5m)

K_3. Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1:500.000. Ποια είναι η πραγματική απόσταση σε km δυο πόλεων που απέχουν 13cm στο χάρτη;
(Απ: 65 km)

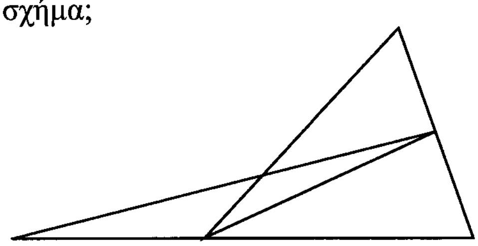
K_4. Κόβουμε ένα κύβο που έχει ακμή 1m, σε μικρότερους κύβους ακμής 10cm. Μετά τοποθετούμε τους μικρούς κύβους τον ένα πάνω στον άλλο. Ποιο είναι το ύψος της κατασκευής που θα προκύψει;
(Απ: 100 m)

K_5. Η τιμή μιας ψηφιακής φωτογραφικής μηχανής μετά από έκπτωση 20% είναι 368€. Ποια ήταν η τιμή της μηχανής πριν από την έκπτωση;
(Απ: 460 €)

K_6. Τον καιρό των ιπποτών η ανταλλαγή μηνυμάτων μεταξύ δυο πύργων γινόταν με ταχυδρομικά περιστέρια. Ένα περιστέρι ξεκίνησε από τον πύργο του στις 8:20 το πρωί και έφτασε στον άλλο πύργο στις 9:35 το πρωί. Αν το περιστέρι διανύει απόσταση 3 χιλιομέτρων σε 5 λεπτά, πόσο απέχουν οι δυο πύργοι; (Απ: 45 km)

K_7. 2008 – 2007 + 2006–2005 +…+2 –1=
(Απ:1004)

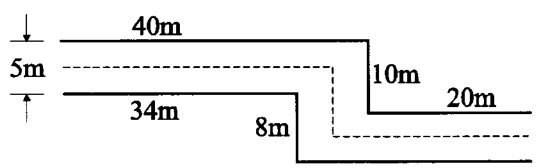
K_8. Πόσα τρίγωνα υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα;



(Απ: 16)

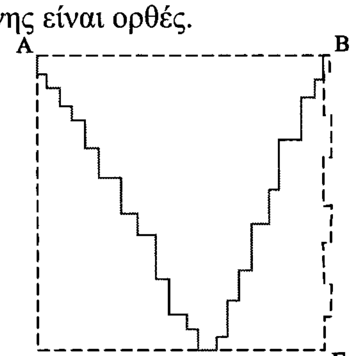
K_9. Ένας μαθητής ξεκινάει από το 777 και μειώνοντας κατά 7 μετράει:
777, 770, 763, … Ένας από τους αριθμούς που θα μετρήσει θα είναι και ο:
α) 45, **β)** 44, **γ)** 43 **δ)** 42, **ε)** 41
(Απ : δ)

K_{10}. Ποιο είναι το μήκος του μονοπατιού στο κέντρο του διαδρόμου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα;



(Απ: 69 m)

K_{11}. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=15dm και ΒΓ=2,1m. Να εκφράσετε σε cm το μήκος της τεθλασμένης γραμμής που περιέχεται στο ορθογώνιο, όταν όλες οι γωνίες της τεθλασμένης είναι ορθές.



(Απ: 570 cm)

K_{12}. Μια μαθήτρια χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης πολλαπλασιάζει με 5,2 αντί να διαιρέσει με 5,2. Το λανθασμένο αποτέλεσμα 338 ποιο είναι το σωστό αποτέλεσμα; (Απ: 12,5)

Κ13. Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $2^{12}.5^{8}$ αν γραφεί στη δεκαδική του μορφή;

(Απ : 10 ψηφία)

Κ14. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2008}\right)=$

(Απ: $\frac{1}{2008}$)

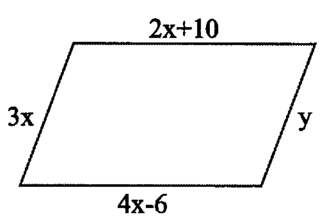
Κ15. Ένα κατάστημα με είδη σπορ πουλάει ένα ζευγάρι πέδιλα σκι με έκπτωση 25%. Μετά από διαπραγματεύσεις (παζάρια) με τον αγοραστή ο καταστηματάρχης κάνει έκπτωση 10% πάνω στη νέα τιμή και έτσι ο αγοραστής πληρώνει 135€. Ποια ήταν η αρχική τιμή των πέδιλων του σκι;

(Απ: 200 €)

Κ16. Γράψτε τον αριθμό 6 χρησιμοποιών-τας τρία όμοια ψηφία και όποιες πράξεις θέλετε, με πέντε τουλάχιστον τρόπους. Π.χ. $6=\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9}$

(Απ: Π.χ $6=7-\frac{7}{7},\ldots$)

Κ17. Το παρακάτω σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, $y=$;

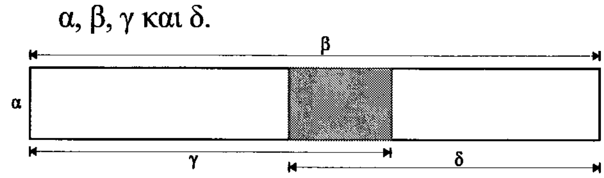


(Απ: y = 24)

Κ18. Αν $\frac{\beta}{\alpha}=2$ και $\frac{\gamma}{\beta}=3$, τότε $\frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}=$;

(Απ: $\frac{3}{8}$)

Κ19. Στο παρακάτω σχήμα όλα τα εμφανιζόμενα τετράπλευρα είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου ως συνάρτηση των α, β, γ και δ.

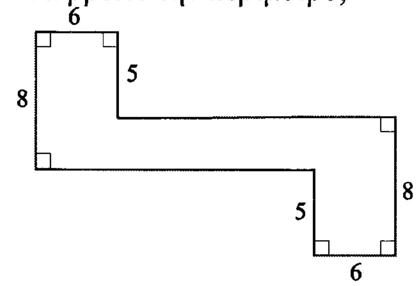


(Απ: αγ + αδ – αβ)

Κ20. Αν $\frac{23^{2008}-23^{2007}}{22}=23^{x}$, τότε x;

(Απ: x = 2007)

Κ21. Αν το παρακάτω σχήμα έχει εμβαδόν $108m^2$ να βρείτε την περίμετρο;



(Απ: Π = 58)

Κ22. $\left(\sqrt{1}-5\right)\left(\sqrt{2}-5\right)\left(\sqrt{3}-5\right)...\left(\sqrt{55}-5\right)=$;

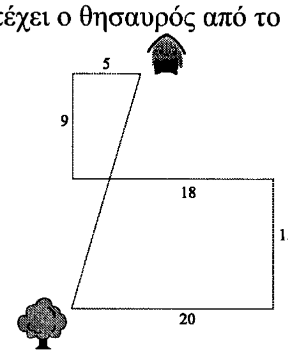
(Απ : 0)

Κ23. Η τιμή ενός προϊόντος μειώνεται κατά 10%. Ποιο πρέπει να είναι το ποσοστό αύξησης της νέας τιμής του προϊόντος ώστε να επανέλθει στην αρχική του τιμή;

(Απ: $x\approx 11{,}111\%$)

Κ24. Αν $\alpha=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...+\frac{2009}{2008}$ και $\beta=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2008}$, τότε $\alpha-\beta=$; (Απ : 2008)

Κ25. Μερικοί μαθητές βρήκαν ένα χάρτη του Μαύρου Πειρατή για ένα θησαυρό που είχε κρύψει. Στο χάρτη ήταν γραμμένο : πήγαινε 20 βήματα ανατολικά του γέρικου δέντρου, μετά 15 βήματα βόρεια, 18 δυτικά, 9 βόρεια, 5 βήματα ανατολικά και βρήκες το θησαυρό. Πόσα βήματα απέχει ο θησαυρός από το δέντρο;



(Απ: 25)

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.
ΝΑΟΥΣΑ ΗΜΑΘΙΑΣ 2011
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ Α΄, Β΄ Γυμνασίου

Σαραφοπούλου Χαρίκλεια
Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης

Α. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

i) Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι: 0, 2, 4, 6, 8.

ii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9.

iii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5.

iv) Ένας αριθμός διαιρείται με το 10 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0.

v) Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 8 μόνο αν ο αριθμός που αποτελείται από τα δύο ή τρία τελευταία (αντίστοιχα) ψηφία του διαιρείται με το 4 ή το 8.

vi) Ένας αριθμός διαιρείται με το 11 αν το αλγεβρικό άθροισμα των ψηφίων του αριθμού με τα πρόσημα εναλλάξ είναι αριθμός που διαιρείται με το 11.

Β. Ευκλείδεια διαίρεση

Αν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ, δ με $\delta \neq 0$, τότε μπορούμε πάντα να βρούμε δύο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς π και υ, έτσι ώστε να ισχύει η ταυτότητα $\boldsymbol{\Delta = \delta\pi + \upsilon}$ και $\boldsymbol{\upsilon < \delta}$.

Η ισότητα αυτή λέγεται **ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.**

- Αν $\upsilon = 0$ τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.
- Κάθε άρτιος αριθμός έχει τη μορφή 2λ ενώ κάθε περιττός έχει τη μορφή $2\lambda+1$.
- Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε άρτιος αριθμός.

- Αν ένας ακέραιος αριθμός α είναι περιττός τότε το τετράγωνό του έχει τη μορφή $8\lambda + 1$.

Γ. Διαιρετότητα - Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ.-Πρώτοι αριθμοί

- Έστω δύο ακέραιοι α και β με $\beta \neq 0$.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το β είναι $\upsilon = 0$, τότε λέμε ο α διαιρεί τον β και γράφουμε $\beta|\alpha$.

Με άλλα λόγια, θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α, αν υπάρχει ακέραιος λ τέτοιος ώστε $\alpha = \lambda \cdot \beta$

Γενικά ισχύουν τα παρακάτω:

- $1|\alpha$ για κάθε $\alpha \in Z$
- $\alpha|\alpha$ για $\alpha \neq 0$ και $\alpha|0$
- Αν $\beta|\alpha$ τότε και $\lambda\beta|\lambda\alpha$
- Αν $\beta|\alpha$ τότε και $\beta|\lambda\alpha$

Κάποιες από τις ιδιότητες της διαιρετότητας είναι:

- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε και $\alpha|\gamma$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$ τότε
  - $\alpha|(\beta + \gamma)$ και $\alpha|(\beta - \gamma)$
  - $\alpha|(\lambda\beta + \mu\gamma)$ και $\alpha|(\lambda\beta - \mu\gamma)$ για κάθε $\lambda, \mu \in Z$
  - Αν $\alpha|\beta$ και $\beta \neq 0$ τότε $|\alpha| \leq |\beta|$

Κάποιες χρήσιμες ιδιότητες στην διαιρετότητα είναι:

Αν α, β είναι ακέραιοι αριθμοί τότε:

$$\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = \pi o\lambda(\alpha - \beta)$$
$$\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu} = \pi o\lambda(\alpha + \beta)$$
$$\alpha^{2\nu+1} + \beta^{2\nu+1} = \pi o\lambda(\alpha + \beta)$$
$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \pi o\lambda\beta = \beta^{\nu} + \pi o\lambda\alpha$$

Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π.

- Έστω α, β δύο ακέραιοι αριθμοί με $\alpha \neq 0 \; και \; \beta \neq 0$. Τον μεγαλύτερο θετικό κοινό διαιρέτη των α και β τον συμβολίζουμε (α, β) και τον ονομάζουμε Μ.Κ.Δ.
- Έστω α, β δύο ακέραιοι αριθμοί διάφοροι του μηδέν. Το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β το ονομάζουμε Ε.Κ.Π. και το συμβολίζουμε με [α, β].

  Προφανώς ισχύουν τα παρακάτω:
  - (α, 1) = α και (α, 0) = α, όπου α > 0.
  - (α, β)=(|α|, |β|) και [α, β]=[|α|, |β|].
  - Αν α| β τότε (α, β) = α και [α, β] = β όπου α, β > 0.

    Ένα χρήσιμο θεώρημα για τον Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών είναι το εξής: Αν (α, β) = δ τότε υπάρχουν αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε δ = κα + λβ.

  Δύο αριθμοί λέγονται **πρώτοι** μεταξύ τους αν (α, β) = 1.

  Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πάρουμε το εξής:

  - Αν οι αριθμοί α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε υπάρχουν κ, λ ακέραιοι τέτοιοι ώστε κα + λβ = 1. Η πρόταση ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή, αν ισχύει η σχέση κα + λβ = 1, τότε (α, β) = 1.

    Επίσης ισχύει το εξής:
  - Αν έχουμε τρεις ή περισσότερους αριθμούς, τότε το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. δεν μεταβάλλονται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το Ε.Κ.Π. ή τον Μ.Κ.Δ. τους αντίστοιχα.
  - Αν α, β > 0 και (α, β) = 1 τότε [α, β] = αβ.

    Πολύ χρήσιμα είναι τα παρακάτω συμπεράσματα:
    - ✓ Αν α| βγ και (α, β)=1, τότε α|γ
    - ✓ Αν α| γ , β| γ και (α, β) = 1, τότε αβ |γ
    - ✓ Ισχύει ότι (λα, λβ) = λ(α, β) και [λα, λβ] = λ[α, β] όπου λ φυσικός όχι μηδέν.

- ✓ Ισχύει $[\alpha, \beta] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha,\beta)}$ όπου α, β μη μηδενικοί φυσικοί.
- ✓ Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων είναι οι διαιρέτες του Μ.Κ.Δ. και μόνο αυτοί.
- ✓ Τα κοινά πολλαπλάσια δύο μη μηδενικών ακεραίων είναι τα πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π. και μόνο αυτά.

ΕΥΡΕΣΗ Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών μπορούμε με τη βοήθεια ενός από τους παρακάτω τρόπους :

- ➢ Βρίσκουμε πρώτα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια κάθε αριθμού χωριστά και στη συνέχεια βρίσκουμε το μικρότερο αριθμό που υπάρχει σε όλες τις προηγούμενες λίστες.
- ➢ Παίρνουμε τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που μας δίνονται και εξετάζουμε αν αυτός είναι πολλαπλάσιο των υπολοίπων (δηλαδή αν διαιρείται από όλους τους υπόλοιπους). Αν ναι, τότε αυτός είναι το ζητούμενο Ε.Κ.Π., αν όχι, τότε παίρνουμε το διπλάσιο του αριθμού και εξετάζουμε αν αυτό είναι πολλαπλάσιο των υπολοίπων και ούτω καθεξής.
- ➢ Αναλύουμε κάθε έναν από τους αριθμούς που μας δίνονται σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών. Σχηματίζουμε στη συνέχεια το γινόμενο όλων των κοινών και μη κοινών πρώτων αριθμών που εμφανίζονται ως βάσεις στις παραγοντοποιήσεις αυτές, τον κάθε ένα με τον μεγαλύτερο εκθέτη που εμφανίζεται.

Για να βρούμε τον Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ακολουθούμε ένα από τα παρακάτω:

- ➢ Βρίσκουμε πρώτα τους διαιρέτες κάθε αριθμού χωριστά και στη συνέχεια βρίσκουμε το μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει στις προηγούμενες λίστες.
- ➢ Παίρνουμε τον μικρότερο από τους αριθμούς που μας δίνονται και εξετάζουμε αν αυτός είναι διαιρέτης των υπολοίπων. Αν ναι, τότε αυτός είναι ο ζητούμενος Μ.Κ.Δ. Αν όχι, θεωρούμε τους διαιρέτες αυτού και δοκιμάζουμε έναν ένα από το

μεγαλύτερο προς το μικρότερο μέχρι να βρούμε για πρώτη φορά έναν που να είναι διαιρέτης και των υπόλοιπων αριθμών. Αυτός είναι τότε ο Μ.Κ.Δ.

- Αναλύουμε κάθε έναν από τους αριθμούς σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών. Στη συνέχεια σχηματίζουμε το γινόμενο των κοινών πρώτων αριθμών που εμφανίζονται ως βάσεις, τον κάθε ένα με τη μικρότερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται. Ο αριθμός αυτός είναι ο ζητούμενος Μ.Κ.Δ.

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ένας θετικός ακέραιος **p** λέγεται **πρώτος** (διάφορος του 1), αν οι μοναδικοί διαιρέτες του είναι το **1** και ο **p.**

Γενικότερα, ένας ακέραιος p λέγεται πρώτος αν $p \neq 0,-1,1$ και οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του p είναι ο 1 και $|p|$.

Αν ένας ακέραιος αριθμός δεν είναι πρώτος, τότε θα λέγεται **σύνθετος.**

Γενικά ισχύουν τα παρακάτω:

- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.
- Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος από τον 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.
- Κάθε θετικός ακέραιος $\alpha > 1$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α ομάδας

Άσκηση 1η Τρεις εργαζόμενοι σε εταιρεία ασφαλείας κάνουν νυχτερινή εργασία ο πρώτος κάθε 10 μέρες, ο δεύτερος κάθε 4 μέρες και ο τρίτος κάθε 3 μέρες. Αν σήμερα έχουν νυχτερινή εργασία και οι τρεις μαζί μετά από πόσες μέρες θα έχουν για πρώτη φορά πάλι νυχτερινή εργασία και οι τρεις μαζί πάλι;

Άσκηση 2η Αν οι μαθητές ενός Λυκείου παραταχθούν ανά 8 δεν περισσεύει κανένας. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών αν γνωρίζετε ότι οι μαθητές είναι περισσότεροι από 90 και λιγότεροι από 100.

Άσκηση 3η Να συμπληρώσετε το * με ένα κατάλληλο ψηφίο στους παρακάτω αριθμούς:

I. 5793* ώστε να διαιρείται με το 2
II. 5*793 ώστε να διαιρείται με το 9
III. 59*73 ώστε να διαιρείται με το 3
IV. 634* ώστε να διαιρείται με το 5

Άσκηση 4η Να συμπληρωθούν τα * με κατάλληλα ψηφία ώστε:

I. Ο αριθμός 32*6 να διαιρείται με το 3
II. Ο αριθμός 4*1* να διαιρείται με το 5 και το 9
III. 6*2* να διαιρείται με το 2 και το 9
IV. 7*3* να διαιρείται με το 2,5,9

Άσκηση 5η Να βρεθεί ο μικρότερος φυσικός αριθμός που όταν διαιρείται με το 4, 5 και με το 6 αφήνει κάθε φορά υπόλοιπο 2.

Άσκηση 6η: Ένας ανθοπώλης διαθέτει 260 τριαντάφυλλα, 234 γαρύφαλλα και x αριθμό από μιγκέ, όπου x αριθμός μεταξύ των αριθμών 150 και 170. Αν ο μέγιστος αριθμός από ομοιόμορφες ανθοδέσμες που μπορεί να φτιάξει ο ανθοπώλης είναι 13, να βρεθεί ο αριθμός x.

Άσκηση 7η Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\alpha\cdot 10^5 + \beta\cdot 10^4 + \gamma\cdot 10^3 + \delta\cdot 10^2 + 50\cdot\lambda$ είναι πολλαπλάσιο του 25 (οι αριθμοί α, β, γ, δ, ε είναι φυσικοί).

Άσκηση 8η: Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\alpha\cdot 10^3 + \alpha\cdot 10^2 + \alpha\cdot 10$, όπου α φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, 5, 3.

Άσκηση 9η Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με τον φυσικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

Άσκηση 10η Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί $6\cdot\alpha$ και $12\alpha + 45$ διαιρούνται με το 3 (α φυσικός αριθμός).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β ομάδας

Άσκηση 1η : Να αποδείξετε ότι:

I. το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος
II. το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
III. το άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου είναι περιττός
IV. το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός και το γινόμενο ενός άρτιου με έναν τυχαίο ακέραιο είναι άρτιος.

Άσκηση 2η: Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $α = 777^{777}$.

Άσκηση 3η: Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $α = 2003^{2004}$.

Άσκηση 4η: Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε τέσσερις διαδοχικούς περιττούς μπορούμε να βρούμε δύο των οποίων το άθροισμα διαιρείται με το 10.

Άσκηση 5η : Με τα ψηφία 1, 4, 6, 9 και μόνο γράφουμε δύο τυχαίους αριθμούς με αυθαίρετο πλήθος στοιχείων (π.χ. 4169, 964419 κλπ).Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε όλους αυτούς τους αριθμούς που δημιουργούνται δεν υπάρχουν δύο έτσι ,ώστε ο ένας να διαιρείται με τον άλλο και το πηλίκο να είναι ίσο με 17. (Βουλγαρία)

Άσκηση 6η : Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $α = 1 + 3 + 3^2 +\dots+ 3^{89}$ διαιρείται με το 13. (Ρουμανία 1997)

Άσκηση 7η: Αν $α = 5^{2001} + 9^{2004} - 2$ να αποδειχθεί ότι $4|α$. (Γερμανία 2001)

Άσκηση 8η: Δίνονται 6 διαδοχικοί φυσικοί. Αν α το άθροισμα των τριών πρώτων και β το άθροισμα των τριών τελευταίων, να εξεταστεί αν μπορεί να ισχύει αβ=20032003. (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης 1995)

Άσκηση 9η: Ο καθηγητής των μαθηματικών έγραψε στον πίνακα τον αριθμό α = 512*6, όπου το * συμβολίζει ένα ψηφίο που σβήστηκε κατά λάθος. Είναι δυνατόν να βρεθεί ποιο ψηφίο σβήστηκε αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 12. (Ρουμανία 1995)

Άσκηση 10η: Να βρεθούν οι τιμές του θετικού αριθμού α έτσι ώστε οι αριθμοί α - 3, α - 2, και α + 6 να είναι όλοι τους συγχρόνως πρώτοι. (Ρουμανία 1997)

Άσκηση 11η: Να βρεθεί ο αριθμός p αν $7p + 1 = \nu^2$ όπου ν φυσικός μη μηδενικός. (Γερμανία 1991)

Άσκηση 12η: Αν οι ακέραιοι αριθμοί α + 2 και 46 - β διαιρούνται με 11 να αποδείξετε ότι και ο α + β διαιρείται με το 11.

Άσκηση 13η : Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι της μορφής 8κ + 1.

Άσκηση 14η: Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $17^{50} + 33^{100}$ δια του 8.

Άσκηση 15η: Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $25^{40} + 17^{30}$ δια του 8.

Άσκηση 16η: Να δείξετε ότι ο αριθμός α = (2ν+1)(4ν+1)(5ν+3) διαιρείται με το 3 όπου ν φυσικός αριθμός.

Άσκηση 17η: Αν α, β, γ, δ και ε είναι ακέραιοι αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους έτσι ώστε (4-α)(4-β)(4-γ)(4-δ)(4-ε) = 12 να αποδείξετε ότι:
α + β + γ + δ + ε = 17. (Βουλγαρία)

Άσκηση 18η: Να εξετάσετε αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα 6x6 μαγικό τετράγωνο με τους 36 πρώτους αριθμούς.

Άσκηση 19η: Να προσδιορίσετε τις τιμές του πρώτου αριθμού ν, ώστε οι αριθμοί ν, ν + 10, ν + 14 να είναι όλοι τους πρώτοι. (Ρωσία 1998)

Άσκηση 20η: Να βρείτε πόσοι ακέραιοι αριθμοί από το 1 έως τον 100 έχουν ακριβώς τρεις διαιρέτες (παράγοντες) συμπεριλαμβανομένων του εαυτού τους και της μονάδας. (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.-Θαλής 1992)

Ευγενική χορηγία της Ομοσπονδίας Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος

Σόλωνος 142
106 77 Αθήνα
Τηλ.: 210 3829122

www.oefe.gr

PAPIER LAND HELLAS
Δημήτρης Σ. Βάρφης
Τ. 2310 618311, 621817